МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ БУДІВЕЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

УДК 624.04

ПРИКЛАДАННЯ ОСНОВ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ ДО СУЧАСНИХ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ МІЦНОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Моргун А. С., Сорока М. М., Цимбал С. О., Литвинюк В. О.

В роботі відображено сучасний стан методів будівельної механіки як науки про методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість, стійкість при довільних зовнішніх впливах. Найбільш зручними для розв'язання задач будівельної механіки виявились методи дискретної теорії лінійних просторів: матричне числення, МСЕ, МГЕ. В роботі розглянуто саме числовий метод скінчених елементів та його застосування до визначення НДС рамної системи.

Ключові слова: *рівняння рівноваги, геометричні рівняння, фізичні рівняння, метод скінчених елементів, матриця піддатливості.*

ПРИЛОЖЕНИЕ ОСНОВ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ К СОВРЕМЕННЫМ ЧИСЛОВЫМ МЕТОДАМ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦІЙ

Моргун А. С., Сорока Н. Н., Цымбал С. А., Литвинюк В .А.

В работе отображено современное состояние методов строительной механики как науки про методы расчета сооружений на прочность, жорсткость, устойчивость при произвольных внешних воздействиях. Наиболее удобными для решения задач строительной механики оказались методы дискретной теории линейных пространств: матричное исчисление, МКЕ, МГЕ. В работе рассмотрено именно численный метод конечных элементов и его использование к определению напряженно-деформированного состояния рамной системы.

Ключевые слова: *уравнения равновесия, геометрические уравнения, физические уравнения, метод конечных элементов, матрица податливости.*

APPLICATION FUNDAMENTALS OF STRUCTURAL MECHANICS TO MODERN NUMERICAL METHODS FOR STRENGTH ANALYSIS OF CONSTRUCTIONS

Morgun A. S., Soroka N. N.,Simbal S. A., Litvinyk V.A.

Article dedicated to current state of methods of structural mechanics as a science about the methods of calculation of constructions on the strength, stiffness, resistance to arbitrary external influences. The most convenient for solving problems of structural mechanics, methods of the theory of linear discrete spaces: matrix calculus, MKE, MGE. In this paper we describe the numerical finite element method and its application to the determination of stress-strain state of the system frame.

Keywords: *equilibrium equations, geometric equations, physical equations, finite element method, the matrix ductility.*

Вступ

Напружено - деформований стан (НДС) довільної системи можна стримати за допомогою двох еквівалентних підходів: локального і інтегрального. Локальний класичний підхід базується на записі повної системи рівнянь будівельної механіки (рівнянь статичних (1), геометричних (2), фізичних (3)) складених для нескінченно малого елемента. Ці рівняння записані у матричній формі зліва та в позначеннях про підсумовування Ейнштейна справа:

$$[A] * \{S\} = \{F\}; \qquad \sigma_{ij,j} + b_i = 0, \tag{1}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^{\Gamma} * \{\Delta\}; \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}, \tag{2}$$

$$\{\varepsilon\} = [D] * \{S\}; \qquad \sigma_{ij} = 2*G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\right), \tag{3}$$

де [A] - матриця умов віно ваги; {S}- шуканий вектор зусиль; $\{\varepsilon\}$ - шуканий вектор деформацій; [D] - матриця жорсткості; $[A]^{Г}$ – матриця градієнтів від матриці умов рівноваги.

Повна система рівнянь локального методу приводить до 15 диференційних рівнянь в частинних похідних.

Інтегральний метод базується на варіаційному численні. Для отримання результату про наявності сучасних ЕОМ залучають числові методи (МСЕ, МГЕ). Числовий МСЕ метод є одним із основних інструментів числового аналізу міцності і надійності конструкції, саме в його основі лежить варіаційне числення.

В цьому випадку пошук рішення здійснюється шляхом мінімізації інтегральної величини, яка пов'язана з фізичною суттю задачі. Так в задачах механіки деформованого тіла мінімізується потенційна енергія системи, яка пов'язана з роботою напружень і зовнішнього прикладеного навантаження. В результаті отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Її розв'язок дає шуканий НДС системи.

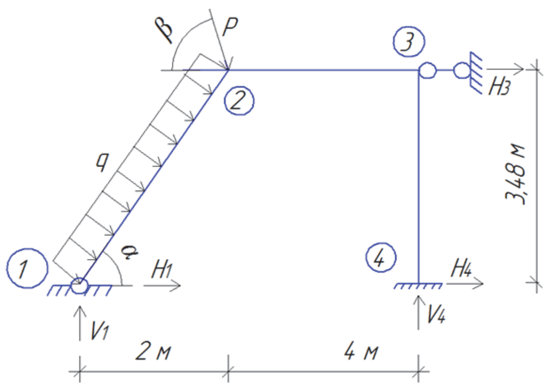
МСЕ відкриває можливість розрахунку споруд за уточненими розрахунковими схемами та піднімає надійність і забезпечує економічність споруд.

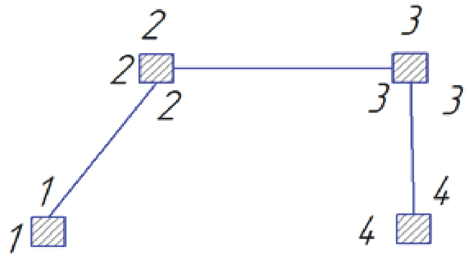
ЕОМ надає можливість автоматизувати розрахунковий процес. В сучасних числових методах (МСЕ, МГЕ) реалізовано ідею Пуассона розглядати НДС реального об'єкта як складові НДС скінчених елементів його частин.

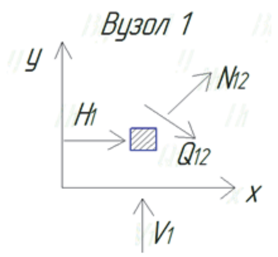
Постановка задачі, визначальні співвідношення

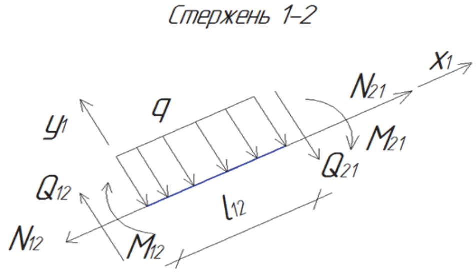
Таким чином, МСЕ базується на розгляді конструкції у вигляді сукупності окремих конструктивних елементів, з'єднаних в кінцевому числі вузлових точок, та першим етапом розрахунку за МСЕ є дискретизація розрахункової схеми, на рис.1 – це плоска статично невизначена рама

$$\alpha=45^{o}, \beta=60^{o}, P=80 \text{ кН}, q=20 \frac{кН}{м}$$









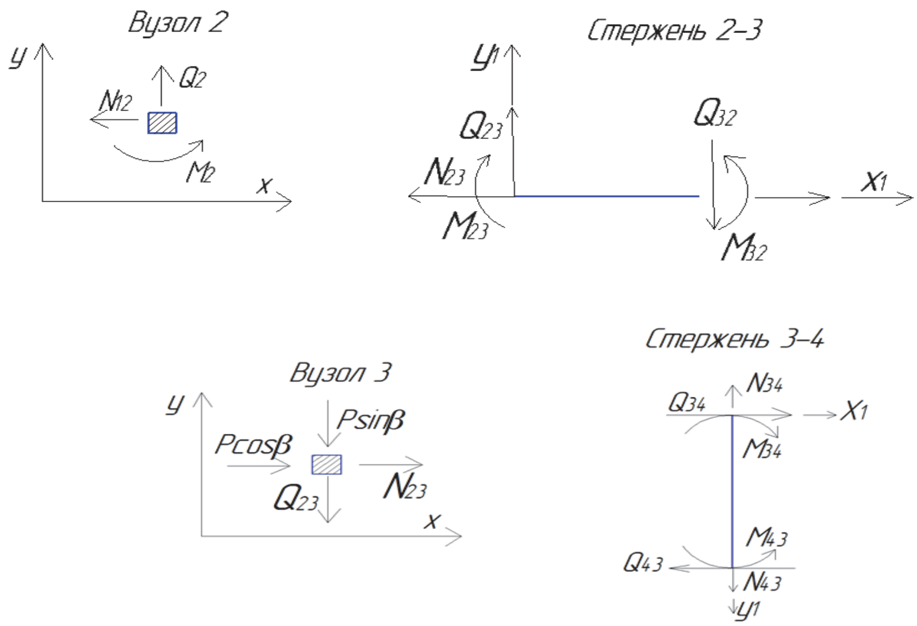


Рис.1 Розрахункова схема статично невизначеної рами та розбивка її на скінчені елементи (СЕ)

У стержневій системі 2 типи СЕ: стержні та вузли. Сукупність умов рівноваги для кожного стержня і вузла являє собою систему рівнянь рівноваги для всієї системи. Для запису рівнянь рівноваги вузлів застосовано загальну систему координат, для стержнів обрано власну, місцеву систему координат.

Умови рівноваги:

Вузол 1

$$\Sigma F_x=0 \quad H_1+N_{1-2}*\cos\alpha+Q_{1-2}*\sin\alpha=0;$$

$$\Sigma F_y=0 \quad V_1+N_{1-2}*\sin\alpha-Q_{1-2}*\cos\alpha=0;$$

$$\Sigma M_1=0 \quad M_{1-2}=0.$$

Стержень 1-2

$$\Sigma F_{x1}=0 \quad -N_{1-2}+N_{2-1}=0;$$

$$\Sigma F_{y1}=0 \quad Q_{1-2}-Q_{2-1}-q*l_{1-2}=0;$$

$$\Sigma M_1=0 \quad Q_{2-1}\cdot l_{1-2}+M_{1-2}-M_{2-1}+q\cdot l_{1-2}^2/2=0.$$

….. . . .

Коефіцієнти перед невідомими в рівняннях рівноваги є складовими матриці форми А, тобто, матриці умов рівноваги (1):

$$[A]*\{S\}=\{P\}:$$

$$[A]=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & .... \\ 1 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & .... \\ 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & -1 & 0 & .... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & .... \\ .. & .. & .. & .. & .. & & ...... \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Матриця [A] матиме стільки рядків, скільки умов рівноваги (m) і стільки стовпців, скільки невідомих (k). Вектор шуканих внутрішніх зусиль:

$$\{S\}=\{V_1, H_1, N_{1-2}, Q_{1-2}, M_{1-2},\ldots\}.$$

Вектор зовнішнього навантаження, зосередженого в вузлах

$$\{P\}=\{0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad q\cdot l_{1-2},\quad -q\cdot l_{1-2}^2,\quad \ldots\}$$

Внаслідок виникнення внутрішніх зусиль стержні розрахункової схеми деформуються, вузли переміщуються. Проте стержні не відокремлюються один від одного, а деформуються сумісно і узгоджено залежно від переміщень кінців, які являють собою вузли стержневої системи. Аналітичні залежності між переміщеннями (u) та деформаціями (ε), тобто геометричні рівняння можна подати (2):

$$\{\varepsilon\}=|A|^{\Gamma}*\{\Delta\}$$

де $|A|^{\Gamma}$ – матриця градієнтів, похідна від матриці форми |A|;
Вектор переміщень вузлів

$$\{\Delta\} = [\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \ldots, \{\Delta_n\}].$$

Кожен вузол «і» має 3 компоненти: Δx_i, Δy_i – поступальні переміщення вузла «і» та кут повертання вузла φ_i:

$$\{\Delta_1\}=\{\Delta x_1, \Delta y_1, \varphi_1\}.$$

Вектор {ε} характеризує деформацію стержнів:

$$\{\varepsilon\}=\{\varphi_i, \varphi_j, \Delta l\}. \tag{5}$$

Між статичними та геометричними рівняннями існує певний зв’язок. Використовуючи матрицю умов рівноваги |A| однієї категорії можна формально записати рівняння іншої категорії. Це правило подвійності набагато полегшує задачу складання геометричних рівнянь, оскільки геометричне дослідження споруд становить чималі труднощі, а складання умов рівноваги здійснюється порівняно просто.

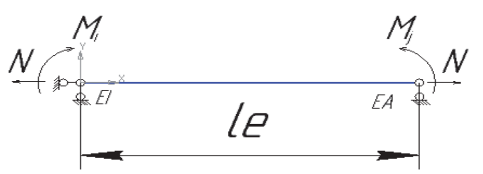
При компонуванні фізичних рівнянь (3) можна скористатись матрицею піддатливості, яка є оберненою до матриці жорсткості.

$$\{\varepsilon\}=[d]_e*\{S\}_e \tag{6}$$

де $\{S\}_e=\{M_i, M_j, N\}^T$ – вектор кінцевих зусиль в стержні; $[d]_e$ – матриця піддатливості. Розгорнутий матричний запис для одного стержня «е».

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \Delta l_e \end{Bmatrix} = |d| \cdot \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Компонування матриці піддатливості для шарнірно опертого стержня проведено в такій послідовності: на стержень l_e діють: поздовжня сила N, згинальні моменти M_i, M_j, рис.2.



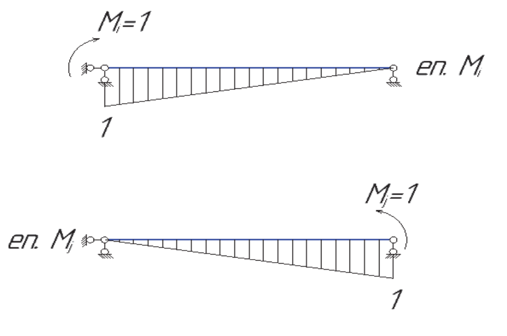


Рис. 2. – Пояснення до компонування матриці піддатливості стержня l_e

За умови пружної роботи стержня лінійна компонента деформацій:

$$\Delta_{l_e} = Nl / EA$$

Кутові деформації стержня знаходились з залученням принципу суперпозицій

$$\varphi_i=\delta_{ii}M_i+\delta_{ij}M_j$$

$$\varphi_j=\delta_{jj}M_i+\delta_{ij}M_j \tag{8}$$

Одиничні переміщення знаходились за формулами Мора:

$$\delta_{ij}=\int_0^l \frac{M_1^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l\cdot\frac{2}{3}l=\frac{l}{3EI} \tag{9}$$

$$\delta_{ij}=\int_0^l \frac{M_i\,M_j}{EI}dx=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l\cdot\frac{1}{3}l=\frac{l}{6EI} \tag{10}$$

Матриця піддатливості для стержня l_e:

$$\left|d_e\right|=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & 0\\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0\\ 0 & 0 & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{l}{3EI} & \dfrac{l}{6EI} & 0\\ \dfrac{l}{6EI} & \dfrac{l}{3EI} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{l}{EA}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Матриця піддатливості для всієї рами на рис. 1:

$$\left|D\right|=\begin{vmatrix}D_I & 0 & 0\\ 0 & D_{II} & 0\\ 0 & 0 & D_{III}\end{vmatrix}. \tag{12}$$

Згідно наведеному алгоритму для рами на рис. 1 отримаємо значення внутрішніх зусиль, рис.3 :

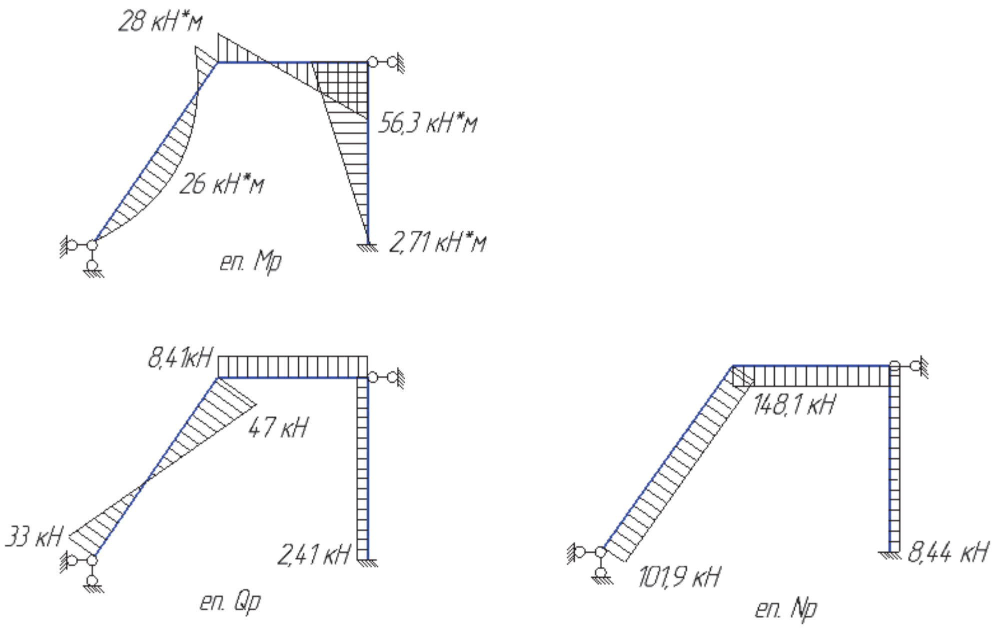


Рис.3. Епюри внутрішніх зусиль в рамі M,Q,N

які співпадають з аналітичним методом розрахунку цієї рами за методом переміщень

Висновки

– Проведення числової діагностики НДС поперечника споруди за сучасним числовим МСЕ дає можливість проводити достовірні міцнісні розрахунки споруд та оптимізувати їх.

Використана література

1. Городецкий А.С., Евзеров Н.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А. Метод конечных елементов: теория и численная реализация, ПК «Лира-Windows», К.: Факт. – 1997-137 с.
2. Баженов В.А., Дащенко О.Ф., Коломієць Л.В., Сур'янінов М.П., Ухов О.В. Будівельна механіка та металеві конструкції, Одеса: «Стройиздатъ». - 2010. – 587 с.
3. Моргун А.С., Сорока М.М. Будівельна механіка та будівельні конструкції, Вінниця, ВНТУ, 2010. – 243 с.
4. Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В. Будівельна механіка. Київ: «Каравелла», 2006. – 545 с.

Моргун Алла Серафимівна – д.т.н., професор, завідувач кафедри промислового та цивільного будівництва Вінницького національного технічного університету.

Сорока Микола Миколайович – к.т.н., доцент кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Цимбал Сергій Олександрович – студент Вінницького національного технічного університету.

Літвінюк Вадим Олександрович – студент Вінницького національного технічного університету.

Моргун Алла Серафимовна – д.т.н., профессор, заведующая кафедры промышленного и гражданського строительства Винницкого национального техничного университета.

Сорока Николай Николаевич – к.т.н., доцент кафедры строительной механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры.

Цымбал Сергей Александрович – студент Винницкого национального технического университета.

Литвинюк Вадим Александрович– студент Винницького национального технического университета.

Morgun Alla – doctor of technical sciences, professor, head of department of industrial and civil engineering Vinnytsia National Technical Universiti.

Soroka Nik – ph. d., docent of department of bilding mehanik Odessa state academy of civil engineering and architecture.

Simbal S. – student Vinnytsia National Technical Universiti.

Litvinuk V. – student Vinnytsia National Technical Universiti.