

А. П. Олійник¹
А. А. Мороз¹

КОМПЛЕКСНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАБРУДНЕННЯ ҐРУНТІВ ВНАСЛІДОК РЕАЛІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В НАФТОГАЗОВІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

¹Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Проведено аналіз існуючих моделей забруднення ґрунтів, запропоновано комплексну математичну модель забруднення ґрунтів внаслідок реалізації технологічних процесів в нафтогазовій індустрії. Математична модель використовує систему рівнянь дифузії у формі Дарсі або Форхгеймера, а також двовимірне рівняння дифузії. Встановлено відповідні граничні та початкові умови з урахуванням особливостей реального процесу. Розроблено та реалізовано чисельний метод вирішення системи рівнянь моделі, представлено та проаналізовано результати модельних розрахунків, встановлено напрямки подальших досліджень.

Ключові слова: забруднення ґрунтів, рівняння Дарсі та Форхгеймера, рівняння дифузії, чисельний метод.

Вступ

Забруднення ґрунтів внаслідок реалізації технологій видобутку нафти і газу, їх транспортування є важливою екологічною проблемою: забруднення ґрунтів призводить до забруднення ґрунтових вод, які споживаються населенням. Дослідження цього комплексу питань проводились багатьма вченими [1—4], в яких проблема забруднення ґрунтів і вод вирішувалась шляхом аналізу явища забруднення через розбиття його на певні етапи: вивчення зміни ґрунтових вод, які є носіями шкідливих речовин, поширення цих речовин в середовище, вивчення гранично допустимих концентрацій, властивостей ґрунтів та способів їх відновлення для подальшого використання в лісному господарстві, в агропромисловому комплексі тощо. Спеціально ця проблема вивчається науковцями України, Румунії, Угорщини в рамках програми вивчення стану ґрунтів в зонах видобутку нафти і газу. Існують методики попередження можливості поширення шкідливих речовин [5], проте, як зазначають А. П. Самарський та А. П. Михайлов в цій роботі остаточна відповідь на питання доцільності тієї чи іншої технології запобігання поширенню шкідливої речовини може бути одержана після додаткових досліджень по моделюванню процесів, що вивчаються, в тому числі із урахуванням властивостей конкретних ґрунтів, різних технологій видобутку, екологічних аспектів тощо.

Існуючі математичні моделі процесу поширення шкідливих речовин

Під час моделювання процесу забруднення ґрунтів та ґрунтових вод зазвичай моделюється причина та джерело такого забруднення, а також власне процес поширення шкідливої речовини. Зокрема, для побудови моделі гідрологічного «бар'єру» проти забруднення ґрунтових вод [5] використовується чисельна схема, яка передбачає розв'язання рівняння Бусінеска для визначення рівня ґрунтових вод $h(x, y, t)$ з відповідними граничними та початковими умовами та рівнянням для знаходження концентрації шкідливої речовини, яке є рівнянням параболічного типу і в загальному випадку може бути записаним у вигляді (з урахуванням закону Дарсі):

$$\frac{\partial}{\partial t}(C(H+h)) - v \frac{\partial}{\partial x} \left(C(H+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left(C(H+h) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = Q(x, y, t), \quad (1)$$

де $Q(x, y, t)$ — відома інтенсивність джерел забруднень.

Рівняння (1) доповнюється відповідними граничними та початковими умовами. При переході до дискретної моделі рівняння Бусінеска та рівняння (1) апроксимується різницевиими схемами. Очевидно, що рівняння для $h(x, y, t)$ не містить величин $C(x, y, t)$ і ця властивість спрощує як чисе-

льне дослідження моделі, так і її реалізацію. Використовуються абсолютно стійкі неявні схеми, що дозволяє проводити розрахунки при досить великих кроках по часу. Особливістю розв'язання цієї задачі є великі геометричні розміри зони дослідження та значна тривалість процесів в часі, особливості побудови гідрологічного бар'єру. Проте саме ця модель є найтипівішою при описі причини появи шкідливої речовини та встановленні закону її поширення. Існують і інші математичні моделі досліджуваного явища, проте вони, як правило, стосуються спрощених, одновимірних постановок задачі моделювання джерела забруднення та його поширення [4—5].

Математична модель процесу поширення забруднювальної речовини при видобутку вуглеводнів

Для побудови моделі процесу поширення забруднюючої речовини при видобутку вуглеводнів беруться такі допущення для процесу течії продукту по свердловині:

1. Течія рідини розглядається у вертикальній циліндричній формі і є симетричною відносно вертикальної осі — фактично, розглядається течія у прямокутній області;
2. Динамічна в'язкість μ та густина ρ вважаються сталими;
3. Температура та проникність середовища вважаються сталими;
4. Тиск в області визначається початковими значеннями атмосферного тиску технологічними параметрами відповідних процесів.

З урахуванням вказаних допущень для опису джерела забруднення використовується модель, що базується на законі Дарсі

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{kgp}{\mu}, \end{cases} \quad (2)$$

якщо ж умова $v \gg v^2$ не виконується, використовується закон Форхгеймера [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ \frac{\mu}{k} u = -\frac{\partial p}{\partial x} - \beta \frac{\rho V^2}{\nu k} \frac{u}{V}; \\ \frac{\mu}{k} v = -\frac{\partial p}{\partial y} - \beta \frac{\rho V^2}{\nu k} \frac{v}{V}, \end{cases} \quad (3)$$

де β — безрозмірний коефіцієнт, який залежить від структури пористого середовища; $\beta \approx 1$; k — коефіцієнт, який за розмірністю збігається з коефіцієнтом проникності; V — характерна швидкість фільтрації. Оскільки системи (2) та (3) шляхом деяких перетворень зводяться до єдиного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

то граничні умови задаються у вигляді

$$P|_{\partial G} = f(x, y), \quad (5)$$

де $f(x, y)$ — або неперервна функція в досліджуваній області (якщо розподіл тиску по границі є неперервним), або ж кусково-неперервною функцією $f(x, y)$ в (5) дозволяє вивчити розмір зони впливу наявності витоків з області на конфігурацію течії в цілому, а також вивчити поведінку течії в залежності від того, в яке середовище відбувається витікання рідини.

Граничні умови (5) можуть бути подані в такому вигляді:

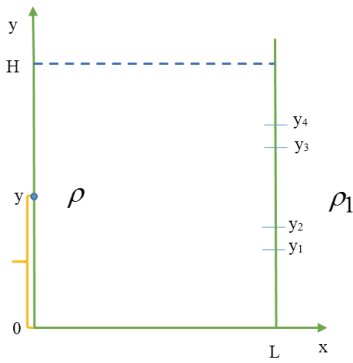


Рис. 1. Граничні умови для тиску

$$\begin{cases} P|_{x=0} = P_a + \rho g(H - y); \\ P|_{y=H} = P_a; \\ P|_{y=0} = P_a + \rho gH; \\ P|_{x=L} = \begin{cases} P_a + \rho g(H - y), y \notin [y_i; y_{i+1}]; \\ P_a + \rho_1 g(H - y), y \in [y_i; y_{i+1}]. \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

де ρ — густина речовини в G ; ρ_1 — густина речовини середовища, куди витікає шкідлива речовина.

Спосіб задання граничних умов (6) дозволяє моделювати ситуацію, в якій в ході видобутку вуглеводнів відбувається витік речовини, що знаходиться в свердловині, причому таких зон витіку може бути декілька.

Задача (4) з граничними умовами (6) розв'язується методом верхньої релаксації, в роботі [8] встановлено залежність між значеннями параметрів релаксації та швидкістю збіжності ітераційного процесу.

Для опису процесу поширення шкідливої речовини в двовимірній області G , розв'язується рівняння дифузії

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y, t) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x, y, t) \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (7)$$

з початковими

$$C(x, y, t)|_{t=0} = C_0(x, y), \quad (8)$$

та граничними умовами

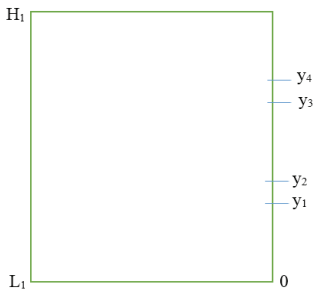


Рис. 2. Граничні умови для концентрації

$$\begin{cases} C|_{y=0} = C_0(x, y); \\ C|_{x=L_1} = C_0(x, y); \\ C|_{y=H_1} = C_0(x, y); \\ C|_{x=0} = \begin{cases} C_0(x, y), y \notin [y_i; y_{i+1}]; \\ \text{grad } C = -\frac{\bar{V}}{D}, y \in [y_i; y_{i+1}], \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

де $D > 0$ — коефіцієнт гідродинамічної дисперсії (аналог коефіцієнта теплопровідності в законі Фур'є).

Фактично для рівняння дифузії задаються граничні умови II роду, в (9) величина \bar{V} визначається з (2) після розв'язання задачі Діріхле (4), (6). Це дозволяє коректніше задати граничні умови моделі. Рівняння (7) з умовами (9) розв'язується за методом змінних напрямків [7], з використанням знайдених на попередньому кроці значень функції $C(x_b, y_b, f_{n-1})$. Рівняння (7) з умовами (9) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею з урахуванням граничних умов для концентрації шкідливих речовин. При побудові граничних умов (9) визначаються розміри зони ($L_1; H_1$) з умов малості зміни концентрації $C(x_0, y_0)$.

Результати досліджень

При чисельній реалізації методу проведено розрахунки тиску в досліджуваній області. Досліджено вплив наявності ділянок на границі області, в яких речовина проникає за межі області і розміри області, в яких вказаний виток рідини чинить вплив на конфігурацію течії.

На рис. 3 показано, що швидкість витіку рідини з досліджуваної області тим вища, чим глибше знаходиться зона витіку, крім того, результати розрахунків, подані на рис. 3, засвідчують, що зміна величини горизонтальної компоненти швидкості є чутливою лише в невеликому околі біля зони витіку.

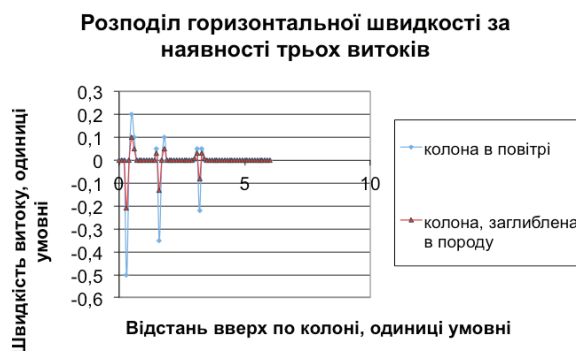


Рис. 3. Розподіл горизонтальної компоненти швидкості за наявністю трьох витоків

На рис. 4 наведено розподіл концентрацій домішок при певному вигляді граничних умов (9), що характеризує щільність джерел забруднень за різних конфігурацій розподілу коефіцієнта дифузії.

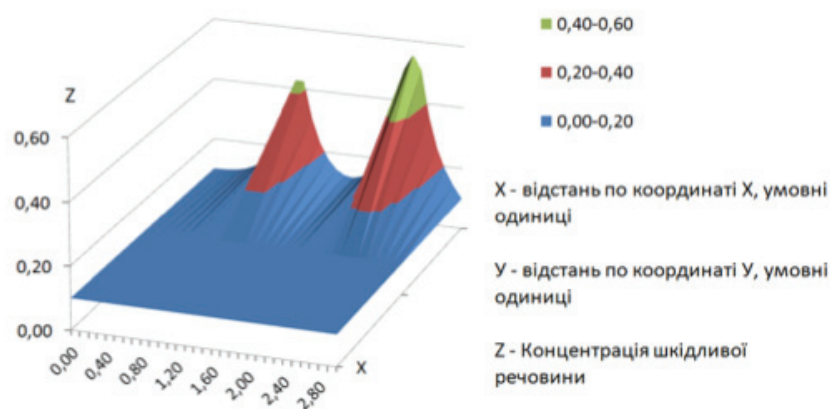


Рис. 4. Розподіл концентрації шкідливої речовини в модельній області за наявністю витоків різної інтенсивності

На рис. 5 показано розподіл концентрації домішок по глибині, якщо глибина зони, на якій відбувається забруднення, складає 1,5 км.

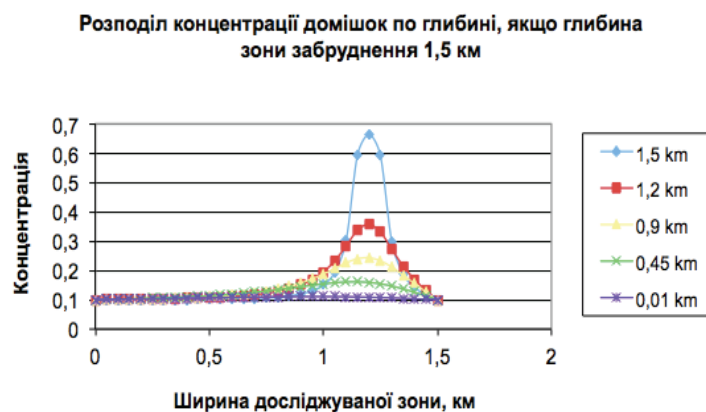


Рис. 5. Розподіл концентрації домішок на різних глибинах

Встановлено, що при такій глибині концентрація шкідливої речовини на поверхні землі практично рівна нулю. Крім того, можна оцінити величину зони впливу джерела шкідливих речовин за шириною досліджуваної зони.

Висновки

Основними результатами роботи є:

- створення математичної моделі процесу поширення речовини зі свердловини при видобутку вуглеводнів, який базується на системі рівнянь Дарсі (Форхгеймера) та двовимірному рівнянні дифузії;
- постановка граничних умов для рівняння Діріхле та умов II роду для рівняння дифузії з урахуванням закону Фіка за спільного розв'язання (4) та (7);

- розробка чисельного алгоритму реалізації моделі, створення відповідних програм для їх реалізації на ПЕОМ;
 - проведення широкого класу тестових розрахунків для модельних зон забруднення.
- Напрямки подальших досліджень можуть бути пов'язані з вивченням таких питань:
- вивчення джерела забруднення у разі втрати герметичності підземних ділянок нафтопроводів із застосуванням відмінного від (2) або (3) математичного апарату моделювання;
 - розробка моделей та методів для вивчення властивостей ґрунтів;
 - оцінка швидкості витоку вуглеводнів для різних типів моделей течії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / [Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов и др.]. — М. : Наука, 1992. — 541 с.
2. Семчук, Я. М. Основні завдання і методи досліджень для обґрунтування охорони підземних вод в районі видобутку калійних солей / Я. М. Семчук, Л. В. Палійчук // Науковий вісник ІФНТУНГ. — 2007. — № 1(15). — С. 164—167.
3. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. — М. : Гостехиздат, 1947 — 244 с.
4. Rampit, I. A. About measurements emanation of soil factor / I. A. Rampit // ANRT. — 2004. — № 3. — P. 51—52.
5. Самарский А. А. Математическое моделирование : Идеи, методы, примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — 2-е изд. испр. — М. : Физматлит, 2005 — 320 с.
6. Олійник А. П. Математическое моделирование нестационарной фильтрации с целью оценки физико-механических свойств грунтов в зоне трубопровода / А. П. Олійник, М. В. Панчук // Методы и средства технической диагностики: XI Межвузовская школа-семинар : сб. матер. — Ивано-Франковск, 1992. — С. 137—140.
7. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. — М. : Мир. — 1990. — Т. 1. — 384 с.
8. Олійник А. П. Дослідження впливу параметрів релаксації на збіжність чисельного методу послідовної верхньої релаксації для задачі Діріхле / А. П. Олійник, Л. О. Штаєр // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 289—296.

Рекомендована кафедрою відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 17.07.2015

Олійник Андрій Петрович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри математичних методів в інженерії;
Мороз Аліса Андріївна — аспірант кафедри математичних методів в інженерії, e-mail: alice.shelyp@gmail.com.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ

A. P. Oliinyk¹
A. A. Moroz¹

Complex Mathematical Model of Soil Contamination as a Result of Technological Processes in Oil and Gas Industry

¹Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

The existing models of soil contamination have been analysed, a comprehensive mathematical model of soil contamination as a result of technological processes in oil and gas industry has been proposed. The mathematical model uses a diffusion equation in the form of Darcy or Forchheimer and two-dimensional diffusion equation. There have been established appropriate boundary and initial conditions taking into account the real process. There has been developed and implemented a numerical method for solving a system of equations of the model, the results of model calculations have been presented and analyzed, the directions for further research have been set.

Keywords: soil contamination, Darcy and Forchheimer's equation, diffusion equation, numerical method.

Oliinyk Andrii P. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Mathematical Methods in Engineering;
Moroz Alisa A. — Post-Graduate Student of the Chair of Mathematical Methods in Engineering, e-mail: alice.shelyp@gmail.com

А. П. Олійник¹
А. А. Мороз¹

Комплексная математическая модель загрязнения почв в результате реализации технологических процессов в нефтегазовой промышленности

¹Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа

Проведен анализ существующих моделей загрязнения почв, предложена комплексная математическая модель загрязнения почв в результате реализации технологических процессов в нефтегазовой промышленности. Математическая модель использует систему уравнений диффузии в форме Дарси или Форхгеймера, а также двумерное уравнение диффузии. Установлены соответствующие предельные и начальные условия с учетом особенностей реального процесса. Разработан и реализован численный метод решения системы уравнений модели, представлены и проанализированы результаты модельных расчетов, установлено направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: загрязнение почв, уравнение Дарси и Форхгеймера, уравнение диффузии, численный метод.

Олійник Андрей Петрович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов в инженерии;

Мороз Алиса Андреевна — аспирант кафедры математических методов в инженерии, e-mail: alice.shelyp@gmail.com