

ЦИТ: 413-0583

УДК 681.5.015.5

Кулик Я.А., Кветний Р.Н.

УСУНЕННЯ ЯВИЩА ГІББСА З ДОПОМОГОЮ МЕТОДА ПІДСУМОВУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет,
Вінниця, Хмельницьке шосе 95, 21021

Kulik Y.A., Kvetnyy R.N.

THE ELIMINATION OF GIBBS EFFECT BY THE METHOD OF SUMMATION

Vinnitsa national technical university,
Vinnitsa, Khmelnytsky highway 95, 21021

Анотація. В даній роботі показано, як одна з форм м'якого визначення порогу видаляє явище Гіббса в серії на основі компактних біортогональних вейвлетів. Замість звичайної апроксимації функції у вигляді ряду біортогональних вейвлетів використовується представлення цього ряду у вигляді суми з використанням дельта послідовності. Чисельні експерименти показують, що апроксимація функції, отримана таким чином, добре наближає стрибкоподібні розриви функції.

Ключові слова: явище Гіббса, метод підсумовування, вейвлет-розкладання.

Abstract. In this article it is shown how a form of soft threshold definition removes the Gibbs phenomenon in a series based on the compact biorthogonal wavelets. Instead of the usual approximation of as a series biorthogonal wavelets it is used the representation of a number as a sum using a delta sequence. Numerical experiments show that the approximation of functions so obtained are well approximates abrupt discontinuities function.

Keywords: Gibbs phenomenon, summability methods, wavelet decomposition.

Вступ

Розкладання функцій в ряди по ортогональних вейвлетам

$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k,n} \psi_{k,n}(x)$ мають багато властивостей, які є у тригонометричних

рядів Фур'є $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ [1]. Ці перетворення демонструють небажану

поведінку в околі точок розриву функції. Така поведінка, що складається з помилкових коливань в околі різких перепадів, які не можуть бути видалені через використання більше членів ряду, називається явище Гіббса [2]. У обробці зображень це призводить до появи «дзвону» біля різких перепадів кольорів у зображенні. Це може також викликати проблеми в аналізі сигналу і в оцінці щільності й інших наближень, що використовуються в статистиці.

Видалення явища Гіббса від ряду Фур'є методами підсумовування добре відомі [3], проте ці самі методи, не можуть бути використані для вейвлет-перетворень, оскільки зазвичай апроксимація функції виконується для

нескінченної частинної суми $f_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k,n} \psi_{k,n}(x)$ на відміну від



симетричної кінцевої частинної суми при використанні рядів Фур'є.

Важливим видом апроксимації, який з'являється в теорії вейвлетів, але широко не використовувався до цього, є пороговий метод. У такому наближенні всі коефіцієнти, величина яких нижче певного порогового значення, видаляються, а функція апроксимується послідовно з інших коефіцієнтів. Це дає наближення, яке аналогічне вихідній функції в тому, що так само гладка як початкова. Цей метод використовується для зниження вимог до даних для сигналів та зображень і для видалення шуму, коли дані від спотвореного сигналу. Це дає кращий результат, ніж звичайні низькочастотні фільтри для "білого" шуму, спектральна потужність якого рівномірна по всіх частотах.

Необхідно розробити такий метод, який би максимально усував явище Гіббса, при цьому не спотворював саму апроксимовану функцію. Метою статті є розробка такого методу та перевірка його ефективності.

Поняття біортогональних вейвлетів та позитивних дельта-послідовностей

Розкладання функції за біортогональним базисом схоже на ортогональне розкладання - воно вимагає пари функціональних послідовностей ϕ_n і $\tilde{\phi}_n$, що $(\phi_n, \tilde{\phi}_l) = \delta_{k,l}$. Для того щоб виконувалась збіжність, обидві функції послідовності повинні задовольняти властивості базису Рісса. В загальному випадку $\phi \neq \tilde{\phi}$.

Підпростір V_m , $m \in Z$, визначається як сукупність замкнутих вкладених лінійних підпросторів $\phi_{n,m} = 2^{m/2} \phi(2^m x - n)$, $n \in Z$

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots,$$

Розклад функції на множину підпросторів підпросторів V_m , $m \in Z$ називається кратномасштабним аналізом.

Пара $(V_m, V_{\tilde{m}}) \quad m \in Z$ називається складовими біортогонального кратномасштабного аналізу, якщо для деякого базису $(\phi_n, \tilde{\phi}_n)$ виконується умова

$$(\phi(-k), \tilde{\phi}(-l)) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k=l, k, l \in Z \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Розглядаючи біортогональну проекцію функції f на сукупність просторів V_m ,

$$Q_m f = \sum_{n \in Z} (f, \phi_{m,n}) \phi_{m,n}, \quad (1)$$

де $Q_m f$ є наближенням функції f ,

функцію ϕ_n будемо розглядати як функцію для аналізу, а $\tilde{\phi}_n$ для синтезу.

Також біортогональна проекція функції f на вейвлет-підпростір тепер можна записати у вигляді частинних сум вейвлет-розкладання

$$Q_m f = \sum_{n \in Z} (f, \tilde{\phi}_{0,n}) \phi_{0,n} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n \in Z} (f, \tilde{\psi}_{k,n}) \psi_{k,n}. \quad (2)$$

Позитивна дельта-послідовність є послідовність $\delta_m(x)$, $m \in N$ з параметром $x \in R$, яка задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, y) dy = 1.$$



Позитивна дельта-послідовність є квазі-позитивною дельта-послідовністю, якщо виконуються наступні умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, y) dy \leq C,$$

де $C > 0$ [4],

$$\delta_m(x, y) \geq 0.$$

Для того, щоб зв'язати біортогональний вейвлет-розклад і квазі-позитивні дельта-послідовності, перепишемо (1.1)

$$\begin{aligned} Q_m f(x) &= \sum_{n \in Z} (f, \tilde{\phi}_{m,n}) \phi_{m,n}(x) = \sum_{n \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \tilde{\phi}_{m,n}(y) \phi_{m,n}(x) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in Z} 2^m \phi(2^m x - n) \tilde{\phi}(2^m x - n) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} 2^m q(2^m x, 2^m y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, y) f(y) dy, \end{aligned}$$

$$\text{де } \delta_m(x, y) = \sum_{n \in Z} \tilde{\phi}(y - n) \phi(x - n),$$

$\delta_m(x, y)$ є розширенням дельта-послідовності $q(x, y)$,

$$\delta_m(x, y) = 2^m q(2^m x, 2^m y).$$

(3)

Метод підсумовування для видалення явища Гіббса

Нехай $\delta_m(x, y)$ - позитивна дельта-послідовність. Тоді з властивості позитивної дельта-послідовності випливає, що апроксимація з використанням $\delta_m(x, y)$ не показує явище Гіббса в будь-якій точці $x_0 \in R$. Для позитивної дельта-послідовності $\delta_m(x, y)$ виконується нерівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, y) h(y - x_0) dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, y) dy = 1,$$

де $h = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$ - функція Хевісайда.

Функція Хевісайда представляє собою функцію з ступінчастим розривом, а отже в для неї явище Гіббса буде проявлятися максимально.

Аналогічно, можна показати, що $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_m(x, y) h(y - x_0) dy \geq 0$ для всіх $x_0 \in R$,

тобто апроксимована функція за виконання цих умов не виходить за діапазон $[0, 1]$, що свідчить про відсутність явища Гіббса в будь-якій точці $x_0 \in R$.

Застосуємо метод підсумовування до частинної суми при біортогональному вейвлет-розкладанні.

$$Q_m f = \sum_{n \in Z} \tilde{b}_{m,n} \phi_{m,n} = \sum_{n \in Z} \tilde{b}_{0,n} \phi_{0,n} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n \in Z} \tilde{a}_{k,n} \psi_{k,n}, \quad (4)$$

$$\text{де } \tilde{b}_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\phi}_{m,n}(x) dx \text{ і } \tilde{a}_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\psi}_{m,n}(x) dx.$$

Явище Гіббса для певних біортогональних вейвлетів усувається, якщо замінити перетворення (4) частинною сумою

$$(Q_m f)(x) = \sum_{n \in Z} \tilde{b}_{0,n} \phi_{0,n} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n \in Z} \tilde{a}_{k,n} \psi_{k,n}$$

$$(Q_m^r f)(x) = \sum_{n \in Z} \tilde{b}_0 \phi_{0,n} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n \in Z} (1-r^{m-k}) \tilde{a}_{k,n} \psi_{k,n}, \quad (5)$$

де $r \in [0, 1)$ вибрана достатньо близько до 1.

Також $Q_m^r f$ можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} Q_m^r f &= \sum_{k=0}^m r^{m-k} Q_k f - \sum_{k=1}^m r^{m-k+1} Q_k f = \sum_{k=0}^m r^{m-k} Q_k f - \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k} Q_{k+1} f = Q_m f + \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k} (Q_k f - Q_{k+1} f) = \\ &= Q_m f + \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k} \sum_{n \in Z} -\tilde{a}_{k,n} \psi_{k,n} = Q_m^r f = \sum_{n \in Z} \tilde{b}_0 \phi_{0,n} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n \in Z} (1-r^{m-k}) \tilde{a}_{k,n} \psi_{k,n}. \end{aligned}$$

Кінцевий вираз буде

$$Q_m^r f = \sum_{n \in Z} \tilde{b}_0 \phi_{0,n} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n \in Z} (1-r^{m-k}) \tilde{a}_{k,n} \psi_{k,n}. \quad (6)$$

Якщо $\delta_m(x, y) = \sum_{n \in Z} \tilde{\phi}(y-n) \phi(x-n)$, то вираз (6) можна переписати

$$\delta_m^r(x, y) = r_m \delta_0(x, y) + \sum_{k=1}^m (r^{m-k} - r^{m-k+1}) \delta_k(x, y), \quad (7)$$

що означає, що ця сума також представляє собою дельта-послідовність, а отже зберігає всі її властивості.

Для апроксимації функції Хевісайда

$$(Q_m^r h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_m^r(x, y) h(y) dy. \quad (8)$$

Ця функція має властивість лінійності

$$(Q_m^r h)(2^{-m} x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^k q(2^k 2^{-m} x, 2^k y) h(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} q(2^{k-m} x, y) h(2^{-k} y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} q(2^{k-m} x, y) h(y) dy = (Q_0 h)(2^{k-m} x)$$

Для апроксимації функції Хевісайда введемо окреме позначення H_r . Ця функція наближається до функції Хевісайда при великій кількості членів суми

$$H_r(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (Q_m^r h)(2^{-m} x). \quad (9)$$

Чисельні експерименти

Для перевірки ефективності методу підсумовування (7) використаємо апроксимацію незміщеної функції Хевісайда з допомогою масштабуючих вейвлет-функцій Добеші. Проведемо порівняння методу підсумовування з схожим методом, який також використовує позитивні дельта-послідовності.

Метод використовує представлення у вигляді кінцевої суми з використанням масштабуючої функції ϕ

$$P_r(x) = \sum_{n \in Z} r^{|n|} \phi(x-n) \quad (10)$$

Як показано в [5], кореляційна функція цього методу, що забезпечує гладкість

$$k_r(x, y) = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \sum_{n \in Z} P_r(x-n) P_r(y-n), \quad (11)$$

створює позитивну дельта-послідовність

$$k_{r,m}(x, y) = 2^m k_r(2^m x, 2^m y), m \in Z. \quad (12)$$

Перед використанням методу потрібно вибрати параметр r . Для функції $P_{r,1}$

значення r слід вибрати якомога меншим, при цьому $P_{r_1}(x) > 0$ для всіх $x \in R$. Це гарантує швидкий спад $P_{r_1}(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Для 2φ рекомендоване значення $r_1 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$. Для 4φ і 8φ вибрані значення $r_1 = 0.28$ і $r_1 = 0.40$ [5].

При застосуванні методу підсумовування для зменшення розриву в точці 0, параметр r_2 слід вибрати якомога меншим, при цьому $H_{r_2}(x) < 1$ для $x > 0$ і $H_{r_2}(x) > 0$ для $x < 0$. Це усуває явище Гіббса, а край наближенні при 0 залишається настільки різким, як це можливо. Розраховані значення $r_2 = 0.54$ (2φ), $r_2 = 0.49$ (4φ), і $r_2 = 0.47$ (8φ). Для 2φ оптимальне значення $r_2 = 4 - 2\sqrt{3} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Наближення в V_0 для H_{r_2} і P_{r_1} показані для масштабованих функцій Добеші 2φ (рис.1), 4φ (рис.2) і 8φ (рис.3). H_{r_2} наближає різкі границі краще, амплітуда коливачь та викидів зменшується, але деякі коливання залишаються. Апроксимація P_{r_1} взагалі не містить викидів за межі $[0,1]$, в багатьох випадках зайві коливання зникають повністю, але дається ціною великого згладження функції, що часто спотворює початкову функцію сильніше, ніж явище Гіббса, тому даний метод має обмежене використання. Збільшення значення параметра за межі оптимального значення r_2 зменшує коливання в H_r , але деяка гострота краю втрачається, що в багатьох випадках небажано. У обробці зображень потрібно зберегти різкі перепади, щоб уникнути розмитості зображення та шуму на границі зон яскравостей. Коливання показані, як пульсації навколо границі перепаду.

$Q_0^r h(x)$ є ортогональна проекція функції Хевісайда на V_0 . При $m \rightarrow \infty$ (рис.4) $Q_m^r h(x)$ стає наближатись до стисненої версії H_r , функція стає щільніше, амплітуда залишкових коливачь стає пропорційно меншою в 2^m раз.

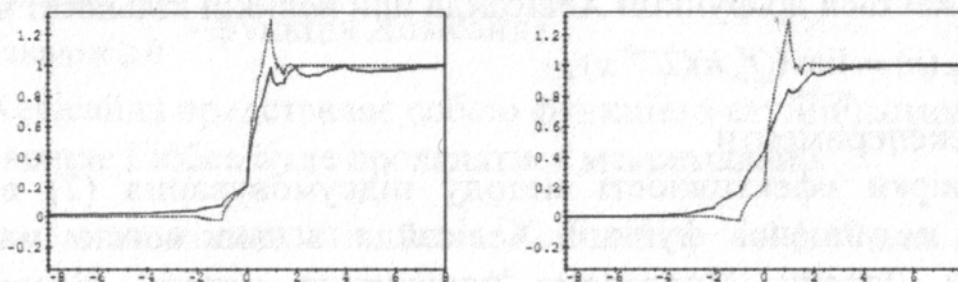


Рис. 1. Апроксимація $H_{0.54}(x)$ (зліва) і з $P_{0.27}(x)$ (справа) для V_0 для функції Добеші 2φ . Пунктирна лінія-ортогональна проекція на V_0 .

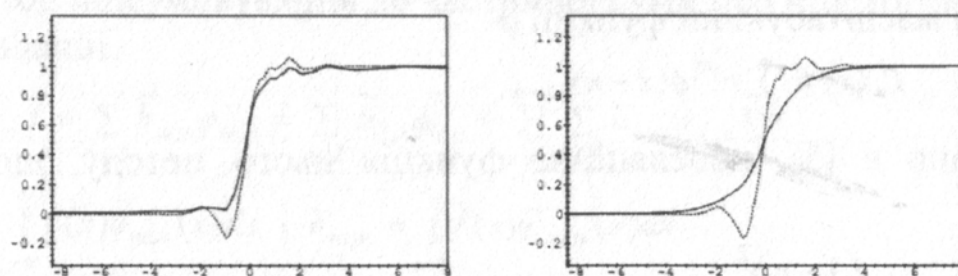


Рис. 2. Апроксимація $H_{0.49}(x)$ і $P_{0.28}(x)$ для V_0 з використанням функції Добеші 4φ . Пунктирна лінія-ортогональна проекція на V_0 .

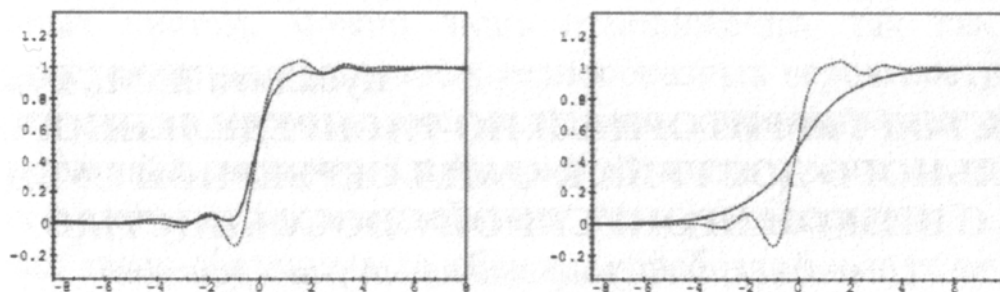


Рис. 3. Апроксимація $H_{0.47}(x)$ і $P_{0.40}(x)$ для V_0 з використанням функції Добеші 8ϕ . Пунктирна лінія-ортогональна проекція на V_0 .

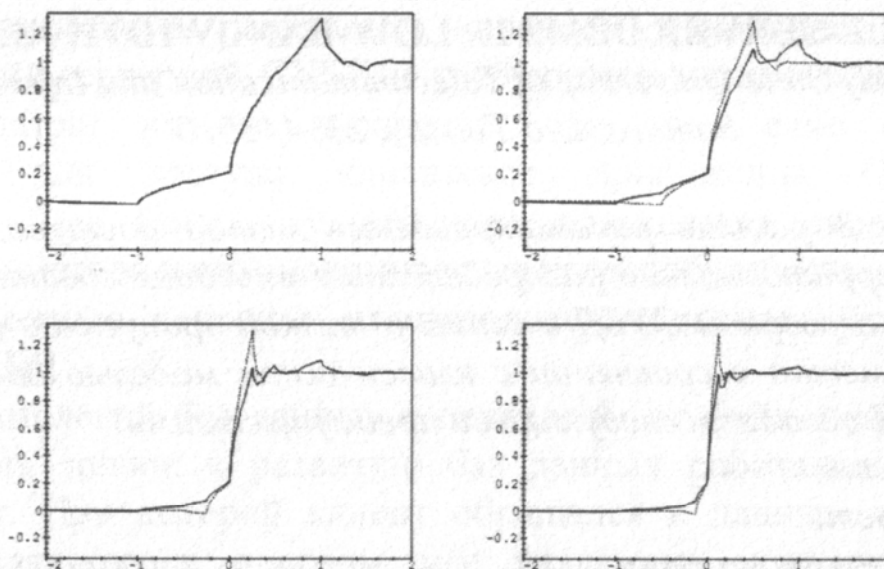


Рис. 4. $Q^{0.54} h(x)$ і ортогональна проекція $Q_m h(x)$ (пунктирна лінія), $m=0,1,2,3$ для масштабуючої функції 2ϕ .

Висновки

Запропонований метод підсумовування дозволяє зменшити явище Гіббса в функціях з різким перепадом, що дозволяє покращити якість стиснення інформації та швидкість передавання, кодування і декодування даних з використанням вейвлет-перетворень при обробці сигналів та зображень. Хоча явище Гіббса не усувається повністю, амплітуда небажаних коливань та викидів функції значно зменшується.

Література:

1. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. - М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.
2. Явление Гиббса – МС [Електронний ресурс] / Булыгин В.С. – Режим доступу: – Режим доступу: http://www.it-centre.ru/News/28_05_2002.html
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: РХД, 2001. — 464 с.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. — 176 с.
5. S. E. Kelly. Gibbs phenomenon for wavelets. APPL. COMP. HARMON. ANAL., 3:72-81, 1996.

Стаття відправлена: 5.12.2013

© Кулик Я.А., Кветний Р.Н.