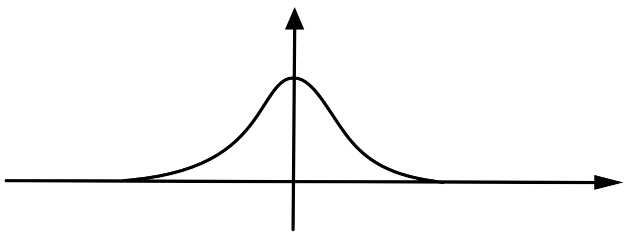
Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко, М.Б. Ковальчук

ТЕОРІЯ РЯДІВ



$$f\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int\limits_{0}^{+\infty} e^{\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\cos\omega x d\omega$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко, М.Б. Ковальчук

ТЕОРІЯ РЯДІВ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник студентів технічних спеціальностей. Протокол № 6 від 29 листопада 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 517.5.52(075.8)
С 22

Рецензенти:

В.С. Осадчук, доктор технічних наук, професор
В.П. Кожем'яко, доктор технічних наук, професор
Л.Ф. Михайленко, кандидат педагогічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І., Ковальчук М.Б.
С 22 **Теорія рядів.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008. -138 с.

В посібнику розглянуто основні поняття і теореми теорії рядів. Наведена достатня кількість прикладів та задач, в тому числі і прикладного характеру, які вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі і легко сприймаються. Істотною особливістю даного посібника є детальний розгляд комплексної форми ряду Фур'є, узагальненого ряду Фур'є та інтегралу Фур'є в комплексній формі. Як додатки розглянуто використання системи Maple та прикладного пакету Mathcad при розвиненні в ряд Тейлора.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто 40 варіантів завдань для самостійної роботи.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.5.52(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теорія рядів є теоретичною основою таких фундаментальних курсів, як «Теоретичні основи електротехніки», «Теоретичні основи радіотехніки», «Рівняння математичної фізики» й ін. Це робить актуальним створення нових навчальних посібників з теорії рядів.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці курсу теорії рядів для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв’язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі і фізичного змісту), які наводяться з розв’язуванням, та задачами для самостійної роботи. Задачі з розв’язанням розглядаються протягом всього викладання навчального матеріалу. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми.

Посібник складається з трьох розділів. В першому розділі розглядаються поняття числового ряду, ознаки його збіжності, властивості числових рядів. В другому розділі розглядаються поняття функціонального ряду, зокрема степеневого, збіжності функціональних рядів, включаючи рівномірну збіжність, властивості абсолютно збіжних рядів. Тут також розглянуто застосування степеневих рядів, а саме рядів Тейлора до наближених обчислень. В третьому розділі розглядаються ряди Фур'є за тригонометричною системою та їх застосування; введено поняття інтеграла Фур'є та показано його застосування до задач радіотехніки.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

ТЕМА 1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

При розв'язуванні багатьох задач математики з'являється необхідність розглядати суми, які складаються з нескінченної множини доданків. З теорії дійсних чисел відомо, що означає сума будь-якої скінченної множини чисел. Задача додавання нескінченної множини деяких однотипних об'єктів (чисел, функцій і т.п.) постійно зустрічається в математиці.

Вже в шкільному курсі математики доводиться мати справу з виразами, що містять нескінченну множину доданків. Справді, перетворюючи звичайний дріб у десятковий, ми пишемо

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots.$$

1.1 Поняття числового ряду. Збіжні і розбіжні ряди

Нехай задана числова послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Числовим рядом називають вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{1.1}$$

де числа $a_1, a_2, \ldots$ називають його членами, a_n - загальним членом ряду.

Суму n перших членів ряду (1.1):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.2}$$

називають *n -ю частинною сумою ряду (1.1).*

Коли n набуває значення 1, 2, 3, ... , одержимо послідовність частинних сум

$$S_1, S_2 \ldots, S_n \ldots \tag{1.3}$$

У вище наведеному прикладі

$$S_1 = \frac{3}{10}, \quad S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}, \quad S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{100},$$

причому із збільшенням індексу ці частинні суми все менше будуть відрізнятися від числа $\frac{1}{3}$, точніше число $\frac{1}{3}$ є границею цих частинних сум. А тому природним стає таке важливе означення.

Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум (1.3) ряду (1.1), то цю границю називають сумою ряду (1.1) і записують

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1.4}$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \tag{1.5}$$

Ряд, який має суму, називається *збіжним*.

У випадку, коли границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, ряд називають *розбіжним*.

Приклад 1.1 Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Розв'язування

Подамо його частинну суму у вигляді, зручному для граничного переходу:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$ і

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots.$$

Теорема 1.1 (необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член a_n прямує до нуля при $n \to\infty$.

Доведення

Оскільки числовий ряд збіжний, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \text{ і } a_n = S_n - S_{n-1},$$

тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Зауваження. Дана ознака використовується тільки для встановлення розбіжності ряду.

Приклад 1.2 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1} = \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \ldots$

Розв'язування

Оскільки границя загального члена цього ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{100+\frac{1}{n}} = \frac{1}{100} \neq 0$$

відмінна від нуля, то цей ряд є розбіжним.

Теорема 1.2 Ряд, складений з членів геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (a \neq 0) \qquad (1.6)$$

збіжний до $\frac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$.

Доведення

Дійсно, нехай $|q| \geq 1$. Тоді загальний член ряду $|aq^{n-1}| \geq 1$ і ряд (1.6) є розбіжним.

Нехай тепер $|q|<1$. Але при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad (1.7)$$

називають *гармонічним.* Для нього, очевидно, виконується необхідна ознака збіжності: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Доведемо, що він є розбіжним. Справді, відомо, що $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Звідси $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ або $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$. Додаючи нерівності, які одержимо звідси при n = 1, 2, 3, ..., k, дістанемо

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{k}[\ln(n+1) - \ln n] = \ln(k+1).$$

Оскільки $ln(k+1)\to\infty$ при $k\to +\infty$, то й поготів $S_k\to+\infty$, тобто гармонічний ряд розбіжний.

1.2 Найпростіші властивості збіжних рядів

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то різницю $r_n = S - S_n$ між його сумою і частинною сумою називають залишком даного ряду.

З означення збіжності випливає, що $r\to 0$ ($n\to\infty$). Залишок r_n збіжного ряду є величина нескінченно мала при $n\to\infty$ (розбіжний ряд залишку не має). Оскільки

$$S = a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots,\quad S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

то

$$r_n = S - S_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

Теорема 1.3 Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$ також збігається і має суму cS.

Доведення

Нехай S_n - частинна сума даного ряду, тоді $S_n\to S$ і $cS_n\to cS$. Але cS_n - частинна сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$, тому $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n = cS$.

Зауваження. Записавши останню рівність у вигляді $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ переконуємося, що правило винесення спільного множника за дужку переноситься і на нескінченні ряди.

Якщо ж ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то й ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$ при $c \neq 0$ також розбіжний, бо в протилежному випадку множенням його на $\frac{1}{c}$ дістали б за доведеним збіжний ряд, а це суперечить умові.

Теорема 1.4 Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ збіжні і мають відповідно суми S і σ, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається і має суму $S+\sigma$.

Доведення

Якщо S_n *і* σ_n — частинні суми рядів $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ і за умовою $S_n \to S$, $\sigma_n \to \sigma$, то $S_n + \sigma_n \to S + \sigma$. Оскільки $S_n + \sigma_n$ частинна сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + \sigma$.

Зауваження. Збіжні ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ можна почленно віднімати, оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ є сумою двох збіжних рядів $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} (-b_n)$.

Теорема 1.5 Сума збіжного і розбіжного ряду є ряд розбіжний.

Доведення

Нехай ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ збіжний, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ розбіжний. Припустивши збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, дістанемо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ збіжний як різниця двох збіжних рядів $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ і $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, а це суперечить умові.

Теорема 1.6 Якщо, починаючи з деякого *n*, члени рядів $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ рівні між собою і один з цих рядів збіжний, то збіжний і другий.

Наслідок. Якщо в довільному ряді дописати, відкинути або змінити скінченне число членів, то збіжність чи розбіжність від цього не зміниться.

Теорема 1.7 Якщо у збіжному ряді довільним чином згрупувати його члени, зберігаючи порядок їх слідування, то новоутворений ряд збігається до тієї ж самої суми.

1.3 Додатні ряди. Ознаки збіжності

Тепер розглянемо ряди, всі члени яких є невід'ємні числа. За традицією їх називають *рядами з додатними членами*, або додатними рядами.

Теорема 1.8 Для того щоб додатний ряд збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була обмежена зверху.

Доведення

Необхідність. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, де всі $a_n \geq 0$, збіжний, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Звідки випливає, що $S_n \leq S$, тобто послідовність частинних сум S_n обмежена зверху.

Достатність. Оскільки послідовність частинних сум додатного ряду є неспадною, то для збіжності цієї послідовності достатньо, щоб вона була обмежена зверху.

Приклад 1.3 Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язування

Даний ряд розбіжний, бо його частинна сума

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{n}$$

не обмежена зверху.

Теорема 1.9 (перша ознака порівняння). Якщо для членів додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1.9}$$

виконуються нерівності $a_n \leq b_n$ для всіх n, починаючи з деякого, то із збіжності ряду (1.9) випливає збіжність ряду (1.8), а з розбіжності ряду (1.8) випливає розбіжність ряду (1.9).

Доведення

Нехай S_n і σ_n - частинні суми рядів (1.8) і (1.9), тоді справедливі нерівності $S_n \leq \sigma_n$.

Припустимо, що ряд (1.9) збіжний. Тоді послідовність $\{\sigma_n\}$, згідно з теоремою 1.8, обмежена зверху, а, отже, обмежена і послідовність частинних сум $\{S_n\}$, тому за теоремою 1.8 ряд (1.8) збіжний.

Нехай ряд (1.8) розбіжний. Тоді і ряд (1.9) розбіжний, бо якби останній був збіжним, то за доведеним вище і ряд (1.8) збіжний.

Приклад 1.4 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\ldots$$

Розв'язування

Зауважуємо, що

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\frac{n}{2n}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Оскільки кожен член даного додатного ряду менший відповідного члена збіжної геометричної прогресії із знаменником $q=\frac{1}{2}<1$, то вихідний ряд також збіжний.

Приклад 1.5 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Розв'язування

Оскільки $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$ розбіжний, то розбіжний і даний ряд.

Теорема 1.10 (друга ознака порівняння). Якщо для додатних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ існує скінченна додатна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

Доведення

Яке б не було число $k>0$, то знайдуться додатні числа p і q такі, що $p<k<q$. Внаслідок умови $\frac{a_n}{b_n}\to k$ для всіх n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $p<\frac{a_n}{b_n}<q$ або $pb_n<a_n<qb_n$.

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}qb_n$. Внаслідок нерівності $a_n < qb_n$, за теоремою 1.9, збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Коли ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} pb_n$. Внаслідок нерівності $pb_n < a_n$, за теоремою 1.9, розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1.6 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$.

Розв'язування

Доцільно порівняти даний ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1 > 0$$

(бо за правилом Лопіталя $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0$) і за теоремою 1.10 даний ряд також збіжний.

Приклад 1.7 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

Розв'язування

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 > 0,$$

бо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. За теоремою 1.10 даний ряд є розбіжним.

Теорема 1.11 (ознака Д'Аламбера). Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \ge 0, \tag{1.10}$$

то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ - розбіжний.

Доведення

Нехай $l<1$. Тоді знайдеться додатне число q таке, що $l<q<1$. Внаслідок рівності (1.10) для всіх значень n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, а тому

$$a_{n+1}<a_n q,\quad a_{n+2}<a_{n+1}q<a_n q^2\quad a_{n+3}<a_{n+2}q<a_n q^3,\ldots, \qquad (1.11)$$

тобто члени додатного ряду

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots \qquad (1.12)$$

не перевищують відповідних членів додатного ряду

$$a_n q\ +a_n q^2+a_n q^3+\ldots \qquad (1.13)$$

Оскільки ряд (1.13) збіжний, як геометрична прогресія із знаменником $q<1$, то ряд (1.12), а з ним і даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, також збіжний.

Якщо $l>1$, то внаслідок умови (1.10) для всіх значень n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ або $a_n<a_{n+1}$. Звідси випливає, що загальний член ряду не прямує до нуля при $n\to\infty$, і тому ряд буде розбіжним.

Приклад 1.8 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

Розв'язування

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0<1,$$

то за ознакою Д'Аламбера даний ряд збіжний.

Приклад 1.9 Довести збіжність ряду $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

Доведення

Маємо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

Границя цього відношення дорівнює 1/2, тобто за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

Зазначимо, що ознаку Д'Аламбера не можна застосовувати при $l=1$.

Наприклад, для кожного з рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. При цьому перший ряд розбіжний, а другий збіжний, оскільки $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n+1)}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ – збіжний (див. приклад 1.1).

Теорема 1.11 (гранична ознака Коші). Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l, \tag{1.14}$$

то при $l<1$ даний ряд збіжний, а при $l>1$ - розбіжний.

Доведення

Нехай $l<1$. Тоді знайдеться число $q>0$ таке, що $l<q<1$. Внаслідок рівності (1.14) для всіх n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $\sqrt[n]{a_n}<q$, тому

$$a_n<q^n, a_{n+1}<q^{n+1}, a_{n+2}<q^{n+2}, \ldots .$$

Тобто члени ряду $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ не перевищують відповідних членів збіжної геометричної прогресії $q^n+q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots$ Отже даний ряд збіжний.

Якщо $l>1$, то внаслідок рівності (1.14), починаючи з деякого n, матимемо $\sqrt[n]{a_n}>1$ або $a_n>1$. Звідси випливає, що a_n не прямує до 0 при $n\to\infty$ і, отже, даний ряд розбіжний.

Приклад 1.10 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв'язування

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

то за ознакою Коші даний ряд збіжний.

Приклад 1.11 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язування

Для даного ряду

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

тому питання про його збіжність ознакою Коші не вирішується. Зрозуміло, що цей ряд розбіжний, бо не виконується необхідна ознака збіжності:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\neq 0.$$

Теорема 1.12 (інтегральна ознака Коші-Маклорена). Якщо $f(x)$-невід'ємна і незростаюча функція на проміжку $[1;+\infty]$, то ряд

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \tag{1.15}$$

і невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx \tag{1.16}$$

або обидва збіжні або обидва розбіжні.

Доведення

Оскільки функція *f(x)* незростаюча, то при $k\le x\le k+1$ матимемо $f(k+1)\le f(x)\le f(k)$. Функція $f(x)$ монотонна та інтегровна на відрізку $[k;k+1]$. Почленне інтегрування цих нерівностей у межах від k *до* $k+1$ дає

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)\le f(k). \tag{1.17}$$

Приймаючи в цих нерівностях $k=1,2,\ldots,n-1$ і додаючи почленно, дістанемо

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\le\int_1^n f(x)dx\le f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1).$$

Якщо S_n- частинна сума ряду (1.15), то останні нерівності можна переписати так

$$S_n-f(1)\le\int_1^n f(x)dx\le S_{n-1}$$

і звідки

$$S_n\le f(1)\le\int_1^n f(x)dx, \tag{1.18}$$

$$S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx. \qquad (1.19)$$

Зауважимо, що послідовність $\left\{ \int_1^n f(x)dx \right\}$ неспадна. Справді,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^n f(x)dx + \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

бо $f(x) \geq 0$.

Нехай невласний інтеграл (1.16) збіжний. Це означає, що існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = L, \text{ причому } \int_1^n f(x)dx \leq L.$$

З нерівності (1.18) одержуємо $S_n \leq f(x) + L$, тобто частинні суми додатного ряду (1.15) обмежені зверху, і тому ряд (1.15) збіжний.

Нехай тепер невласний інтеграл (1.16) розбіжний. Це означає, що $\int_1^n f(x)dx \to +\infty$ при $n \to \infty$, а тоді з нерівності (1.19) випливає, що й $S_{n-1} \to +\infty$, тобто ряд (1.15) розбіжний.

Зауваження. Теорема залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ має вказані властивості для $x \geq m$. В ній потрібно лише замінити $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *і* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ відповідно на $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ *і* $\int_m^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 1.13 Довести, що узагальнений гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

збіжний при $\alpha > 1$, і розбіжний при $\alpha \leq 1$.

Доведення

Зауважимо, що члени цього ряду є значеннями функції $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ при $x = 1,2,3,\ldots$. При $\alpha > 0$ ця функція додатна і спадна на проміжку $[1;+\infty]$.

Як відомо, невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, *де* $\alpha > 0$, збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \le 1$. Тому за інтегральною ознакою Коші даний ряд збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $0 < \alpha \le 1$. Якщо ж $\alpha \le 0$, то розбіжність ряду очевидна, бо в цьому випадку загальний член $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ не прямує до нуля.

Приклад 1.14 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Розв'язування

Очевидно, що члени цього ряду є значеннями функції $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ при $x = 2, 3, ..., n, ...$. Ця функція додатна і спадна на проміжку $[2;+\infty]$. Користуючись означенням, дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} [\ln \ln x]_2^b = \lim_{b \to +\infty} [\ln \ln b - \ln \ln 2] = +\infty .$$

Оскільки цей інтеграл розбіжний, то за інтегральною ознакою Коші розбіжним є і даний ряд.

1.4 Ряди з довільними членами. Знакозмінні ряди

Розглянемо ряди, членами яких можуть бути як додатні, так і від'ємні числа.

Ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.20}$$

називають *абсолютно збіжним,* якщо збіжним є відповідний ряд абсолютних значень членів ряду (1.20)

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{1.21}$$

Зауваження Очевидно, що для додатних рядів поняття збіжності і абсолютної збіжності збігаються.

Теорема 1.13 Якщо ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду, збіжний, то збіжним буде і даний ряд.

Доведення

Твердження теореми відразу випливає із загального принципу збіжності, якщо скористатися нерівністю

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+...+a_{n+p}\right| \le \left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\left|a_{n+3}\right|+...+\left|a_{n+p}\right|.$$

Приклад 1.15 Перевірити, чи буде ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ абсолютно збіжним.

Розв'язування

Даний ряд є абсолютно збіжним, бо збіжним є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|.$$

Теорема 1.14 Для того, щоб ряд був абсолютно збіжним, необхідно і достатньо, щоб його можна було подати у вигляді різниці двох збіжних додатних рядів.

Доведення

Необхідність. За умовою ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збіжний. Зауважимо, що $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$, тому збіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$. Оскільки $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Достатність. Нехай $a_n = b_n - c_n$, де $b_n, c_n \ge 0$, і ряди $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збіжні. Оскільки $|a_n| = |b_n - c_n| \le b_n + c_n$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n + c_n)$ збіжний, то збіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний абсолютно.

*Зауваження 1.*При дослідженні ряду на абсолютну збіжність застосовують достатні ознаки збіжності додатних рядів до відповідного ряду абсолютних величин.

2. Із розбіжності ряду абсолютних величин ще не можна робити висновок про збіжність чи розбіжність даного ряду. Однак коли до ряду абсолютних величин застосовано ознаку Д'Аламбера або Коші і виявлено його розбіжність, то розбіжним є і даний ряд, бо в цьому випадку порушується необхідна умова збіжності.

Ряд (1.20) називають *умовно збіжним*, якщо він збіжний, а відповідний ряд абсолютних величин членів даного ряду (1.21) розбіжний.

Приклад 1.16 Дослідити на збіжність ряд

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+...$$

Розв'язування

Даний ряд збіжний, бо

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_1=1,\ S_2=0,\ \ldots,\ S_{2n}=0,\ S_{2n+1}=\frac{1}{n+1},\ \ldots$$

і тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=0$. Однак цей ряд не є абсолютно збіжним, бо ряд

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...$$

розбіжний. Справді, маємо

$$S_{2n}=2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...).$$

Оскільки вираз у дужках є $n-$ю частинною сумою гармонічного ряду, то $S_{2n}\to+\infty$ при $n\to\infty$.

Серед рядів з довільними членами велике значення мають *знакозмінні ряди*, тобто ряди, *знаки членів в яких чергуються*. Вважаючи перший член додатним, знакозмінний ряд можна записати у вигляді

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n-1}a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,. \tag{1.22}$$

Достатні умови збіжності цих рядів дає така теорема.

Теорема 1.14 (ознака Лейбніца). Якщо члени знакозмінного ряду (1.22) прямують до нуля і абсолютні величини їх не зростають, то такий ряд збіжний.

Доведення

Очевидно, що

$$S_{n+p} - S_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + ... + (-1)^{p-1} a_{n+p}).$$

Якщо n - парне, то

$$S_{n+p} - S_n \le a_{n+1},$$

бо

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + (-a_{n+2} + a_{n+3}) + (-a_{n+4} + a_{n+5}) + ...,$$

а вирази в дужках недодатні.

Зауважимо, що $0 \le S_{n+p} - S_n$, бо

$$S_{n+p} - S_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (a_{n+5} - a_{n+6}) + ...,$$

а вирази в дужках невід'ємні.

Аналогічно можна показати, що коли n - непарне, то

$$-a_{n+1} \le S_{n+p} - S_n \le 0.$$

Отже, для кожних натуральних n та p маємо

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| \le a_{n+1}. \tag{1.23}$$

Оскільки $a_n \to 0$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число n_0 таке, що $a_n < \varepsilon$ при будь-якому $n > n_0$ справедлива нерівність $\left| S_{n+p} - S_n \right| \le \varepsilon$. За критерієм Коші даний ряд збіжний.

Наслідок. Абсолютна похибка, яка одержується від заміни суми знакозмінного ряду (1.22) його n-ю частинною сумою, не перевищує абсолютної величини першого з відкинених членів ряду.

Приклад 1.17 Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + ...$$

Розв'язування

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 0$ і $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \ge \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(n+1)^2}$, то за ознакою Лейбніца даний ряд буде збіжним.

1.5 Властивості абсолютно збіжних рядів

Теорема 1.15 Якщо ряд збіжний абсолютно, то ряд, одержаний з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збіжний і має ту саму суму.

Зауваження. Зазначимо, що ця теорема не має місця у випадку умовно збіжних рядів.

Теорема 1.16 (Рімана) Якщо ряд збіжний умовно, то в результаті перестановки його членів можна одержати ряд, який має наперед задану суму, а також розбіжний ряд.

Теорема 1.17 Якщо абсолютно збіжні ряди

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$$

мають відповідно суми S і σ, то ряд, складений з усіх добутків вигляду $a_i b_k (i, k = 1,2,3,...)$, занумерованих у будь-якому порядку, також абсолютно збіжний і має суму $S\sigma$.

На практиці добуток рядів зручно записувати у вигляді

$$a_1 b_1 + (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + ..., \tag{1.24}$$

де спочатку записано член, сума індексів якого дорівнює 2, потім - всі члени, сума індексів яких дорівнює 3 і т.д.

1.6 Розв'язування задач із використанням ознак збіжності рядів

Приклад 1.18 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$.

Розв'язування

Використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 5} = 1,$$

за теоремою 1.10 даний ряд також збіжний.

Приклад 1.19 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{n}\right)^4$.

Розв'язування

Використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(arctg\frac{1}{n}\right)^4}{\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{arctg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^4=1,$$

за теоремою 1.10 даний ряд також збіжний.

Приклад 1.20 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$.

Розв'язування

Використаємо ознаку Д'Аламбера (теорема 1.11).

$$a_n=\frac{(n+1)!}{3^n},\ a_{n+1}=\frac{(n+2)!}{3^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot 3^n}{(n+1)!\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+2)}{(n+1)!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty>1\cdot$$

За ознакою Д'Аламбера даний ряд розбіжний.

Приклад 1.21 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Застосуємо інтегральну ознаку Коші (теорема 1.12). Функція

$f(x)=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ невід'ємна та незростаюча на проміжку $[1,+\infty)$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{x}}\Big|_{1}^{b}\right)=$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}-\frac{1}{e^{\sqrt{1}}}\right)=-2\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}+2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}.$$

Оскільки невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ збіжний, то за інтегральною ознакою Коші буде збіжним і даний ряд.

Приклад 1.22 Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Для дослідження на абсолютну збіжність розглянемо ряд з модулів членів даного ряду. Цей ряд такий

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};$$

він є розбіжним як узагальнений гармонічний ряд з $\alpha=\frac{1}{2}<1$. Такий результат означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ не збіжний абсолютно.

Перевіримо умовну збіжність. Члени даного ряду монотонно спадають за абсолютною величиною і загальний член цього ряду прямує до нуля $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$. За ознакою Лейбніца (теорема 1.14) даний ряд збіжний.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ умовно збіжний.

Питання для самоперевірки

1. Що називається числовим рядом, частинною сумою ряду, сумою ряду? Який ряд називається збіжним і який розбіжним?

2. В чому полягає необхідна умова збіжності ряду? Доведіть відповідну теорему.

3. Дослідіть питання збіжності ряду, складеного з членів геометричної прогресії.

4. Доведіть розбіжність гармонічного ряду.

5. Що таке залишок ряду? Як зв'язані між собою сума ряду, частинна сума і залишок ряду?

6. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне множення ряду на число.

7. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне додавання рядів.

8. Доведіть, що сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.

9. Доведіть сполучну властивість збіжних рядів.

10. В чому полягає необхідна і достатня умова збіжності числового ряду?

11. Який ряд називають додатним? Сформулюйте і доведіть необхідну і достатню умову збіжності додатного ряду.

12. Сформулюйте і доведіть ознаки збіжності і розбіжності додатних рядів за допомогою порівняння їх загальних членів.

13. Сформулюйте і доведіть ознаку Д'Аламбера.

14. Сформулюйте і доведіть ознаку Коші.

15. Сформулюйте і доведіть інтегральну ознаку збіжності.

16. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

17. Який ряд називають абсолютно збіжним? Сформулюйте достатню умову абсолютної збіжності ряду.

18. Сформулюйте теорему про можливість подання абсолютно збіжного ряду у вигляді різниці збіжних додатних рядів.

19. Як досліджують ряди на абсолютну та умовну збіжність?

20. Який ряд називається знакозмінним? Сформулюйте ознаку Лейбніца.

Завдання для самостійної роботи

Завдання1.1 Дослідити на збіжність ряди

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+2)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{2^{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n)!}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ldots\cdot 14n}{n!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{3n+2}}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{4^{3n-1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}3^n tg\frac{1}{5^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)!}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{20}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n+1}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot n!}{5^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(3n+1)^n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{\text{n}}}$

$\sum_{\text{n}=1}^{\infty}\frac{5^{\text{2n-1}}}{3^{\text{4n+1}}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(5n+1)^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln\ (n^2+5)}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{2n^2+5n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{5^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n^2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+1)^{3n}}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+3}}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{\sqrt{n^3}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)^{3n}}$ $\quad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^2(n+1)}}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n\cdot(n+1)!}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln(n^2+9)}{n^2+9}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}+4}{n^2+5n+3}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}arctg\frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{16\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{2n+7}\right)^n$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{60}}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n^3})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2n^{\mathrm{n}}}}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\;(3n+5)}{n^4+3n+7}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\ln^3(n^2+3))}{n^2+3}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{n^2+6n+2}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\frac{\pi}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt[3]{n^5(n^3+1)}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{\mathrm{n}^2}})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{n^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{2n+3}}}{\sqrt{2n+3}}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+3}{9n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right)^{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\cdot...\cdot(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\cdot...\cdot(4n+2)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(2n+1)^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arcsin\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12n^3+3n+1}{\sqrt[3]{n^2}(n^4+2)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n^5}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot...\cdot(4n-3)}{2^n\cdot n!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^5(n+1)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2+2n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n}(n^2+6}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)3^n}{n\,!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^6(n+3)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+4}$ $\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\cos\frac{\pi}{n^2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(3n+2)5^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-2n^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+11}{2n^2+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{3^{4n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+5n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)\cdot n^n}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n(2n+1)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+5}$ $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

33. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{5\mathrm{n}+1}{(3\mathrm{n}^2+1)\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{n^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{n}}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}}{\sqrt{n}}$;

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mathrm{n}^3}(1-\cos\frac{1}{n^2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\ !}{(n+3)n^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\ +2)\ln^3(n\ +2)}$;

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n\ -1}{3n\ +4}$ $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot6\cdot11\cdot...\cdot(5n-4)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n+1)}{n^3+5}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{2}{n^2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\cdot2^n}{(n+1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$;

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+4n}$ $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}2n\sin\frac{1}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\ \frac{1}{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{1\cdot4\cdot7\cdot...\cdot(3n-2)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\ +1}{2n\ -1}\right)^{\mathrm{n}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n\ -4)(4n-1)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!}$ $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$;

Завдання 1.2 Дослідити на абсолютну чи умовну збіжність ряд

1. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$

2. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{3^n}$

3. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$

4. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n^3+3}$

5. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+5}}$

6. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ (2n+1)}$

7. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ +2}$

8. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2+1}$

9. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot arctg\frac{1}{n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{(-1)^n}{n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

12. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+1)}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(3n-1)}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\sin^2 n}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n^2+1}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2+1}$

22. $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{n\sqrt{n+1}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(2n-1)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(3n+4)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+n+1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+n+1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+n+5}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot arctg \frac{1}{n^2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot arctg \frac{1}{\sqrt{n}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n}}{n^2+3}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^3+1}}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^4+1}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^5+1}}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln(1+\frac{1}{n})$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln(1+\frac{1}{n^2})$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln(1+\frac{1}{n+1})$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{\sqrt{n^2+3}}$

ТЕМА 2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1 Поняття функціонального ряду і області його збіжності. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Властивості рівномірно збіжних рядів

Нехай маємо деяку послідовність функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... , $f_n(x)$,…, що визначені на деякій множині E $\in$ R. Тоді вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (2.1)$$

називають *функціональним рядом.* При цьому функцію $f_n(x)$ називають *загальним членом ряду.*

Якщо взяти довільне значення x_0 аргументу x і підставити його у ряд (2.1), то одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots \qquad (2.2)$$

Функціональний ряд (2.1) називають збіжним в точці $x_0 \in$ E, якщо збіжний відповідний числовий ряд (2.2).

Оскільки x може приймати нескінченну множину значень, то з даним функціональним рядом буде пов'язано нескінченну множину числових рядів. Деякі з них є збіжними, деякі – розбіжними.

Множина тих значень аргументу x, для яких функціональний ряд (2.1) збіжний, називається *областю збіжності* цього ряду.

Приклад 2.1 Областю збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

є інтервал (-1; 1).

Приклад 2.2 Областю збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n = 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^{n-1} + \ldots$$

є тільки одна точка $x = 0$.
Приклад 2.3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{|x|}}{n} = \frac{e^{|x|}}{1} + \frac{e^{|x|}}{2} + \frac{e^{|x|}}{3} + \ldots + \frac{e^{|x|}}{n} + \ldots$$

розбіжний в усіх точках числової прямої, бо $\frac{e^{|x|}}{n} \ge \frac{1}{n}$ при будь-якому x, а гармонічний ряд – розбіжний.

Оскільки збіжність функціонального ряду на проміжку означає, що для кожного x з цього проміжку збіжний відповідний числовий ряд, то для дослідження на збіжність функціональних рядів можна використати ознаки збіжності числових рядів.
Приклад 2.4 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Розв'язування

Застосуємо ознаку Д'Аламбера до ряду модулів його членів, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

для довільного x. Це означає, що областю збіжності даного ряду є вся числова вісь.

Нехай областю збіжності функціонального ряду (2.1) є деяка множина точок E ($x \in E$). Тоді сума цього ряду S є функцією від x, $S=S(x)$, областю існування якої є множина E.

Суму n перших членів ряду (2.1) називають *n-ю частинною сумою*, тобто

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x). \tag{2.3}$$

Залишком ряду (2.1) називається ряд

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+k}(x) + \ldots, \tag{2.4}$$

причому $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Зауваження. Функціональний ряд (2.1) називають збіжним на множині *E*, якщо для будь-якого ε > 0 і для кожного $x \in$ E існує натуральне число *N*(ε, *x*) таке, що для всіх $n >$ *N*(ε, *x*) справедлива нерівність

$$\left|r_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Функціональний ряд (2.1) називають *рівномірно збіжним* на множині *E*, якщо для всіх точок $x \in E$ і для будь-якого ε>0 існує натуральне число *N*(ε) таке, що при n > *N*(ε) виконується нерівність (2.5).

Теорема 2.1 (ознака Вейєштрасса, достатня умова рівномірної збіжності функціонального ряду). Якщо на множині E члени функціонального ряду (2.1) за модулем не перевищують відповідні члени збіжного числового додатного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ , \tag{2.6}$$

то функціональний ряд (2.1) на множині E збіжний рівномірно.

Приклад 2.5 Довести, що функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^{n-1}} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^{n-1}} + \ldots$$

збіжний рівномірно для всіх $x \in$ R.

Доведення

Для всіх $x \in R$ члени даного функціонального ряду задовольняють нерівність

$$\left|\frac{\sin nx}{2^{n-1}}\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2...$$

Складемо додатний числовий ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^{N-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{N-1}} + \ldots$$

Цей ряд збіжний як геометрична прогресія, знаменник якої $q = \dfrac{1}{2} < 1$.

Тому, згідно з ознакою Вейєрштрасса, даний ряд збіжний рівномірно на всій числовій осі.

Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Якщо члени функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$$

неперервні на відрізку [$a;b$] і ряд збіжний рівномірно на ньому, то сума даного функціонального ряду є неперервною на відрізку[$a;b$]

2. Рівномірно збіжний на відрізку [$a;b$] функціональний ряд (2.1), складений з неперервних функцій, можна на цьому відрізку почленно інтегрувати, тобто має місце рівність

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

3. Якщо члени ряду (2.1) є функції, неперервні на відрізку [$a; b$] разом з похідними першого порядку $f_n^{'}(x) \quad (n = 1,2,...)$, і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x) = f_1^{'}(x) + f_2^{'}(x) + ... + f_n^{'}(x) + ...$$

на відрізку [$a;b$] рівномірно збіжний, а ряд (2.1) збіжний на відрізку [$a;b$], то сума даного ряду є функція, диференційовна на цьому відрізку і похідна від неї дорівнює

$$S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x) = f_1^{'}(x) + f_2^{'}(x) + ... + f_n^{'}(x) + ...$$

2.2 Степеневі ряди. Теорема Абеля

Степеневим рядом називаються функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad (2.7)$$

де $a_0, a_1,.., a_n,...$ - дійсні числа, які називаються коефіцієнтами степеневого ряду, x_0 - довільне фіксоване дійсне число.

Вважають, що функція $f(x)$, визначена в проміжку $(x_0 – R,\ x_0 + R)$, розвивається на ньому у степеневий ряд (2.7), якщо цей ряд збіжний на даному проміжку і для всіх $x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$ його сума дорівнює $f(x)$.

Степеневі ряди мають дуже велике значення. Справа в тому, що частинні суми степеневого ряду є алгебраїчними многочленами, значення яких у довільній точці легко обчислити. Ця обставина робить степеневі ряди зручним засобом для знаходження значень тих функцій, які розвиваються в такі ряди.

Якщо в ряді (2.7) прийняти $x_0 = 0$, то дістанемо степеневий ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (2.8)$$

Оскільки степеневий ряд (2.7) підстановкою $z = x - x_0$ зводиться до степеневого ряду (2.8), то надалі розглядатимемо тільки ряди виду (2.8).

Приклад 2.6 Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$.

Розв'язування

Скористаємось ознакою Д'Аламбера

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)|x| = +\infty$ при довільному $x \neq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = 0$ в точці x=0.

Таким чином, даний ряд збіжний лише в одній точці x=0.

Приклад 2.7 Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Розв'язування

За ознакою Д'Аламбера, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

для будь-яких значень аргументу x. Це означає, що даний степеневий ряд збіжний на всій числовій осі Ox.

Теорема 2.2 *(теорема Абеля)* Якщо степеневий ряд (2.8) збіжний в точці $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний при всіх x, які задовольняють умову $|x| < |x_0|$.

Якщо степеневий ряд (2.8) розбіжний в деякій точці x_1, то він розбіжний в усіх точках x числової осі, що задовольняють умову $|x| > |x_1|$.

Доведення

Нехай ряд збіжний в точці x_0. Тоді для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ виконується необхідна умова збіжності, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, але тоді змінна $a_n x_0^n$ є обмеженою: $\exists K \quad \left|a_n x_0^n\right| < K, \quad n = 1, 2, ...$

Нехай $|x| < |x_0|$, тоді число $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ і для загального члена ряду (2.8) матимемо таку оцінку

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < Kq^n .$$

Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} Kq^n$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником меншим за одиницю, то збіжний і ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$, тобто даний ряд абсолютно збіжний при $|x| < |x_0|$.

Нехай $|x| > |x_1|$ і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний, то за доведеним ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ був би абсолютно збіжним, а це суперечить умові.

Геометричний зміст теореми Абеля полягає в тому, що збіжність ряду (2.8) в точці x_0 тягне за собою його абсолютну збіжність в усіх точках x, більш близьких до точки *0*.

Теорема Абеля дає змогу з'ясувати, що являє собою область збіжності степеневого ряду.

Розглянемо степеневий ряд (2.8). Логічно можливі такі три випадки:

1) всі додатні числа є точками збіжності;

2) всі додатні числа є точками розбіжності;

3) існують додатні точки збіжності і додатні точки розбіжності.

У першому випадку, за теоремою Абеля, степеневий ряд (2.8) збіжний абсолютно для всіх x, бо для кожного дійсного числа x знайдеться додатне число a таке, що $a > |x|$. Отже, областю збіжності є вся числова вісь.

У другому випадку степеневий ряд (2.8) розбіжний для всіх значень

$x \neq 0$, бо для кожного $x \neq 0$ знайдеться додатне число a таке, що $a < |x|$. Отже, область збіжності вироджується в точку $x = 0$.

У третьому випадку позначимо через E множину додатних точок збіжності і нехай число $R = \sup E$. Оскільки правіше R знаходяться тільки точки розбіжності, то при $|x| > R$ ряд (2.8) розбіжний. Якщо $|x| < R$, то, за означенням числа R, знайдеться точка x_0, в якій ряд збіжний і $|x| < |x_0| < R$. За теоремою Абеля ряд (2.8) абсолютно збіжний.

Таким чином, всередині інтервалу *(-R;R)* з центром у точці $x = 0$ ряд (2.28) збіжний (абсолютно), поза цим інтервалом ряд (2.8) розбіжний. При цьому інтервал *(-R;R)* називають *інтервалом збіжності,* а число R – *радіусом збіжності* степеневого ряду.

У першому і другому випадках доцільно вважати відповідно $R = \infty$ і $R = 0$.

Зауваження. 1. Всередині інтервалу збіжності степеневий ряд збіжний абсолютно. Тому відшукання радіуса збіжності ряду (2.8) зводиться до відшукання його радіуса абсолютної збіжності, тобто радіуса збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

2. Радіус збіжності степеневого ряду (2.8) визначається за формулами

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \textit{або} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.9}$$

якщо, починаючи з деякого $n \geq N$, всі $a_n \neq 0$. Формули (2.9) легко одержати, скориставшись відповідно ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші.

3. Для знаходження області збіжності степеневого ряду, окрім визначення інтервалу збіжності, потрібно ще дослідити збіжність ряду на кінцях цього інтервалу, тобто підставити в ряд значення $x = -R$, $x = R$ і дослідити збіжність відповідних числових рядів.

Приклад 2.8 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} + \frac{x^3}{3000} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \ldots.$$

Розв'язування

Радіус збіжності знаходимо за першою з формул (2.9)

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 10^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}},$$

тому

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n} = 10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 10\,.$$

Отже, даний ряд збіжний для всіх значень x, що належать інтервалу $(-10, 10)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях проміжку. Підставляючи в даний ряд замість x число 10, одержимо розбіжний гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

При $x=-10$ одержуємо числовий знакозмінний ряд

$$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$

який збіжний умовно.

Таким чином, інтервалом збіжності даного степеневого ряду є пів-відрізок [-1;10).

Приклад 2.9 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{x^4}{2^2}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{x^{2n}}{2^n}+\ldots$$

Розв'язування

В даному випадку не можна застосувати формули (2.9) для відшукання радіуса збіжності даного ряду, оскільки він не містить непарних степенів x.

Для відшукання інтервалу збіжності застосуємо безпосередньо ознаку Д'Аламбера. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{2n+2}}{(n+2)^2x^{2n+1}}:\frac{n^2x^{2n}}{(n+1)^2x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Отже, ряд збіжний, якщо $x^2 < 2$, і розбіжний, якщо $x^2 > 2$. Таким чином, $\mathrm{R}=\sqrt{2}$. З'ясуємо, чи збіжний даний ряд при $x = \pm\sqrt{2}$. Підставляючи $x = \pm\sqrt{2}$, одержуємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$, який розбіжний, оскільки його загальний член не прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду ($-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$).

Приклад 2.10 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Розв'язування

Застосуємо ознаку Коші, прийнявши $U_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n\leftarrow\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{n} = \begin{cases} 0 & при \quad |x-1| \le 1, \\ \infty & при \quad |x-1| > 1. \end{cases}$$

Таким чином, ряд збіжний при $|x-1| \le 1$, тобто на відрізку $[0; 2]$.

2.3 Властивості суми степеневого ряду

Теорема 2.3 Степеневий ряд (2.7) збіжний рівномірно на кожному відрізку, що належить інтервалу збіжності.

Доведення

Нехай $-R < a \le x \le b < R$, де $(-R;R)$ - інтервал збіжності. Доведемо, що на відрізку $[a;b]$ ряд (2.7) збіжний рівномірно. Візьмемо додатне число x_0 таке, що $x_0 > \max(|a|,|b|)$ *і* $x_0 \in (-R;R)$. Тоді для всіх $x \in [a;b]$ виконуватиметься нерівність $|x| < |x_0|$, а отже, і нерівність $|a_n x^n| \le |a_n x_0^n|$. Але додатний числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ збіжний, оскільки точка $x_0 \in (-R;R)$, то за ознакою Вейєрштрасса ряд (2.7) збіжний рівномірно на відрізку $[a;b]$.

Зауваження. На всьому інтервалі збіжності степеневий ряд може бути збіжний нерівномірно. Наприклад, ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

на своєму інтервалі збіжності $-1 < x < 1$ є збіжним нерівномірно, бо нерівність $\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|\frac{x^n + 1}{1 - x}\right| < \varepsilon$ не може виконуватися для $-1 < x < 1$

при жодному сталому N (адже $\frac{x^n + 1}{1 - x} \to \infty \quad при \quad x \to 1$).

Теорема 2.4 Сума степеневого ряду (2.7) всередині інтервалу збіжності є функція неперервна.

Доведення

Щоб довести неперервність суми степеневого ряду всередині його інтервалу збіжності, досить довести неперервність цієї суми в довільній точці x цього інтервалу. Але точку x завжди можна включити всередину деякого відрізка $[-r; r]$, який повністю міститься всередині інтервалу збіжності. Оскільки на відрізку $[-r; r]$ внаслідок теореми 2.3 ряд (2.7) збіжний рівномірно, а його члени є неперервні функції на цьому відрізку, то за властивістю рівномірно збіжних рядів сума степеневого ряду (2.7) неперервна в точці x.

Теорема 2.5 Степеневий ряд (2.7) можна почленно інтегрувати на кожному відрізку $[a; b]$, що належить інтервалу збіжності $(-R; R)$:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \ldots + \int_a^b a_n x^n dx + \ldots,$$

зокрема

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \ldots + \int_0^x a_n x^n dx + \ldots$$

для кожного $x_0 \in (-R; R)$.

Доведення

Степеневий ряд (2.7) складається з неперервних функцій, тому його можна почленно інтегрувати на відрізках рівномірної збіжності. Яка б не була точка $x_0 \in (-R; R)$, її завжди можна включити всередину деякого відрізка $[a; b]$, який повністю міститься всередині інтервалу збіжності $(-R; R)$ і містить початок координат. Інтегруючи на цьому відрізку в межах від 0 до *x* ряд (2.7) почленно, дістанемо рівність

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \ldots + \int_0^x a_n x^n dx + \ldots$$

Зауваження. Можна показати, що теорема 2.5 залишається справедливою і у випадку, коли числа a і b (обидва чи одне з них) збігаються з кінцями інтервалу збіжності, якщо тільки ряд (2.7) збіжний у відповідних кінцях.

Теорема 2.6 Степеневий ряд (2.7) можна диференціювати почленно у внутрішніх точках його інтервалу збіжності, тобто якщо

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots ,$$

то

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

при $-R < x < R$.

Доведення

Нехай $x \in (-R_1; R_1) \in (-R; R)$. Візьмемо таке x_0, щоб $|x| < |x_0|$, $(x_0 \neq 0)$ і $R_1 < x_0 < R$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ збіжний, то $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to 0$. Отже, знайдеться таке число $k > 0$, що $\left|a_n x_0^n\right| \leq k$ при всіх n. Оцінимо загальний член ряду $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$ Маємо

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| = \frac{1}{|x_0|} n \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^{n-1} \leq \frac{k}{|x_0|} n q^{n-1},$$

де $q = \dfrac{x}{|x_0|} < 1$. Але при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{k}{|x_0|} n q^{n-1}$ збіжний, бо за ознакою Д'Аламбера при $n \to \infty$ маємо:

$$\frac{k}{|x_0|}(n+1)q^n : \frac{k}{|x_0|} n q^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) q \to q < 1.$$

Оскільки $|x| < |x_0|$, то останній результат означає, що ряд $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$ збіжний в точці x, $x \in (-R_1; R_1)$. За теоремою 2.3 маємо, що ряд $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$ збіжний всередині інтервалу збіжності $(-R; R)$.

Зауваження. Степеневий ряд (2.7) в межах інтервалу збіжності можна диференціювати почленно довільне число раз. При цьому радіуси збіжності всіх рядів, одержаних почленним диференціюванням даного ряду, збігаються з радіусом збіжності вихідного ряду.

Приклад 2.11 Знайти суму ряду

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

Розв'язування

При $|x|<1$ даний ряд збіжний. Отже, його можна почленно диференціювати в середині інтервалу збіжності. Позначивши його суму через $S(x)$, маємо

$$S'(x)=1+x^2+x^4+...+x^{2n-2}+...$$

Оскільки $|x|<1$, то одержаний ряд похідних як геометрична прогресія із знаменником $q=x^2$ має суму $S'(x)=\frac{1}{1-x^2}$. Проінтегрувавши ряд

$$S'(x)=1+x^2+x^4+...+x^{2n-2}+...=\frac{1}{1-x^2}$$

знайдемо його суму:

$$S(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...=\int_0^x \frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|, \qquad (|x|<1).$$

2.4 Формула і ряд Тейлора

Нехай функція $f(x)$ має неперервну похідну в деякому околі точки x_0. Тоді за формулою Ньютона - Лейбніца

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)dt\,.$$

Якщо функція $f(x)$ має другу неперервну похідну $f''(x)$, то за формулою інтегрування частинами

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt=-\int_{x_0}^x f'(t)d(x-t)=-f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^x+\int_{x_0}^x f''(t)d(x-t)=$$

$$=f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^x f''(t)d(x-t).$$

Отже,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$$

Далі, якщо $f(x)$ має третю неперервну похідну $f'''(x)$, то

$$\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt=\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)=-\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt=f''(x_0)(x-x)^2+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt$$

і

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt.$$

Взагалі, якщо $f(x)$ має $(n+1)$-у неперервну похідну $f^{(n+1)}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Згідно з узагальненою теоремою про середнє, застосованою до інтеграла

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt,$$

існує число $c, x_0<c<x$ таке, що

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(c)\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема 2.7 Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну $(n+1)$-го порядку в деякому околі точки x_0, то для кожного x цього околу існує точка $c, x_0<c<x$ така, що

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ +\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (2.10)$$

Нехай функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків в деякому околі точки x_0. Тоді степеневий ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)\ +\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (2.11)$$

називають *рядом Тейлора функції* $f(x)$ *в точці* x_0.

Для подальшого достатньо буде знайти ряд Тейлора функції $f(x)$ в точці $x_0=0$, такий ряд називають *рядом Маклорена*:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x\ +\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2.12)$$

Умови розкладу функції в ряд Тейлора дає така теорема.

Теорема 2.8 Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків на відрізку $[-r;r]$, $\mathrm{r}>0$, то на ньому рівність

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x\ +\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2.13)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли залишковий член формули Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x\ +\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (2.14)$$

де $0<\theta<1$, прямує до нуля.

Доведення

Рівність (2.13) еквівалентна рівності

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x\ +\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right].$$

Остання рівність, враховуючи (2.14), рівносильна умові

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=0.$$

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків на відрізку $[-r;r]$ і всі вони обмежені на ньому $\left|f^n(x)\right|\le K$, то на відрізку $[-r;r]$ функція $f(x)$ розвивається в степеневий ряд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Доведення

Оскільки функція $f(x)$ має похідні довільних порядків на $[-r;r]$, то для неї можна формально скласти ряд Тейлора (2.11). Доведемо, що він збіжний до $f(x)$. Для цього, за теоремою 2.8, достатньо показати, що залишковий член формули Тейлора

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{2.15}$$

прямує до нуля при $n\to\infty$. Зауважуємо, що

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le K\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}. \tag{2.16}$$

Але ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}$ збіжний, бо за ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{r^{(n+2)}}{(n+2)!}:\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n+2}=0<1.$$

Тому загальний член ряду $\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}\to 0$. З нерівності (2.16) випливає, що $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ на відрізку $[-r;r]$.

Зауваження. Можна показати, що якщо функція розкладається в степеневий ряд, то він є рядом Тейлора.

Для спрощення процесу розвинення функцій в ряд Тейлора можна використовувати прикладні пакети Maple та Mathcad (додатки ***A, B***).

2.5 Розвинення елементарних функцій в ряд Тейлора

1. Функція $f(x)=e^x$.

Оскільки дана функція в кожній точці x числової осі має похідну будь-якого порядку $f'(x)=f''(x)=...=e^x$, то $f(0)=f'(0)=f''(0)=...=1$ і вона породжує степеневий ряд

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

Цей ряд збіжний при будь-якому x саме до функції $f(x)=e^x$, бо на будь-якому відрізку $[-r;r]$ для кожному натурального n:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^r.$$

Отже,

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+..., \quad -\infty<x<+\infty. \tag{2.17}$$

2. Функція $f(x)=\sin x$.

Ця функція при будь-якому $x\in(-\infty;+\infty)$ має всі похідні, причому

$$f'(x)=\cos x, \quad f''(x)=-\sin x, \quad f'''(x)=-\cos x, \quad f^{(4)}(x)=\sin x,$$

$$f^{(5)}(x)=\cos x, \quad f^{(6)}(x)=-\sin x,...$$

або

$$f^{(\mathrm{k})}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right), \quad k=0,1,2,...$$

Тоді

$$f^{(\mathrm{k})}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & \textit{якщо} \quad \mathrm{k}=2\mathrm{n}\\ (-1)^k, & \textit{якщо} \quad \mathrm{k}=2\mathrm{n}+1, \quad n=0,1,2,...\end{cases}$$

Отже ця функція породжує степеневий ряд

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$$

Цей ряд збіжний при будь-якому x саме до функції $f(x)=\sin x$, бо при довільному x і для кожного натурального n:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1.$$

Таким чином при $-\infty < x < +\infty$ маємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (2.18)$$

3. Функція $f(x) = \cos x$.

Рівність

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.19)$$

доводиться аналогічно рівності (2.18), або почленним диференціюванням останньої.

4. Функція $f(x) = \ln(1+x)$.

Знайдемо ряд Тейлора для цієї функції, виходячи з очевидної рівності

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

яка виконується при $-1 < x < 1$ (бо праворуч маємо геометричну прогресію зі знаменником $q = -x$). Використовуючи можливість почленного інтегрування степеневого ряду, дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^n dx + \ldots$$

або

$$\ln(1+\mathrm{x}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Відмітимо, що шляхом безпосереднього дослідження залишкового члена формули Тейлора можна переконатися у справедливості останньої рівності і при $x = 1$.

Отже,

$$\ln(1+\mathrm{x}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1. \qquad (2.20)$$

5. Функція $f(x) = arctgx$.

Інтегруючи рівність

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

справедливу при $|x| < 1$ (геометрична професія зі знаменником $q = -x^2$), дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx + \ldots$$

або

$$\mathrm{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Як і в попередньому прикладі можна довести, що остання рівність виконується при $x = \pm 1$.

Отже,

$$\mathrm{arctgx} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1. \qquad (2.21)$$

6. Функція $f(x) = (1+x)^\alpha$, де α - довільне дійсне число.

Для цієї функції маємо

$$f'(x) = \alpha(1+x)^\alpha, \quad f''(x) = \alpha(\alpha - x)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots,$$

тому функція $f(x) = (1+x)^\alpha$ породжує степеневий ряд ($x_0 = 0$)

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^2 + \ldots$$

і його називають біноміальним рядом.

Оскільки за ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} = |x|,$$

то біноміальний ряд збіжний при $|x|<1$ і розбіжний при $|x|>1$.

Доведемо, що при $|x|<1$ цей ряд збіжний саме до функції $(1+x)^{\alpha}$. Справді, нехай при $|x|<1$

$$f(x) = 1 + ax + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots, \qquad (2.22)$$

тоді

$$f'(x) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \ldots, \qquad (2.23)$$

$$xf'(x) = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \ldots, \qquad (2.24)$$

Почленним додаванням рівностей (2.23) і (2.24) з урахуванням (2.22) маємо

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \quad \text{або} \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\alpha}{1+x},$$

що можна записати у вигляді

$$[\ln f(x)]' = [\alpha\ln(1+x)]' \quad \text{або} \quad [\ln f(x)]' = \left[\ln(1+x)^{\alpha}\right]'.$$

Тому $\ln f(x) + \ln(1+x)^{\alpha} = c$ (c - стала), звідки $f(x) = e^c(1+x)^{\alpha}$. Але $f(0)=1$, *отже*, $e^c = 1$ *і* $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Підставляючи це значення у формулу (2.22), дістанемо рівність

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots, \qquad (2.25)$$

справедливу для інтервалу $-1 < x < 1$. Ця рівність узагальнює відому

формулу бінома Ньютона на випадок будь-якого дійсного показника.
Зауваження. Можна довести що при $\alpha > 0$ рівність (2.25) справджується на відрізку $-1 \le x \le 1$, при $-1 < \alpha \le 0$ – на півінтервалі $-1 < x \le 1$, при $\alpha \le -1$ на інтервалі $-1 < x < 1$.

Зазначимо, що експоненціальна функція e^x та тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ пов'язані між собою формулами Ейлера. Виведемо ці формули. У ряді (2.17) формально замість x приймемо jx, *де* $j^2 = -1$ (уявна одиниця). Матимемо

$$e^{jx} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots\right) +$$

$$+ j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right). \tag{2.26}$$

У круглих дужках цієї рівності містяться ряди, які зображають, відповідно, функції $\sin x$ і $\cos x$. Тому рівність можна записати так:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x. \tag{2.27}$$

Якщо в ряді (2.17) замість x формально прийняти $-jx$, то дістанемо таку рівність:

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x. \tag{2.28}$$

Тоді з формул (2.27) і (2.28) знаходимо

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}. \tag{2.29}$$

Формули (2.27) і (2.28) називають *формулами Ейлера*.

2.6 Застосування степеневих рядів

1. Наближене обчислення значень функцій

Нехай функція $f(x)$ в деякому проміжку розвивається в степеневий ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Тоді легко наближено обчислити значення функції $f(x)$ шляхом заміни її скінченним числом перших членів цього розкладу.

Чим менше $|x|$, тим менше членів береться для обчислення $f(x)$ з бажаною точністю. Якщо x дуже мале, то достатньо обмежитись тільки двома першими членами, відкинувши всі останні. Таким чином, дістаємо дуже просту формулу для $f(x)$, яка при малих $|x|$ цілком може замінити часто досить складний точний вираз для $f(x)$.

а) Обчислення значень тригонометричних функцій

Степеневі ряди (2.18) і (2.19) можна використати для обчислення значень тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$. Оскільки ряди знакозмінні, то залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Для $\sin x$ матимемо

$$|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},\tag{2.30}$$

$$|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.\tag{2.31}$$

Користуючись формулами (2.30) і (2.31), можна підібрати найменше число n таке, щоб дістати значення $\sin x$ і $\cos x$ з наперед заданою точністю.

Відмітимо, що ряди (2.18) і (2.19) швидше збігаються при малих значеннях $x>0$. Доцільно обчислювати за допомогою цих рядів значення синуса і косинуса для кутів від 0^0 до 15^0. Значення ж цих функцій для кутів від 15^0 до 45^0 легко обчислити, якщо скористатись формулами:

$$\sin\left(30^0\pm x\right)=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x,\quad \cos\left(30^0\pm x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\mp\frac{1}{2}\sin x.$$

А значення функцій $\sin x$ та $\cos x$ для кутів від 45^0 до 90^0 знаходяться за допомогою формул зведення.

Зауваження. Для обчислення кути, виражені в градусах потрібно перевести в радіани.

Приклад 2.12 Обчислити $\sin 20^0$ з точністю до 10^{-4}.

Розв'язування

Переводимо градусну міру в радіанну: $\dfrac{2\pi}{360}20=\dfrac{\pi}{9}$.

Підставляючи в розклад (2.18), дістанемо

$$\sin\frac{\pi}{9}=-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3+\ldots$$

Обмежившись виписаними членами, ми робимо помилку не більшу за

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4<\frac{1}{120}(0{,}3)^4<6\cdot10^{-5}.$$

Обчислюючи кожний доданок із п'ятьма знаками, дістанемо

$$\sin\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3=0{,}34889-0{,}00708=0{,}34181.$$

б) Обчислення логарифмів

Оскільки ряд (2.20) збіжний повільно, то застосовувати цей ряд для обчислення натуральних логарифмів нераціонально. Для обчислення логарифмів використовують інший ряд. Для степеневого ряду (2.20) замість x розглянемо $-x$, при цьому вважатимемо, що $|-x|<1$.

Маємо

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots \qquad (2.32)$$

Віднімемо почленно від ряду (2.20) ряд (2.32). Дістанемо степеневий ряд

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),\quad |x|<1.$$

Нехай $x=\dfrac{1}{2m+1}$, де m – натуральне число. Тоді $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{m+1}{m}$.

Тому

$$\ln\frac{m+1}{m}=2\left[\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}+\ldots\right]$$

або

$$\ln(m+1)=\ln m+2\left[\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\ldots\right]. \qquad (2.33)$$

Ряд (2.33) і використовується для обчислення логарифмів натуральних чисел. Зазначимо, що ця наближена формула дає похибку

$$2\left[\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)(2m+1)^{2n+3}}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^4}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2m+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n-1}2m(2m+2)}<\frac{1}{(2n+1)m(2m+1)^{2n}}.$$

Приклад 2.13 Обчислити $\ln 3$ за наближеною формулою (2.33), взявши $n=3$.

Розв'язування

$$\ln 3=\ln 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}\right]=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}\right]+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}\right]\approx 1{,}09546.$$

в) Наближене обчислення коренів.

Для обчислення коренів застосовують біномний ряд (2.25).

Приклад 2.14 Обчислити $\sqrt[3]{33}$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язування

Запишемо $\sqrt[3]{33}$ так:

$$\sqrt[3]{33}=\sqrt[3]{27+6}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{9}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}.$$

Використовуючи біномний ряд, дістанемо

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}=\left(1+\frac{2}{9}\right)^{1/3}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^4+\ldots$$

Помічаємо, що одержаний числовий рад знакозмінний, тому залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо п’ятий член цього ряду:

$$\frac{1}{4!}\cdot\frac{80\cdot 2^4}{3^4 9^4}=\frac{160}{3^{14}}=\frac{160}{4743603}<10^{-4}.$$

Отже, $\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}$ з точністю до 10^{-3} можна обчислити за допомогою наближеної формули

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^3\approx 1{,}1248115$$

Звідси $\sqrt[3]{33}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}\approx 3{,}3744345$, прицьому перші три цифри після коми правильні.

2. Обчислення визначених інтегралів

Якщо підінтегральна функція у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, однак її первісна $F(x)$ не є функцією елементарною, то формула Н’ютона - Лейбніца $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ не дає змогу виконати обчислення цього інтеграла. Обчислити такі інтеграли можна, якщо функція *f(x)* розвивається в степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

рівномірно збіжний до $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Використовуючи теорему про почленне інтегрування ряду, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx=a_0\int_a^b dx+a_1\int_a^b xdx+a_2\int_a^b x^2dx+a_3\int_a^b x^3dx+\ldots+a_n\int_a^b x^ndx+\ldots$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{n+1}.$$

Обчисливши з відповідною точністю суму ряду, знайдемо з тією ж точністю значення визначеного інтеграла.

Приклад 2.15 Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ з точністю до 10^{-5}.

Розв'язування

Первісна функція для функції $\frac{\sin x}{x}$ не є елементарною. Оскільки для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$ має місце рівність

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

то для цих же x правильна і рівність

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

На відрізку $[0;1]$ цей ряд збіжний рівномірно, тому

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!}dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!}dx - \int_0^1 \frac{x^6}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots$$

Оскільки одержаний числовий ряд знакозмінний, то залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо четвертий член цього ряду:

$$\frac{1}{7\cdot 7!} = 2{,}834\cdot 10^{-5} < 0{,}0001.$$

Отже, з точністю до 10^{-4} одержуємо

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0{,}98932,$$

причому перші чотири цифри точні.

3. Інтегрування диференціальних рівнянь

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{2.34}$$

що задовольняє початкові умови

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \tag{2. 35}$$

Припустимо, що розв'язок $y = f(x)$ існує і може бути поданий у вигляді ряду Тейлора

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n . \tag{2.36}$$

Для знаходження коефіцієнтів ряду (2.36) використаємо рівняння (2.34) і умови (2.35).

Дійсно, з умов (2.35) випливає, що

$$f(0) = y_0, \quad f'(0) = y'_0;$$

з рівняння (2.34) одержуємо

$$f''(0) = y''(0) = F(0, y_0, y'_0).$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (2.34) за змінною x маємо:

$$y'' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y') \cdot y' + F'_y(x, y, y') \cdot y'', \tag{2.37}$$

підставляючи значення $x = 0, y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ в праву частину рівності (2.37), знайдемо $f'''(0) = y'''(0)$.

Диференціюючи співвідношення(2.37), знайдемо $f^{IV}(0) = y^{IV}(0)$ і т. д.

Знайдені значення похідних підставляємо в рівність (2.36). Для тих значень x, для яких цей ряд збіжний, це і буде розв'язок рівняння.

Приклад 2.16 Знайти чотири перших члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' - (1 + x^2)y = 0$ за початкових умов $y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$.

Розв’язування

Підставивши в рівняння початкові умови, одержимо $y''(0) = 1 \cdot (-2) = -2$.

Диференціюючи початкове рівняння, послідовно знаходимо

$$y''' = 2xy + \left(1 + x^2\right)y' \qquad y'''(0) = 2,$$

$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + \left(1 + x^2\right)y'' = 2y + 4xy' + \left(1 + x^2\right)y'', \qquad y^{IV}(0) = -6.$$

Підставляючи знайдені значення похідних в ряд (2.36), одержимо

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Оскільки нам потрібні лише перші чотири члени розвинення в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння, то

$$y(x) \approx -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Зауваження. Початкові умови (2.35), звичайно, можна замінити умовами вигляду $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0$, де $\mathrm{x}_0, y_0, y_0' -$ дані числа. При цьому ряд для розв'язку буде вже не за степенями x, а за степенями різниці $x - x_0$.

2.7 Приклади розв’язування типович задач

Приклад 2.17 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\dfrac{x^n}{3^n(n+2)}$.

Розв’язування

Знайдемо радіус збіжності даного степеневого ряду за формулою 2.9:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot(n+3)}{3^n\cdot(n+2)(n+2)}\right| = 3.$$

Дослідимо збіжність даного ряду при $x = 3$ та $x = -3$.

Нехай $x=3$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\dfrac{x^n}{3^n(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}$ розбіжний, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1\neq 0.$$

При $x=-3$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\dfrac{x^n}{3^n(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{n+2}$ також розбіжний.

Таким чином, (-3, 3) – інтервал збіжності даного степеневого ряду.

Приклад 2.18 Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=xe^{-x^2}$.

Розв'язування

Використаємо розвинення (2.17), підставивши замість x величину $-x^2$. Маємо

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на x, отримаємо

$$xe^{-x^2}=x-\frac{x^3}{1}+\frac{x^5}{2!}-\frac{x^7}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Приклад 2.19 Функцію $y=\dfrac{1}{x}$ розвинути в ряд Тейлора з центром в точці $x_0=3$.

Розв'язування

За формулою (2.11) маємо:

$$y'(x)=-\frac{1}{x^2},\qquad y''(x)=\frac{2}{x^3},\ y'''(x)=-\frac{2\cdot 3}{x^4},\ldots,\ y^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}};$$

звідки

$$y(3)=\frac{1}{3},\quad y'(3)=-\frac{1}{3^2},\qquad y''(3)=\frac{2!}{3^3},\ldots,\qquad y^{(n)}(3)=(-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}};$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}(x-3)+\frac{2!}{3^3}(x-3)^2+\ldots+(-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}(x-3)^n+\ldots$$

Приклад 2.20 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, з точністю до 0,001.

Розв'язування

Традиційними способами такий інтеграл складно обчислити. Тому підінтегральну функцію розкладемо в ряд Маклорена, використовуючи рівність (2.17). Маємо

$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 1} + \frac{x^4}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty .$$

Проінтегруємо останню рівність в межах від 0 до 1, маємо

$$\int\limits_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2\cdot 1}dx + \int\limits_0^1 \frac{x^4}{2^2\cdot 2!}dx - \int\limits_0^1 \frac{x^6}{2^3\cdot 3!}dx + \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^5}{2^2\cdot 2!\cdot 5}\Bigg|_0^1 - \frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}\Bigg|_0^1 + \ldots = 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \ldots$$

Знайдемо член ряду, за модулем менший 0,001:

$$1 > 0{,}001; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} > 0{,}001; \quad \frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5} = \frac{1}{40} > 0{,}001; \quad \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} = \frac{1}{42\cdot 8} > 0{,}001;$$

$$\frac{1}{9\cdot 2^4\cdot 4!} = \frac{1}{9\cdot 16\cdot 24} = \frac{1}{3456} < 0{,}001 .$$

Тобто, всі члени ряду, починаючи з $\frac{1}{9\cdot 2^4\cdot 4!}$, можна відкинути. Тоді

$$\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} \approx 8{,}855 .$$

Приклад 2.21 Використовуючи розвинення в ряд Тейлора-Маклорена, виписати перші чотири, відмінних від нуля, члени розвинення розв'язку диференціального рівняння

$$y' = x^2 + xy + 1 . \qquad (2.38)$$

Розв'язування

Нехай $y(x)$ – розв'язок рівняння (2.38). Тоді

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Оскільки за умовою $y(0)=1$, знайдемо $y'(0)$, підставивши в рівняння $x=0$, $y(0)=1$. Маємо

$$y'(0)=0^2+0\cdot 1+1=1.$$

Для обчислення $y''(0)$ продиференціюємо за змінною x обидві частини диференціального рівняння (2.38):

$$y''=2x+y+xy'. \qquad (2.39)$$

Підставивши в одержане рівняння $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, одержимо:

$$y''(0)=2\cdot 0+1+0\cdot 1=1.$$

Диференціюючи рівняння (2.39) за змінною x, одержимо:

$$y'''=2+2y'+xy''.$$

Підставляючи в останнє рівняння $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=1$, маємо

$$y'''=2+2\cdot 1+0\cdot 1=4.$$

Підставляючи знайдені значення $y'(0)$, $y''(0)$ та $y'''(0)$ в розвинення $y(x)$ одержимо

$$y(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}.$$

Питання для самоперевірки

1. Який ряд називається функціональним?
2. Що означає збіжність функціонального ряду?
3. Що таке область збіжності функціонального ряду? Як визначається сума збіжного функціонального ряду?
4. Дайте означення рівномірної збіжності функціонального ряду.
5. Сформулюйте ознаку Вейєштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів.

6. Чи є рівномірна збіжність функціонального ряду необхідною умовою для неперервності його суми?

7. Який ряд називають степеневим? Сформулюйте та доведіть теорему Абеля.

8. Охарактеризуйте геометричний зміст теореми Абеля.

9. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування степеневого ряду.

10. Сформулюйте і доведіть теорему про можливість диференціювання степеневого ряду.

11. Який функціональний ряд називають степеневим? Сформулюйте і доведіть теорему Абеля та наслідок з неї.

12. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду?

13. Як визначають радіус збіжності степеневого ряду? Як визначають область збіжності степеневого ряду?

14. Сформулюйте і доведіть теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду.

15. Виведіть формулу Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа.

16. Який ряд називається рядом Тейлора? Які умови повинна задовольняти функція, щоб для неї можна було скласти ряд Тейлора?

17. Сформулюйте і доведіть теорему про необхідні і достатні умови розвинення функції в ряд Тейлора.

18. Сформулюйте і доведіть достатню умову розвинення функції в ряд Тейлора.

19. Дослідіть можливість розвинення в ряд Тейлора функцій: $\sin\ x$, $\cos\ x$, e^x.

20. Як розкласти в ряд за степенями x функцію $\ln(1+x)$. Чому замість $\ln x$ розглядають розвинення функції $\ln(1+x)$?

21. Як розкласти в ряд Маклорена функцію $arctgx$?

22. Як розкласти в ряд Маклорена функцію $(1+x)^{\alpha}$?

23. Як за допомогою розвинення в ряд Маклорена можна обчислювати логарифми чисел?

24. Як за допомогою степеневих рядів можна обчислювати значення тригонометричних функцій?

25. Як за допомогою степеневих рядів можна обчислювати визначені інтеграли?

26. Як застосовуються степеневі ряди до розв'язування диференціальних рівнянь?

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду і дослідити його поведінку на кінцях інтервалу збіжності

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-2}}{(3n-2)^2}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n+2)2^n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 2^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(5n-3)\cdot 2^n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\cdot 4^n}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n-2)\cdot 3^n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\cdot 5^n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3n-2}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{2n+1^n}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n\cdot(2n+1)}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{20}\cdot x^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{n}x^n}{3n-1}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(5n-3)\cdot 5^n}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot \mathrm{n}}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n(n+1)}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(3n-2)\cdot \mathrm{n}}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n\cdot 3^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{3n(n^2+1)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{(n^2+2)\cdot 2^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 \cdot 5^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^2 \cdot (2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)\cdot 3^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n^2(4n-3)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n\cdot(n^2+1)}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+1)\cdot n^2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(5x)^n}{(2n+1)\cdot n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n^2(n+1)}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 \cdot 4^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)\cdot 2^n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n(n+1)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n^2+1)\cdot 9^n}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2n(n+2)}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+6)^2}$

Завдання 2.2 Розкласти в ряд Маклорена функцію

1. $y = xe^{-3x}$
2. $y = \sin^2 x;$
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}};$
4. $y = \dfrac{1}{1-x^2};$
5. $y = \ln(1-3x);$
6. $y = \cos^2 x;$
7. $y = \dfrac{3}{(x-2)(x+1)};$
8. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}};$
9. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right);$
10. $y = \sqrt[3]{1+x^2};$
11. $y = arctg\,2x;$
12. $y = \dfrac{2x}{x^2-2x-3};$
13. $y = \dfrac{1-\cos x}{x^2};$
14. $y = \ln(1+2x);$
15. $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right);$
16. $y = \dfrac{2}{4-x^2};$
17. $y = \sin 3x + \cos 2x;$
18. $y = \sqrt[5]{1+3x};$
19. $y = \dfrac{e^{2x}-1}{x};$
20. $y = shx;$
21. $y = chx;$
22. $y = \dfrac{x}{9+x^2};$
23. $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2};$
24. $y = \sqrt[3]{8+x^2};$
25. $y = \ln(1-2x);$
26. $y = 2xe^{-x^2};$

27. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1-2x^2}}$; 28. $y=\frac{1-\cos^2 x}{x}$;

29. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; 30. $y=arctgx$;

31. $y=\frac{1}{3-2x}$; 32. $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

33. $y=\sin 2x+\cos x$; 34. $y=3xe^{2x}$;

35. $y=\ln(1-5x)$; 36. $y=\arcsin 2x$;

37. $y=\frac{3}{x+3}$; 38. $y=\frac{1}{\sqrt{9-3x}}$;

39. $y=\sqrt{4+3x^2}$; 40. $y=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$;

Завдання 2.3 Розвинути в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$ *функцію*

1. $y=\frac{1}{x}$, $x_0=1$; 2. $y=\ln x$, $x_0=1$;

3. $y=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-2$; 4. $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$, $x_0=-3$;

5. $y=\frac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$; 6. $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$;

7. $y=\cos$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ 8. $y=e^x$, $x_0=2$

9. $y=\sin^2 x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$ 10. $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$

11. $y=\frac{1}{x+1}$, $x_0=3$; 12. $y=\sqrt{x+1}$, $x_0=3$

13. $y=\frac{1}{x+3}$, $x_0=2$;

14. $y=\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

15. $y=\ln(x-1)$, $x_0=2$;

16. $y=e^x$, $x_0=1$

17. $y=\frac{1}{x-1}$, $x_0=-2$;

18. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$;

19. $y=e^{-x}$, $x_0=-1$;

20. $y=\ln(2x+1)$, $x_0=2$;

21. $y=e^{3x}$, $x_0=1$;

22. $y=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

23. $y=\cos 3x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

24. $y=\frac{1}{(x+1)^2}$, $x_0=1$;

25. $y=\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$, $x_0=5$;

26. $y=\frac{1}{2x+1}$, $x_0=1$;

27. $y=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0=1$

28. $y=e^{2x-1}$, $x_0=1$;

29. $y=\sin(3x-3)$, $x_0=1$;

30. $y=\cos(2x-4)$, $x_0=2$;

31. $y=\frac{1}{3x+2}$, $x_0=1$;

32. $y=\frac{1}{5x+4}$, $x_0=-1$;

33. $y=\frac{1}{\sqrt{2x+11}}$, $x_0=-1$;

34. $y=\frac{1}{x^2+2x}$, $x_0=-1$;

35. $y=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

36. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$, $x_0=-3$;

37. $y=\sqrt[4]{(x-2)^3}$, $x_0=3$;

38. $y=\frac{2}{x^2-1}$, $x_0=2$;

39. $y=\sqrt{x+1}$, $x_0=3$;

40. $y=\ln(x+3)$, $x_0=-2$.

Завдання 2.4 Використовуючи розвинення в ряд Тейлора, обчислити з точністю до 0,001

1. $e^{0.11}$, $\int\limits_{0.1}^{0.2} \frac{1-e^{-x^3}}{x^3}dx$;

2. $\sin 20^0$, $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$;

3. $e^{0.14}$, $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

4. $\ln 1.5$, $\int\limits_{0}^{1} \cos\sqrt{x}dx$

5. $e^{0.15}$, $\int\limits_{0}^{0.2} \sqrt[3]{1+x^2}dx$;

6. $\sin 28^0$, $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{x^2}{4}dx$;

7. $e^{0.18}$, $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}dx$;

8. $\sqrt[3]{30}$, $\int\limits_{0.25}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

9. $e^{0.22}$, $\int\limits_{0}^{0.3} \frac{dx}{1+x^4}$;

10. $\ln 1.08$, $\int\limits_{0}^{0.5} \cos\frac{x^3}{2}dx$;

11. $\sin 18^0$, $\int\limits_{0.1}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$;

12. $e^{0.15}$, $\int\limits_{0}^{0.4} \cos\frac{x^2}{2}dx$;

13. $e^{0.23}$, $\int\limits_{0}^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x}\cos^2 xdx$;

14. $\ln 1.3$, $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$;

15. $e^{0.26}$, $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$

16. $\sqrt[3]{70}$, $\int\limits_{0}^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

17. $e^{0.30}$, $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}dx$;

18. $\sin 36^0$, $\int\limits_{0}^{0.25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$;

19. $e^{0.27}$, $\int\limits_{0}^{0.125} \sqrt[3]{x}\sin^2 xdx$;

20. $\cos 18^0$, $\int\limits_{0.1}^{0.2} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$;

21. $e^{0.31}$, $\int\limits_{0}^{0.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$ 22. $\ln 1{,}2$, $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};$

23. $e^{0.34}$, $\int\limits_{0}^{0.027} \ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)dx;$ 24. $\sqrt[3]{500}$, $\int\limits_{0}^{0.3} \sqrt{1+x^2}\,dx;$

25. $e^{0.38}$, $\int\limits_{0}^{0.2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx;$ 26. $\cos 36^0$, $\int\limits_{0}^{0.2} e^{-3x^2} dx;$

27. $e^{0.35}$, $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^4}\,dx;$ 28. $\sin 1^0$, $\int\limits_{0}^{\frac{1}{9}} \sqrt{xe^{x^2}}\,dx;$

29. $e^{0.39}$, $\int\limits_{0.1}^{0.2} \frac{1+e^{-2x^3}}{x^2}dx;$ 30. $\ln 1.1$, $\int\limits_{0.3}^{0.5} \frac{1-\cos 2x}{x^2}dx;$

31. $e^{0.43}$, $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx;$ 32. $\cos 12^0$, $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^3} dx;$

33. $e^{0.46}$, $\int\limits_{0.1}^{0.2} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2}dx;$ 34 $\sin 15^0$, $\int\limits_{0}^{1} \cos\sqrt[3]{xe^{x^2}}\,dx;$

35. $e^{0.48}$, $\int\limits_{0}^{0.2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx;$ 36. $\sin 24^0$, $\int\limits_{0.1}^{0.4} \frac{\sin 3x_2}{2}dx;$

37. $e^{0.33}$, $\int\limits_{0}^{1} \cos^2 2dx;$ 38. $\sqrt[3]{250}$, $\int\limits_{0}^{1} \sin^2 x dx;$

39. $\cos 15^0$, $\int\limits_{0}^{0.2} xe^{\frac{x^4}{2}} dx;$ 40. $e^{0.49}$, $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^6}\,dx.$

Завдання 2.5 Використовуючи розклад в ряд Тейлора, обчислити перші чотири відмінні від нуля члени розв'язку диференціального рівняння

1. $y' = \cos x + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 1$;

2. $y' = e^x + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 0$;

3. $y' = x^2 y + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 3$;

4. $y' = xy - 2e^y,\ \mathrm{y}(0) = 1$;

5. $y' = \sin x + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 1$;

6. $y' = xy + x^2 + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 1$;

7. $y' = ye^x + 2y^2,\ \mathrm{y}(0) = \frac{1}{3}$;

8. $y' = e^{3x} + 2xy^2,\ \mathrm{y}(0) = 1$;

9. $y' = x + e^y,\ \mathrm{y}(0) = 0$;

10. $y' = y\cos x + 2\cos y,\ \mathrm{y}(0) = 0$;

11. $y' = x + y + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 0.1$;

12. $y' = e^{\sin x} + xy,\ \mathrm{y}(0) = 0$;

13. $y' = x^2 y^2 + y\sin x,\ \mathrm{y}(0) = \frac{1}{2}$;

14. $y' = 2x + y^2,\ \mathrm{y}(0) = 2$;

15. $y' = e^x + xy,\ \mathrm{y}(0) = 1$

16. $y' = e^{\sin x} + y,\ \mathrm{y}(0) = 0$;

17. $y' = 2e^y + xy,\ \mathrm{y}(0) = 0$;

18. $y' = \sin x + 0.5y^2, \mathrm{y}(0) = 1$;

19. $y' = xy - y^2 - e^x, \mathrm{y}(0) = 2$;

20. $y' = xy^2 - y,\ \mathrm{y}(0) = 2$;

21. $y' = y^2 x + xy,\ \mathrm{y}(0) = 1$;

22. $y' = y^2 + x\sin y,\ \mathrm{y}(0) = \frac{1}{2}$;

23. $y' = y^2 x^2 - \cos,\ y(0) = 0$;

24. $y' = x^2 + e^{2y},\ \mathrm{y}(0) = 0$;

25. $y' = e^{2x} + xy,\ y(0) = 1$;

26. $y' = x^2 + y^2,\ (0) = 1$;

27. $y' = x^2 y + y^3,\ (0) = 0$;

28. $y' = x + 2y^2 + 3,\ (0) = 0$;

29. $y' = e^{\sin x} + xy,\ y(0) = 0$;

30. $y' = x + y^2,\ y(0) = 1$;

31. $y' = e^x + x^2 y^2, \ y(0) = 0$

32. $y' = 3y^2 + xy, \ y(0) = \frac{1}{3}$;

33. $y' = \sin x + xy, \ y(0) = 1$;

34. $y' = \cos x + xy^2, \ y(0) = 2$;

35. $y' = x^3 + 2xy^2, \ y(0) = 2$;

36. $y' = xy^3 + y, \ y(0) = 1$;

37. $y' = 3x - y^2, \ y(0) = 1$;

38. $y' = \cos y + x^2 y, \ y(0) = 0$;

39. $y' = x^2 y + \sin x, \ y(0) = 1$;

40. $y' = xy^2 - x^2 y + y, \ y(0) = 2$.

ТЕМА 3 РЯДИ ФУР'Є

3.1 Ортогональна система функцій. Ряд Фур'є

Нехай на відрізку [$a;b$] задано дві інтегровні функції $f(x)$ і $g(x)$.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називають ортогональними на відрізку [$a; b$], якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Приклад 3.1 Функції $\sin x$ і $\cos x$ ортогональні на відрізку [$-\pi$; π], оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Нехай $f(x)$ є непарна функція, а $g(x)$- парна. Такі функції на відрізку [$-a;a$], де a - довільне число, ортогональні.

Скінченну чи нескінченну систему (множину) функцій $f(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ називають ортогональною на відрізку [a,b], якщо будь-які дві різні функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f_k(x) f_j(x) dx = 0 \quad \text{для} \quad \kappa \neq j \quad (k, j = 1,2,\ldots,n,\ldots).$$

Приклад 3.2 Довести, що система функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{3.1}$$

ортогональна на відрізку [$-\pi$;π].

Доведення

Дійсно, обчислимо інтеграли:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin \kappa x \cdot \cos lxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\sin(\kappa + l)x + \sin(\kappa - l)x]dx =$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa + l}\cos(\kappa + l)x + \frac{1}{\kappa - l}\cos(\kappa - l)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \kappa \neq l.$$

4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin \kappa x \cdot \sin lxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(\kappa - l)x + \cos(\kappa + l)x]dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa - l}\sin(\kappa - l)x - \frac{1}{\kappa + l}\sin(\kappa + l)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \kappa \neq l.$$

5. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin \kappa x \cdot \cos \kappa xdx = \frac{1}{\kappa}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin \kappa xd(\sin \kappa x) = \frac{1}{2\kappa}\left[\sin^2 \kappa x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos \kappa \cdot \cos lxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(\kappa + l)x + \cos(\kappa - l)x]dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa + l}\sin(\kappa + l)x + \frac{1}{\kappa - l}\cos(\kappa - l)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \kappa \neq l$$

Обчислимо ще такі інтеграли (κ = 1,2, ...):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \kappa xdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 - \cos 2\kappa x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2\kappa}\sin 2\kappa x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi;$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \kappa xdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2\kappa x)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2\kappa}\sin 2\kappa x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Очевидно, що функції які входять в тригонометричну систему (3.1), є періодичними із найменшим періодом 2π. Нагадаємо основні *властивості періодичних функцій.*

1. Якщо *T*- період функції *f(x)*, то *f(x) = f(x + T) = f(x + kT)*, де *k* - будь-яке ціле число.

2. Сума, добуток і частка періодичних функцій є функція періодична.

3. Якщо *f (x)* періодична функція з періодом *T*, то функція *f(ax)* має період $\frac{\text{T}}{a}$.

4. Якщо Т - період функції *f(x*), то визначений інтеграл від неї на будь-якому відрізку довжини Т має одне і те ж саме значення:

$$\int_a^{a+\text{T}} f(x)dx = \int_b^{b+\text{T}} f(x)dx .$$

Найпростішою, і в той же час важливою для застосувань, є періодична функція

$$y = A\sin(\omega\text{t} + \varphi),$$

де A, ω, φ - сталі. Цю функцію називають *гармонікою з амплітудою* $|A|$, *частотою* ω і *початковою фазою* φ.

Користуючись відомою формулою тригонометрії, можемо записати:

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A(\cos\omega t \sin\varphi + \sin\omega t \cos\varphi) .$$

Нехай

$$a = A\sin\varphi, \quad b = A\cos\varphi. \tag{3.2}$$

Впевнимося, що будь-яку гармоніку можна подати у вигляді

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{3.3}$$

і навпаки, будь-яка функція вигляду (3.3) є гармоніка. Щоб впевнитися в цьому, достатньо знайти A і φ з рівнянь (3.2). При цьому одержимо

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

звідки φ легко знаходиться.

В подальшому для гармонік будемо використовувати запис (3.3).

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\tag{3.4}$$

де $a_0, a_к, b_k$ $(k=1,2,...)$ - сталі дійсні числа*,* називають *тригонометричним рядом*, а числа a_0, a_k, b_k $(k=1,2,...)$ - *коефіцієнтами* тригонометричного ряду.

Нехай тригонометричний ряд (3.4) рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\ \pi]$. Позначимо його суму через *f(x):*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,.\tag{3.5}$$

Оскільки члени ряду (3.5) є функції неперервні, а сам ряд, за припущенням, рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\ \pi]$, то його на цьому відрізку можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f(x)dx}=\frac{\mathrm{a}_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right).$$

Інтеграли $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx$ *і* $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx$*,* згідно з рівностями з прикладу 3.2, дорівнюють нулю. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f(x)dx}=\frac{\mathrm{a}_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi a_0\,.$$

Звідси знаходимо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f(x)dx}\,.\tag{3.6}$$

Помножимо тепер ліву і праву частини рівності (3.5) на *cosnx*. Дістанемо такий функціональний ряд

$$f(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\cos nx\,.$$

Можна довести, що цей ряд рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\ \pi]$, якщо на цьому відрізку рівномірно збіжний ряд (3.5). Тоді, інтегруючи почленно попередню рівність, матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx\right).$$

У правій частині цієї рівності всі інтеграли дорівнюють нулю (згідно з рівностями з прикладу 3.2), окрім інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \pi .$$

Тому маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \pi a_n$$

звідки

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1, 2,... \tag{3.7}$$

Об'єднаємо формули (3.6) і (3.7). Матимемо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 0, 1, 2,... \tag{3.8}$$

Помноживши обидві частини рівності (3.5) на *sinnx* і про інтегрувавши в межах від $-\pi$ до π, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2,... \tag{3.9}$$

Формули (3.8) і (3.9) називають формулами Ейлера - Фур'є, а самі числа a_n, b_n, які визначаються цими формулами, називають коефіцієнтами Фур'є функції *f(x)*.

Отже, якщо функція *f(x)* розвивається на відрізку $[-\pi;\pi]$ в рівномірно збіжний тригонометричний ряд (3.5), то коефіцієнти цього ряду визначаються формулами Ейлера-Фур'є, тобто є коефіцієнтами Фур'є функції *f(x)*.

Нехай *f*(x)- довільна інтегровна на відрізку $[-\pi;\pi]$ функція, тоді тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \qquad (3.10)$$

де a_0, a_k, b_k $(k = 1,2, ...)$- коефіцієнти Фур'є функції *f(x),* називають *рядом Фур'є функції f(x).*

Отже, кожній інтегровній на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції *f(x)* відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду (3.10) нічого не відомо, то замість знака = ставлять знак ~, тобто записують

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \qquad (3.11)$$

Має місце теорема.

Теорема 3.1 Якщо функція *f(x)* на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ розвивається в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей тригонометричний ряд єдиний і він є рядом Фур 'є для функції *f(x).*

Зауваження. 1. Оскільки члени ряду Фур'є (3.11) є періодичні функції і мають спільний період 2π, то сума цього ряду (якщо він збіжний) також буде періодичною функцією з періодом 2π. Таким чином, для того, щоб ряд Фур'є функції *f(x)* був збіжним до цієї самої функції, необхідно, щоб *f(x)* була періодичною функцією з періодом 2π, тобто $f(x+2\pi)=f(x)$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. Якщо *f(x)* не є періодичною на деякому відрізку $[a;\ b]\subset[-\pi;\pi]$, то можна побудувати допоміжну інтегровану періодичну функцію *F(x)* з періодом 2π таку, щоб всередині відрізка $[a;\ b]$ вона збігалася з функцією *f(x)*. Тоді, якщо ряд Фур'є функції *F(x)* на відрізку $[-\pi;\pi]$ збіжний до *F(x)*, то для $x\in[a,b]$ він збіжний до *f*(*x*).

3. Якщо неперіодична функція *f(x)* визначена на деякому відрізку $[a\ ;\ b]\subset[-\pi;\pi]$, або навіть на нескінченному інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то можна побудувати інтегровну функцію $\varphi(x)$, яка на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ є збігається з *f(x)* і має період 2π. Якщо ряд Фур'є, побудований для $\varphi(x)$, збіжний до цієї функції, то на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ він зображає задану функцію *f(x).*

Побудова періодичної з періодом 2π функції $\varphi(x)$, яка дорівнює заданій функції *f(x)* на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ або на деякій частині його у випадку, коли *f(x)* визначена на відрізку $[a;\ b]\subset[-\pi;\pi]$, називається *періодичним продовженням функції f(x).*

Щоб періодичне продовження було однозначним і всюди визначеним, треба спочатку *φ(x)* задати на півінтервалі $(-\pi;\pi]$ або $[-\pi;\pi)$. На кінцях відрізка [-π ;π] за періодичне продовження функції *f(x)* вважають

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

З врахуванням теореми 3.1 питання про можливість розвинення заданої функції *f(x)* в тригонометричний ряд зводиться до того, щоб уяснити які властивості повинні бути притаманні функції *f(x)*, щоб побудований для неї ряд Фур'є був збіжним і його сума збігалася з *f(x)?* При з'ясування відповіді на це питання виявляється відмінність між тригонометричними і степеневими рядами: в степеневі ряди можна розвивати лише функції, які мають похідні всіх порядків, а в тригонометричний ряд розвивають будь-яку функцію.

Сформулюємо тут теорему, яка дає достатні умови подання функції *f(x)* рядом Фур'є.

Функцію *f(x)* називають кусково-диференційовною на відрізку [*a; b*], якщо цей відрізок можна розбити скінченним числом точок $x_1, x_2,..., x_{n-1}$ на інтервали $(a;x_1), (x_1;x_2), ... ,(x_{n-1},b)$ так, що всередині кожного інтервалу функція *f(x)* диференційовна, а на кінцях інтервалів і сама функція і її похідна першого порядку мають скінченні односторонні границі.

Теорема 3.2 (Діріхле) Якщо функція *f(x)* періодична з періодом 2π і кусково-диференційовна на відрізку [-π ;π], то її ряд Фур'є збіжний в кожній точці x_0 і має суму

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}. \quad (3.12)$$

Ця сума, очевидно, дорівнює $f(x_0)$, якщо *f(x)* в точці x_0 неперервна.

Приклад 3.3 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Розвязування

Функція є періодичною і на відрізку [-π ;π] кусково-диференційовною, тобто вона задовольняє умови теореми Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка [-π ;π] функція є неперервною, то її ряд

Фур'є, згідно з рівністю (3.12), збіжний на цьому відрізку до функції *f(x) = x:*

$$x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є a_0, a_k, b_k $(k = 1,2,...)$ за формулами Ейлера-Фур'є (3.8) і(3.9):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right]=\frac{1}{nk^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad k=1,2...,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right]=$$

$$=-\frac{2}{k}\cos k\pi+\frac{1}{nk^2}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k},\quad k=1,2,...$$

Таким чином одержуємо ряд

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}\sin kx=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

або

$$x=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+...+(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}+...\right].$$

Приклад 3.4 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x)=|x|, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi)=f(x).$$

Розв'язування

Дана функція періодична і на відрізку [-π ;π] є кусково-диференційовною. Тому вона задовольняє умови теореми Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка [-π ;π] задана функція є неперервною, то її ряд Фур'є, згідно з рівністю (3.12), збіжний на цьому відрізку до функції $f(x) = |x|$, тобто

$$|\mathrm{x}| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є a_0, $a_к$, $b_к$ $(k = 1,2,...)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx\right] = \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right], \quad k = 1,2,....,$$

$$\mathrm{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kxdx = 0, \quad k = 1,2,...$$

Підставивши одержані значення коефіцієнтів, маємо:

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx.$$

3.2 Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

З означення парної і непарної функцій випливає, що:

- якщо $g(x)$ парна функція, то

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx;$$

- якщо *g(x)* непарна функція, то

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0.$$

Справді,

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{-a}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(-x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx =$$
$$= \int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx,$$

оскільки за означенням парної функції *g(-x) = g(x)*. Аналогічно, якщо g(x)- непарна функція, то

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(-x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = -\int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = 0.$$

Зауваження. Якщо функція *f(x)* парна, то функція *f(x)coskx* - парна функція, а *f(x)sin kx*- непарна. Тому

$$\mathrm{a_k} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{3.13}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.14}$$

Таким чином, ряд Фур'є парної функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \tag{3.15}$$

Якщо функція *f(x)* непарна, то функція *f(x)cos kx* також непарна, а *f(x)sin kx*- парна. Маємо:

$$\mathrm{a_k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{3.16}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.17}$$

У цьому випадку ряд Фур'є такий:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx .$$

Приклад 3.5 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x^2 \quad \textit{при} \quad -\pi < x \le \pi, \qquad f(x + 2\pi) = f(x) .$$

Розв'язування

Оскільки функція $f(x)=x^2$ парна, то згідно з формулами (3.136) маємо

$$\mathrm{a}_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\cos kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int\limits_0^{\pi} x\sin kx dx\right) = -\frac{4}{k\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin kx dx =$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos kx dx\right) = \frac{4}{k\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{k\pi}\cdot\frac{\pi}{k}\cos k\pi = (-1)^k\frac{4}{k^2} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{4}{m^2} & \textit{при}\ \ \mathrm{m}\ \ \textit{парному}, \\ -\dfrac{4}{m^2} & \textit{при}\ \ \mathrm{m}\ \ \textit{непарному} \end{array}\right.$$

$b_k=0, \qquad k = 1,2,...$

Отже, ряд Фур'є даної функції такий

$$\mathrm{x}^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + ...\right).$$

Оскільки, функція *f(x)* кусково-монотонна, обмежена і неперервна, то ця рівність виконується в усіх точках числової осі.

Приклад 3.6 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1 \quad \textit{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ \text{-}1 \quad \textit{при} \quad \pi < \mathrm{x} < 2\pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Розв'язування

Обчислюючи коефіцієнти Фур'є даної функції, скористаємося відомою властивістю періодичної функції: *якщо T - період функції f(x), то визначений інтеграл від неї на будь-якому відрізку довжини T має одне і те ж саме значення*

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(x)dx = \int_b^{b+\mathrm{T}} f(x)dx\,.$$

З врахуванням цієї властивості інтеграли на відрізку $[0;\ 2\pi]$ можна замінити відповідними інтегралами на $[-\pi\,;\pi\,]$. Оскільки функція *f(x)* на відрізку $[-\pi\,;\pi\,]$ (за винятком точки $x = 0$) є непарною, то за формулами (3.17) маємо:

$a_к = 0, k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$

$$\mathrm{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx dx + \int_{0}^{\pi}\sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi k}(\cos 0 - \cos k\pi).$$

Звідси випливає, що

$$b_k = \begin{cases} 0, \quad \textit{якщо} \quad \mathrm{k = 2m} \\ \dfrac{4}{\pi k}, \quad \textit{якщо} \quad \mathrm{2m+1} \end{cases}$$

Таким чином, розвинення *f(x)* в ряд Фур'є таке

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right] \tag{3.18}$$

Зокрема, при $x = \frac{\pi}{2}$ одержуємо

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

На рисунку 3.1 зображено графіки кількох частинних сум ряду (3.18); з них бачимо, що із збільшенням номера частинна сума все точніше збігається з *f(x)*.

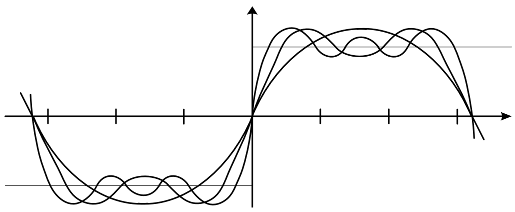


Рисунок 3.1

Приклад 3.7 Розвинути в ряд за синусами функцію $y = \frac{\pi - x}{2}$ в інтервалі $(0; \pi)$.

Розв'язування

Оскільки функцію задано не на всьому відрізку $[-\pi; \pi]$, то потрібно побудувати її періодичне продовження. За умовою вимагається розвинути в ряд, який містив би лише синуси, тому продовижимо цю функцію непарним чином на всю числову вісь (рис. 3.2).

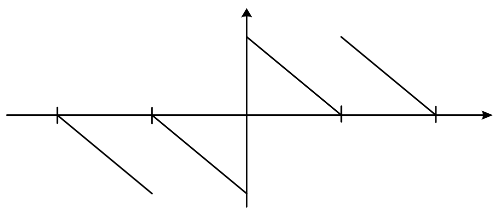


Рисунок 3.2

-1

Тоді, згідно з формулами (3.17) матимемо

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi - x}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right] = -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{k} + \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{k}.$$

Отже, для $x \in (0; \pi]$ одержали

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

3.3 Ряд Фур'є для функції з довільним періодом 2l

До цих пір ми розглядали питання про розвинення в тригонометричний ряд періодичної функції з періодом Т $=2\pi$. Розглянемо тепер те ж запитання для функцій, що мають довільний період Т = 2*l*.

Нехай функція *f(x)* періодична з періодом Т = 2*l*, а $\varphi(y)$ має період Т $=2\pi$. Зробимо заміну змінної $x = \dfrac{l}{\pi}y$, причому $\varphi(y) = f\left(\dfrac{ly}{\pi}\right)$, оскільки

$$\varphi(y+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(y+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}y+2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}y\right) = \varphi(y).$$

Припустимо, що функція φ(y) розвивається в ряд Фур'є

$$\varphi(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ky + b_k\sin ky), \qquad (3.19)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\cos kydy, \quad k = 0, 1, 2.... \qquad (3.20)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\sin kydy, \quad k = 1, 2,... \qquad (3.21)$$

Зробивши в ряді (3.19) та інтегралах (3.20) і (3.21) заміну змінної

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad dy = \frac{\pi}{l}dx,$$

дістанемо ряд Фур'є для функції *f(x)*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x + b_k\sin\frac{\pi k}{l}x), \qquad (3.22)$$

де

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \qquad k = 0, 1, 2,... \qquad (3.23)$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \qquad k = 0, 1, 2,... \qquad (3.24)$$

Зокрема, якщо періодична функція *f(x)* парна, то вона розвивається в ряд Фур'є тільки за косинусами

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{l}x\,,$$

при цьому

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\qquad b_k=0;$$

якщо ж періодична функція *f(x)* непарна, то вона розвивається в ряд Фур'є тільки за синусами

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\ b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\,;$$

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k}{l}dx,\qquad a_k=0\,.$$

Приклад 3.8 Знайти розвинення в ряд Фур'є періодичної функції з періодом 4 (рис. 3.3):

$$f(x)=\begin{cases}-1 \ \textit{при}\ -2<\mathrm{x}<0,\\ 2\ \textit{при}\ 0\le \mathrm{x}\le 2.\end{cases}$$

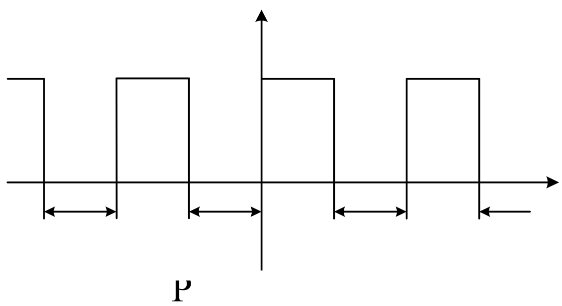


Рисунок 3.3

Розв'язування

За формулами (3.23) та (3.24) знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)dx+\int_0^2 2dx\right)=\frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0}+2x\Big|_0^2\right)=\frac{1}{2}(-2+4)=1\,,$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi k}{2}xdx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi k}{2}xdx+\int_0^2 2\cos\frac{\pi k}{2}xdx\right)=$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0}+\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_{0}^{2}\right)=0,$$

$$b_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi k}{2}xdx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi k}{2}xdx+\int_{0}^{2}2\sin\frac{\pi k}{2}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0}-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{3}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\frac{3}{k\pi}(1-(-1)^k).$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (3.22), одержимо

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x.$$

Приклад 3.9 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію, яка задана на півперіоді $[0;2]$ рівнянням

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}.$$

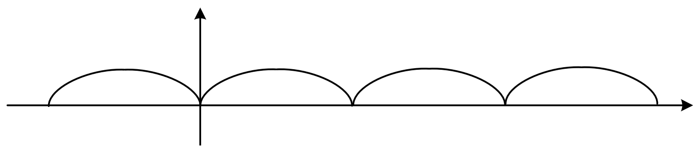


Рисунок 3.4

Розв'язування

Функцію можна розвинути в ряд Фур'є нескінченною множиною способів. Розглянемо два найбільш важливих варіанти розвинення.

1) Довизначимо функцію *f(x)* на півінтервалі [–2;0) парним чином (рис. 3.4). Скориставшись формулами (3.23) та (3.24) при $l=2$ і парністю функції, одержимо

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^2(x-\frac{1}{2}x^2)dx=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3)\Big|_0^2=\frac{2}{3},$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx=\int_0^2(x-\frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi kx}{2}dx.$$

Двічі інтегруючи частинами, знаходимо $b_k=0,\ k=1,2,...$

$$a_k=\int_0^2(x-\frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi kx}{2}dx=\begin{bmatrix} u=x-\frac{1}{2}x^2 & dv=\cos\frac{\pi kx}{2}dx \\ du=(1-x)dx & v=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{\pi kx}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\cdot(x-\frac{1}{2}x^2)\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{k\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}dx=-\frac{2}{k\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=1-x & dv=\sin\frac{\pi kx}{2}dx \\ du=-dx & v=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{\pi kx}{2}\end{bmatrix}=\frac{4}{k^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{k^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{\pi kx}{2}dx=$$

$$=-\frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi-\frac{4}{k^2\pi^2}+\frac{8}{k^3\pi^3}\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2=-\frac{4}{k^2\pi^2}[1+(-1)^k].$$

2) Довизначимо функцію *f(x)* на півінтервалі [–2;0) непарним чином (рис. 3.5).

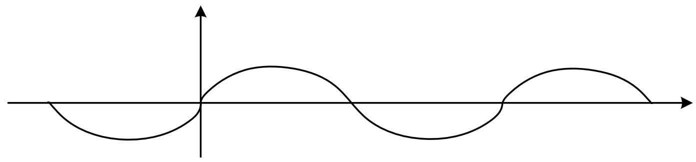


Рисунок 3.5

Тоді

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx=0,$$

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k}{2}xdx=$$

$$=\int_0^2(x-\frac{1}{2}x^2)\sin\frac{\pi kx}{2}dx=\begin{bmatrix} u=x-\frac{1}{2}x^2 & dv=\sin\frac{\pi kx}{2}dx \\ du=(1-x)dx & v=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{\pi kx}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\cdot(x-\frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{k\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx=\frac{2}{k\pi}\int_0^2(1-x)cos\frac{\pi kx}{2}dx=$$

у

-2 0 1

$$=\begin{bmatrix} u=1-x & dv=cos\dfrac{\pi kx}{2}dx \\ du=-dx & v=\dfrac{2}{k\pi}\sin\dfrac{\pi kx}{2} \end{bmatrix}=\frac{4}{k^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{k^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx=$$

$$=-\frac{8}{k^3\pi^3}cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2=-\frac{8}{k^3\pi^3}cos\pi k+\frac{8}{k^3\pi^3}=\frac{8}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k].$$

Отже,

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\sin\frac{\pi kx}{2}=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+...\right).$$

Зауваження. В багатьох задачах потрібно розвинути в ряд Фур'є функцію не на відрізку $[-l;l]$, а на відрізку $[0;2l]$. В цьому випадку в усіх формулах для обчислення коефіцієнтів Фур'є змінюються відповідні межі інтегрування:

$$a_k=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\quad k=0,1,2... \tag{3.25}$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx,\quad k=1,2... \tag{3.26}$$

Для будь-якого періоду $T=2l$ після введення величини

$$\omega_k=\frac{\pi}{l}k=\frac{2\pi}{T}k,\quad k=1,2,... \tag{3.27}$$

формули можна (3.25) та (3.26) можна записати так

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\omega_k xdx,\quad k=0,1,2,..., \text{ або } a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\omega_k xdx; \tag{3.28}$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\omega_k xdx,\quad k=1,2,..., \text{ або } b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\omega_k xdx. \tag{3.29}$$

Приклад 3.10 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & при \ 0 \le x \le 1, \\ 0, & при \ 1 < x < 2. \end{cases}$$

Розв'язування

В нашому випадку $T = 2$, $\omega = \pi$. Згідно з формулами (3.28) та (3.29) маємо

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos k\pi x dx = \int_0^1 x\cos k\pi x dx + \int_1^2 \cos k\pi x dx = \frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx + \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}(\sin 2k\pi - \sin k\pi) = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \int_0^2 f(x)\sin k\pi x dx = \int_0^1 x\sin k\pi x dx + \int_1^2 \sin k\pi x dx = -\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\Big|_0^1 - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}.$$

Таким чином, одержуємо таке розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi x - \frac{1}{\pi}\sin \pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin \pi x - ...$$

3.4 Ряд Фур'є в комплексній формі

Скориставшись формулами Ейлера (див. п. 2.5), ряд Фур'є можна записати в більш компактній формі. Справді, функції $\cos kx$, $\sin kx$ за формулами Ейлера (2.29) можна записати так:

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right), \ \sin kx = \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx}), \ k = 1, 2, ... \quad (3.30)$$

Тоді, підставивши значення *cos kx, sin kx* в ряд (3.11), одержимо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_k - jb_k)e^{jkx} + \frac{1}{2}(a_k + jb_k)e^{-jkx}\right]. \qquad (3.31)$$

Введемо такі позначення

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0,\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k),\ c_k = \frac{1}{2}(a_k + jb_k),\ k = 1,\ 2,\ ... \qquad (3.32)$$

Тоді ряд (3.31) можна записати так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}\ . \qquad (3.33)$$

Це і є *комплексна форма ряду Фур'є функції f(x)*. Користуючись формулами Ейлера-Фур'є та формулами (3.32), можна вивести такі формули для знаходження коефіцієнтів:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx}dx\,,\ \ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,... \qquad (3.34)$$

Якщо функція *f(x)* періодична з періодом *2l*, то ряд Фур'є в комплексній формі запишеться так

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{k\pi}{l}x}\ . \qquad (3.35)$$

Коефіцієнти ряду c_k обчислюються за допомогою формул

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-j\frac{k\pi}{l}x}dx\,,\ \ k = (0,\ \pm 1,\ \pm 2,...)\,. \qquad (3.36)$$

Останні формули для будь-якого періоду $T = 2l$ після введення величини $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}$ можна записати у вигляді

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2k\pi}{T}x}, \qquad (3.37)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega x} dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-j\frac{2k\pi}{T}x} dx. \qquad (3.38)$$

Для електротехніки і радіотехніки характерна така термінологія. Вирази $e^{j\frac{k\pi}{l}x}$ називають гармоніками, числа $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ називають хвильовими числами функції

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k x}. \qquad (3.39)$$

Сукупність хвильових чисел називають спектром. Коефіцієнти c_k, які визначаються формулами (3.36), називають комплексною амплітудою. Слід відмітити, що при побудові амплітудних спектрів обчислюють модуль комплексних чисел c_k, а при побудові фазового спектра – аргументи.

Приклад 3.11 Подати рядом Фур'є в комплексній формі функцію *f(x)* періоду 2π, визначену таким чином

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язування

Коефіцієнти Фур'є в комплексній формі такі:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-x} e^{-jkx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-(1+jk)x} dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{e^{-(1+jk)x}}{1+jk}\Bigg|_0^\pi = \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1-jk}{1+k^2}.$$

Оскільки функція *f(x)* задовольняє умови розвинення в ряд Фур'є в усіх точках неперервності *f(x)*, то одержимо

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1-jk}{1+k^2} e^{jkx}.$$

Приклад 3.12 Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію *f(x)*, яка задана графіком (рис. 3.6). Побудувати її амплітудний і фазовий спектри.

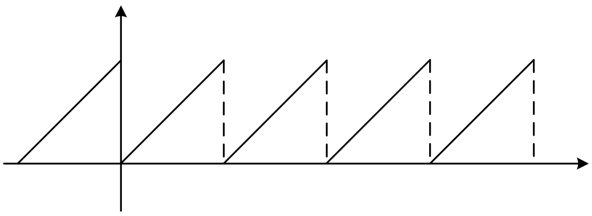


Рисунок 3.6

Розв'язування

В нашому випадку Т=1 – період функції, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ - основна частота.

Скориставшись формулами (3.38) для коефіцієнтів Фур'є, матимемо

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt = \int_0^1 te^{-jk\omega t}dt = \left|\begin{matrix} u = t & dv = e^{-jk\omega t}dt \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{jk\omega}e^{-ik\omega t}\end{matrix}\right| = -\frac{1}{jk\omega}te^{-jk\omega t}\Big|_0^1 + \frac{1}{jk\omega}\int_0^1 e^{-jk\omega t}dt =$$

$$= -\frac{1}{jk\omega}e^{-jk\omega t} + \frac{1}{k^2\omega^2}e^{-jk\omega t}\Big|_0^1 = -\frac{1}{ik\omega}e^{-jk\omega} + \frac{1}{k^2\omega^2}(e^{-jk\omega} - 1) = -\frac{1}{jk2\pi} = \frac{j}{2k\pi},$$

$k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ оскільки $\omega = 2\pi$ і $e^{-j2k\pi} = 1$. Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є таке

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2k\pi}e^{jk\omega x}.$$

Для побудови амплітудного і фазового спектрів врахуємо, що

$A_0 = |c_0| = \frac{1}{2}$, $\qquad A_k = |c_k| = \frac{1}{2k\pi}$, $\qquad \varphi_0 = \arg c_0 = 0$,

$$\varphi_k = \arg c_k = \arg \frac{j}{2k\pi} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & k > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & k < 0, \end{cases} \qquad k = \pm 1, \pm 2, ...$$

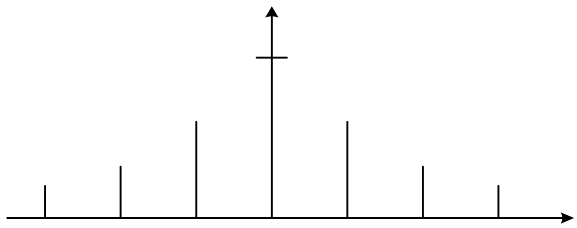


Рисунок 3.7

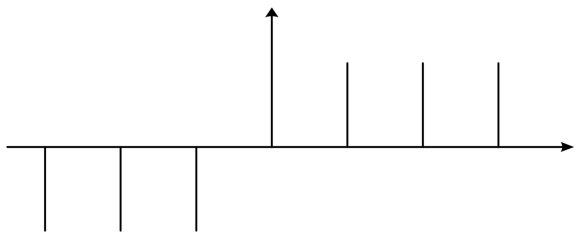


Рисунок 3.8

Амплітудний і фазовий спектри мають вигляд наведений, відповідно, на рис. 3.7 та 3.8.

3.5 Узагальнений ряд Фур'є

Нехай на відрізку [*a;b*] задано довільну (не обов'язково тригонометричну) ортогональну систему функцій $\{\varphi_к(x)\}$(k = 0,1,2,...), і на цьому відрізку задано деяку інтегровну функцію *f(x)*. Поставимо задачу: розвинути в ряд функцію *f(x)* за функціями $\varphi_к(x)(k = 0,1,2,...)$. Для цього припустимо, що *f(x)* є сумою рівномірно збіжного ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \tag{3.40}$$

Припустимо, що функції $\varphi_k(x)$ є інтегровними на відрізку [*a, b*]. Тоді, помноживши обидві частини рівності (3.40) на функцію $\varphi_m(x)$ (*m = 0, 1, 2,...*) і проінтегрувавши результат в межах від *a* до *b*, дістанемо

$$\int_a^b f(x)\varphi_{\mathrm{m}}(x)dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx, \; m = 0, \; 1, \; ... \tag{3.41}$$

Нехай

$$\int_a^b \varphi_m^2(x)dx = \lambda m > 0\,, \tag{3.42}$$

тоді з рівності (3.41) знаходимо

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx\,,\ \ m = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.43}$$

Отже, якщо функція $f(x)$ є сумою рівномірно збіжного ряду (3.40), то коефіцієнти цього ряду визначаються формулами (3.43).

Легко бачити, що формули Ейлера-Фур'є, виведені для коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є, є частинним випадком формул (3.43).

Формули (3.43) називають *узагальненими формулами Ейлера-Фур'є*, числа c_m називають *узагальненими коефіцієнтами Фур'є*, а функціональний ряд (3.40) називають *узагальненим рядом Фур'є*.

Щодо узагальненого ряду Фур'є, то можна стверджувати, що кожній інтегровній на відрізку [a, b] функції відповідає свій узагальнений ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \tag{3.44}$$

де c_k - узагальнені коефіцієнти Фур'є.

3.6 Інтеграл Фур'є

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному інтервалі $(-\infty;\infty)$ і абсолютно інтегровна на ньому, тобто існує інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = I\,. \tag{3.45}$$

Припустимо, що функція $f(x)$ розвивається на будь-якому інтервалі ($-l$; l) в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x)\,, \tag{3.46}$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx\,,\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx\,. \qquad (3.47)$$

Підставляючи вирази для коефіцієнтів a_k і b_k за формулами (3.47) в ряд (3.46), можна записати

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi kt}{l}dt\right)\cos\frac{\pi kx}{l} + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi kt}{l}dt\right)\sin\frac{\pi kx}{l} =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{\pi kt}{l}\cdot\cos\frac{\pi kx}{l} + \sin\frac{\pi kt}{l}\cdot\sin\frac{\pi kx}{l}\right]dt\,,$$

або

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi k(t-x)}{l}dt\,. \qquad (3.48)$$

Щоб одержати подання функції, визначеної скрізь на числовій осі, у вигляді ряду, необхідно у виразі (3.48) перейти до границі при $n \to \infty$. Введемо такі позначення:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l},\ \omega_2 = \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \omega_k = \frac{k\pi}{l},\ \text{і}\ \Delta\omega_k = \frac{\pi}{l}\,. \qquad (3.49)$$

Підставляючи вирази (3.49) у рівність (3.48), одержуємо

$$f(x) = \int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt\right)\Delta\omega_k\,. \qquad (3.50)$$

Оскільки функція *f(x)* абсолютно інтегровна, то при $l \to +\infty$ перший член в правій частині останньої рівності прямує до нуля. Дійсно,

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left|f(t)\right|dt < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt = \frac{1}{2l}I \to 0\,.$$

Розглянемо тепер другий доданок в рівності (3.50). Маємо

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt\right)\Delta\omega_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta\omega_k}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt .$$

Вважаючи x фіксованим, позначимо

$$\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt = F(\omega_k;x).$$

Тоді можемо записати

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}F(\omega_k;x)\Delta\omega_k .$$

Вираз у правій частині цієї рівності за своєю структурою є інтегральною сумою для функції $F(\omega_k;x)$, тому будемо мати

$$\lim_{\Delta\omega k\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}F(\omega_k;x)\Delta\omega_k\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(\omega;x)d\omega ,$$

де

$$F(\omega;x) = \lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt .$$

Таким чином,

$$f(x) = \lim_{\Delta\omega k\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt ,$$

або

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt\right]d\omega . \qquad (3.51)$$

Формула (3.51) називається *формулою Фур'є*, а подвійний невласний інтеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt \qquad (3.52)$$

інтегралом Фур'є для функції *f(x)*.

Таким чином, функцію, визначену скрізь на числовій осі, можна записати у вигляді (3.51) в точках неперервності. Як відомо, в ряд Фур'є можна розвивати і функції, що мають скінченне число точок розриву першого роду. Сума ряду Фур'є в таких точках дорівнює $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$, де $f(x-0)$ і $f(x+0)$ - ліва і права границя функції *f(x)*.

При розвиненні функції *f(x)* в інтеграл Фур'є також допускається наявність скінченного числа точок розриву першого роду, тому можна записати

$$I_{\phi}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right]d\omega=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)) \qquad (3.53)$$

Якщо *f(x)* в точці *x* неперервна, то $f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Таким чином, якщо функція *f(x)*, визначена скрізь на числовій осі, абсолютно інтегровна і на будь-якому скінченному проміжку кусково-монотонна або кусково-гладка, то для цієї функції існує інтеграл Фур'є і виконується рівність (3.53).

Формулу (3.51) можна записати так:

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt\right)\sin\omega x\right]d\omega .$$

Введемо позначення

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt, \qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt, \qquad (3.54)$$

тоді

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega \qquad (3.55)$$

або

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}K(\omega)\sin(\omega x-\delta(\omega))d\omega , \qquad (3.56)$$

де $K(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$, $\quad \delta(\omega)=arctg\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$.

З формули (3.56) випливає, що функція *f(x)* подається інтегралом Фур'є у вигляді "суми" гармонік (з амплітудою *K(ω)* і початковими фазами $\delta(\omega)$, кутові частоти яких ω змінюються неперервно в інтервалі $[0;\ +\infty)$).

У зв'язку з тим, що при розвиненні функції *f(x)* в ряд Фур'є з періодом $2l$ кутові частоти гармонік набувають дискретних значень $\omega_1 = \dfrac{\pi}{l}$, $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{l}$, …, $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$, …, то говорять про точковий спектр частот ряду Фур'є і про неперервний спектр інтеграла Фур'є.

Якщо для періодичної функції амплітудний і фазовий спектри є лінійчатими, то для неперіодичної функції, поданої інтегралом Фур'є, вони є суцільними.

Розглянемо тепер частинні випадки подання функції інтегралом Фур'є.

1. Нехай *f(x)* - парна функція. Тоді $f(x)\cos\omega x$ також парна функція, а $f(x)\sin\omega x$ - непарна функція. В цьому випадку

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt = 0.$$

Формула Фур'є (3.55) для парної функції *f(x*) набуде вигляду

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega x\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt\right]d\omega. \tag{3.57}$$

Формула (3.57) називається *косинус-формулою Фур 'є.*

2. Нехай *f(x)* - непарна функція. В цьому випадку $f(x)\cos\omega x$ - непарна, а $f(x)\sin\omega x$ - парна функція і

$$A(\omega) = 0, \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt,$$

тому формула (3.55) для непарної функції *f(x)* така

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\omega x\left[\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt\right]d\omega. \tag{3.58}$$

Остання формула називається *синус-формулою Фур'є.*

3. Нехай *f(x)* задана лише на півінтервалі $[0;\ +\infty)$. Довизначимо її в проміжку $[-\infty;\ 0)$ за допомогою функції $\varphi(x)$. Одержимо функцію

$$F(x)=\begin{cases}\varphi(x)\ \ при\ \ x<0\\ f(x)\ \ при\ \ x\geq 0\end{cases},$$

яка визначена в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Інтеграл Фур'є для функції *F(x)* матиме вигляд

$$\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\cos\omega(x-t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cos\omega(x-t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt, \qquad (3.59)$$

де
$$\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-0)+\varphi(x+0)}{2}\ \ при\ \ x<0,\\ \dfrac{\varphi(x-0)+f(x+0)}{2}\ \ при\ \ x=0,\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\ \ при\ \ x>0.\end{cases}$$

Якщо *φ(x)* вибрати так, щоб функція *F(x)* стала парною або непарною функцією, то формула (3.59) набуде вигляду (3.57) або (3.58) відповідно.

В електротехніці, в автоматиці, і особливо в радіотехніці і техніці зв'язку досить часто зустрічаються електричні напруги, струми, магнітні потоки та інші величини, які змінюються в часі за несинусоїдальним, неперіодичним законом. В цих випадках для дослідження процесів, які відбуваються в електро- і радіотехнічних пристроях, застосовують розвинення таких функцій в інтеграл Фур'є.

Приклад 3.13 Подати інтегралом Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}1,\quad 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2},\quad x=0,\ \ i\ \ x=1,.\\ 0,\quad x<0,\ \ i\ \ x>1.\end{cases}$$

Розв'язування

Дана функція є кусково-гладкою, оскільки вона складається з трьох гладких частин: $y=0$ на $(-\infty;\ 0)$, $y=1$ на $(0;\ 1)$ і $y=0$ на $(1;\ \infty)$ і має дві точки розриву першого роду $x=0$, $x=1$. Очевидно, що дана функція абсолютно інтегровна на всій числовій осі, оскільки поза відрізком $[0;1]$ вона дорівнює нулю, і інтеграл від неї по всій числовій осі зведеться до інтеграла по відрізку $[0;1]$.

Таким чином, цю функцію можна подати інтегралом Фур'є; за формулою (3.51) маємо

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}d\omega\int\limits_0^{1}1\cdot\cos\omega(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\omega(t-x)}{\omega}\Bigg|_0^1 d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\omega(1-x)+\sin\omega x}{\omega}d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega(1-2x)}{2}}{\omega}d\omega.$$

В точках розриву *x=0* і ч *x*=1, одержане подання зберігається, оскільки в цих точках

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2}=f(x).$$

Зокрема, при *x=0* одержимо

$$f(0)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega,$$

що рівносильно рівності

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 3.14 Подати інтегралом Фур'є функцію (рис. 3.9)

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}\ \text{при}\ 0>\text{x},\\ 0\ \text{при}\ \text{x}=0,\\ e^{-x}\ \text{при}\ 0<\text{x}.\end{cases}$$

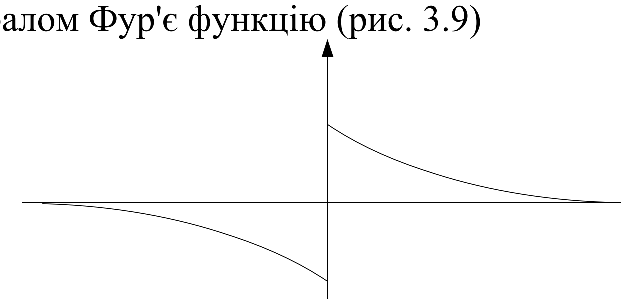


Рисунок 3.9

Розв'язування

Ця функція є кусково-гладкою, оскільки вона складається з двох гладких частин і має один розрив першого роду в точці *x=0*.

Покажемо, що функція *f(x)* абсолютно інтегровна на всій числовій осі.

Для цього достатньо показати, що збіжним є інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$.

Дійсно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = (1-0)-(0-1) = 2.$$

Отже, функцію *f(x)* можна подати інтегралом Фур'є, а оскільки вона є непарною, то можна скористатися формулою (3.58):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\sin\omega x d\omega\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\omega t dt.$$

Інтегруючи частинами, знайдемо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\omega t dt = -e^{-t}\sin\omega t\Big|_{0}^{\infty} + \omega\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\cos\omega t dt = \omega\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\cos\omega t dt =$$

$$= -\omega e^{-t}\cos\omega t\Big|_{0}^{\infty} - \omega^2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\omega t dt = \omega - \omega^2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\omega t dt.$$

Звідки

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\omega t dt = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Таким чином,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha.$$

3.7 Комплексна форма інтеграла Фур'є

Маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)dt = 0$$

як інтеграл від непарної функції за змінною ω із симетричними межами;

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt$$

як інтеграл від парної функції за змінною ω.

Запишемо формулу (3.51) у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt + j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)dt =$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\omega(t-x) + j\sin\omega(t-x)]dt.$$

Зробивши заміну $\cos\omega(t-x) + i\sin\omega(t-x) = e^{j\omega(t-x)}$, одержуємо *інтеграл Фур'є в комплексній формі*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega(t-x)}dt, \tag{3.60}$$

або

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega x}dt. \tag{3.61}$$

Позначимо

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt, \tag{3.62}$$

тоді інтеграл Фур'є запишеться так

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-j\omega x}d\omega. \tag{3.63}$$

Функцію $F(x)$ називають *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$, або, враховуючи фізичні міркування, *спектральною щільністю функції* $f(x)$. Модуль $|F(\omega)|$ називається *амплітудним спектром функції* $f(x)$. Формулу (3.63) називають оберненим перетворенням Фур'є.

Одержані вище формули (3.57) і (3.58) для неперервної функції $f(x)$, у випадку коли вона парна або непарна, можна відповідно записати так:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega, \tag{3.64}$$

де

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt \tag{3.65}$$

і

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega, \tag{3.66}$$

де

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt. \tag{3.67}$$

Функції $F_c(\omega)$ і $F_s(\omega)$ називаються відповідно *косинус-перетворенням і синус-перетворенням Фур'є* для даної функції $f(x)$. Рівності (3.64) і (3.66) визначають відповідно *обернені косинус- і синус-перетворення*.

З рівності (3.62) випливає, $F_c(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega)$, $F_s(\omega)=\operatorname{Im} iF(\omega)$.

Приклад 3.15 Знайти спектральну функцію і амплітудний спектр функції

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad \mathrm{x}>0 \\ 0 & \text{при} \quad \mathrm{x}<0 \end{cases} (a>0).$$

Подати $f(x)$ комплексною формою ряду Фур'є.

Розв'язування

За формулою (3.62) знаходимо спектральну щільність функції, враховуючи, що при $\mathrm{t}<0$ $f(x)=0$.

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{j\omega x}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-(a+j\omega)t}dt=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+j\omega)},$$

оскільки підстановка верхньої межі дає нуль. Дійсно, за формулами Ейлера маємо:

$$e^{-(a+j\omega)t} = e^{-at}e^{-j\omega t} = e^{-at}(\cos\omega t - j\sin\omega t) = e^{-at}\cos\omega t - je^{-at}\sin\omega t\,.$$

При $t \to +\infty$, внаслідок того що $a > 0$, e^{-at} - нескінченно мала функція, а $\cos\omega t$ і $\sin\omega t$ - обмежені функції. Отже, і дійсна, і уявні частини функції $e^{-(a+j\omega)t}$ прямують до нуля. Це означає, що

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j\omega)t} = 0.$$

Амплітудний спектр

$$|F(\omega)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+j\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a+j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+\omega^2}}\,.$$

Комплексна форма (3.60) інтегралу Фур'є даної функції має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+j\omega}e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Приклад 3.16 Подати інтегралом Фур'є функцію (прямокутний імпульс)

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ h \text{ при } 0 \le t \le \tau, \\ 0 \text{ при } t > \tau. \end{cases}$$

(рис. 3.10).

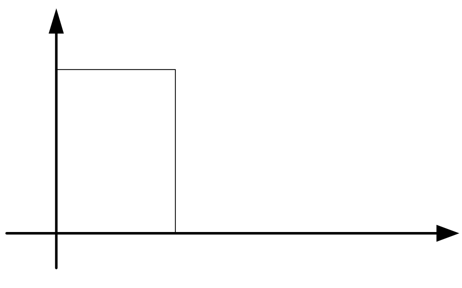


Рисунок 3.10

Розв'язування

Функція $f(t)$ задовольняє всі умови інтегральної теореми Фур'є. Обчислимо спектральну функцію:

$$F(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\tau} he^{-j\omega t}dt = \frac{-h}{\sqrt{2\pi}\,j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau} = \frac{h}{\sqrt{2\pi}\,j\omega}\left(1-e^{-j\omega\tau}\right).$$

Отже, шукане подання матиме вигляд

$$f(t)=\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}\left(1-e^{-j\omega\tau}\right)e^{-j\omega t}d\omega.$$

Виділивши тут дійсну і уявну частини, можна записати одержаний результат в дійсній формі

$$f(t)=\frac{2h}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\frac{\omega(\tau-2\tau)}{2}}{\omega}d\omega.$$

Приклад 3.17 Розвинути в ряд Фур'є функцію (трикутний імпульс)

$$f(x)=\begin{cases}h\left(1-\frac{2}{\Delta}|x|\right) & \text{при } |\mathrm{x}|\le\frac{\Delta}{2},\\ 0 \quad \text{при} & |\mathrm{x}|\ge\frac{\Delta}{2}.\end{cases}$$

Розв'язування

Функція $f(x)$ парна, тому можна застосувати формулу (3.64). Знайдемо косинус-перетворення $f(x)$:

$$F_{\text{c}}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\cos\omega t dt=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\Delta}{2}}\left(1-\frac{2t}{\Delta}\right)\cos\omega t dt\cdot.$$

Інтегруючи частинами, одержимо:

$$F_{\text{c}}(\omega)=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{2t}{\Delta}\right)\sin\omega t\Big|_{0}^{\frac{\Delta}{2}}+\frac{2}{\Delta\omega}\int\limits_{0}^{\frac{\Delta}{2}}\sin\omega t dt\right]\cdot=$$

$$=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{2}{\omega^2\Delta}\cos\omega t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\Delta}{2}}=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\omega^2\Delta}\left(1-\cos\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

$$=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2}{\omega^2\Delta}\cdot 2\sin^2\frac{\omega\Delta}{2}=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega\Delta}{4}}{\frac{\omega\Delta}{4}}\right)^2\frac{\Delta}{4}.$$

Тоді

$$f(x)=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}F_{\text{c}}(\omega)\cos\omega t dt=\frac{h\Delta}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega\Delta}{4}}{\frac{\omega\Delta}{4}}\right)^2\cos\omega x d\omega.$$

Приклад 3.18 Розвинути в інтеграл Фур'є функцію

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ (рис. 3.11).}$$

(Ця функція часто зустрічається в радіотехніці. Сигнал такої форми називається *дзвоноподібним імпульсом*).

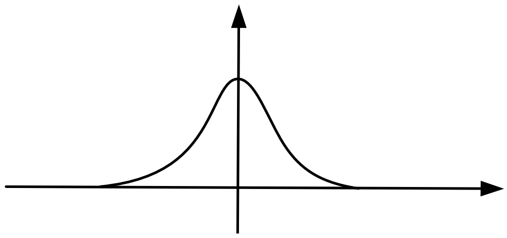


Рисунок 3.11

Розв'язування

Знайдемо:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cos\omega t dt=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{\frac{x^2}{2}}\cos\omega\sigma\tau d\tau\,.$$

(Тут виконана заміна змінної $t/\tau=\sigma$). Запишемо останню рівність у вигляді

$$F_c(\omega)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{\frac{t^2}{2}}\cos\omega\sigma t dt\,.$$

Розглянемо невласний інтеграл, який залежить від параметра λ:

$$S(\lambda)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\lambda t dt\,. \tag{3.68}$$

Можна показати, що інтеграл (3.68) має похідну за λ, причому,

$$S'(\lambda)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\lambda t\right)dt=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\lambda t dt\,.$$

Проінтегрувавши частинами, одержимо

$$S'(\lambda) = -\left(-\sin\lambda t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos\lambda t dt \right) = -\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos\lambda t dt ,$$

звідки

$$S'(\lambda) = -\lambda S(\lambda).$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, одержимо:

$$S(\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \tag{3.69}$$

Позначивши $\lambda = \omega\sigma$, маємо:

$$F_c(\omega) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} Ce^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} ,$$

тоді

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega = C\frac{2\sigma}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \cos\omega x d\omega . \tag{3.70}$$

Прийнявши в інтегралі (3.70) $\omega = \omega_1/\sigma$, знайдемо сталу C. Матимемо:

$$f(x) = C\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{\frac{\omega_1^2}{2}} \cos\frac{\omega_1 x}{\sigma} d\omega_1 .$$

Приймаючи $\omega_1 = t$, знайдемо:

$$f(x) = C\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \cos\frac{x}{\sigma} t dt.$$

Беручи до уваги рівність (3.68), останню формулу запишемо так:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}C\cdot S\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

але з рівності (3.69)

$$S\left(\frac{x}{\sigma}\right)=Ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}=Ce^{\frac{x}{2\sigma^2}^{2}}, \text{\textit{тоді}}\ \ f(x)=\frac{2}{\pi}C^2\cdot f(x),$$

звідки $\mathrm{C}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$

Отже, інтеграл Фур'є для дзвоноподібного імпульсу має вигляд

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\cos\omega x d\omega .$$

Перетворення Фур'є дає можливість одержати зручне і наочне уявлення процесів, які відбуваються в електро- і радіотехнічних колах при наявності в них електричних і магнітних величин, які змінюються у часі за несинусоїдним неперіодичним законом.

В радіотехнічній літературі інтеграл Фур'є в комплексній формі часто записують так:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega ,$$

де комплексна величина

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \left(\mathrm{j}^2=-1\right)$$

називається спектральною щільністю або спектральною характеристикою, а її модуль $S(\omega)$ - спектром функції (сигналу, часової функції) $f(t)$. При цьому

$$S(j\omega)=S(\omega)e^{-j\omega(\omega)}=a(\omega)-jb(\omega),$$

$$a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt, \quad b(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt,$$

$$S(\omega)=\sqrt{[a(\omega)]^2+[b(\omega)]^2}, \qquad \alpha(\omega)=arctg\,\frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$$

Модуль спектральної щільності $S(\omega)$ - функція парна, фаза спектральної щільності $\alpha(\omega)$ – непарна функція частоти ω.

Приклад 3.19 Знайти спектральну щільність, модуль і фазу спектральної щільності експоненціального імпульсу

$$f(x)=\begin{cases} Be^{-\beta t} & \text{при} \quad t\geq 0, \\ 0 \quad \text{при} & t<0. \end{cases}$$

Розв'язування

Маємо

$$S(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Be^{-(\beta+j\omega)t}dt=\frac{B}{\beta+j\omega}=\frac{B(\beta+j\omega)}{\beta^2+\omega^2};$$

$$a(\omega)=\frac{B\beta}{\beta^2+\omega^2};\ \mathrm{d}(\omega)=\frac{B\omega}{\beta^2+\omega^2};$$

$$S(\omega)=\sqrt{[a(\omega)]^2+[b(\omega)]^2}=\frac{B}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}};$$

$$\alpha(\omega)=arctg\,\frac{b(\omega)}{a(\omega)}=-arctg\,\frac{\omega}{\beta}.$$

Графіки $f(t), S(\omega)$ і $\alpha(\omega)$ зображені на рис. 3.12.

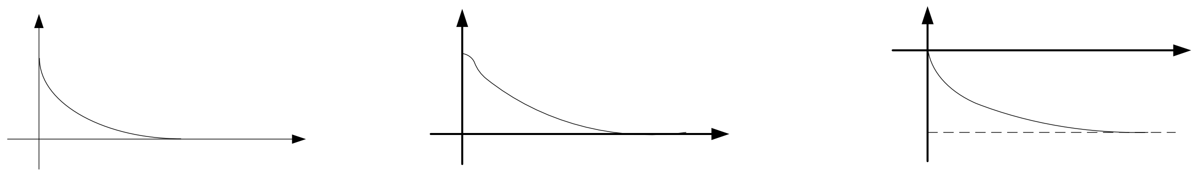


Рисунок 3.12

Приклад 3.20 Знайти спектральну щільність і модуль спектральної щільності прямокутного імпульсу

$$f(t)=\begin{cases} B & \text{при} \quad 0 \le \mathrm{t} \le \tau, \\ 0 & \text{при} \quad \mathrm{t} < 0, \mathrm{t} > \tau. \end{cases}$$

Розв'язування

Маємо

$$\mathrm{S}(\mathrm{j}\omega)=\int_0^\tau Be^{-j\omega t}dt=-\frac{B}{j\omega}e^{-j\omega t}\Bigg|_0^\tau=\frac{B\left(1-e^{-j\omega t}\right)}{j\omega}=\frac{Bj\left(e^{-j\omega t}-1\right)}{\omega}=$$

$$\frac{Bj}{\omega}(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau-1)=\frac{Bj}{\omega}[\cos\omega\tau-j(1-\cos\omega\tau)],$$

$$S(\omega)=\frac{Bj}{\omega}\sqrt{\sin^2\omega\tau+(1-\cos\omega\tau)^2}=\frac{Bj}{\omega}\sqrt{2(1-\cos\omega\tau)}=\frac{Bj}{\omega}\left|\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|.$$

Графіки функцій $f(t)$ і $S(\omega)$ зображені на рис. 3.13.

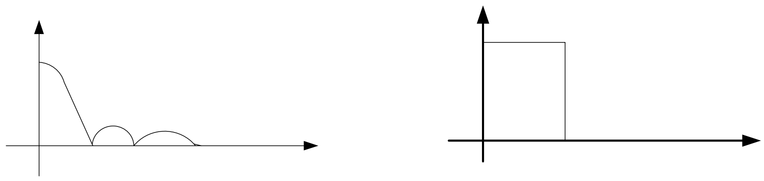


Рисунок 3.13

3.8 Приклади розв'язування типових задач

Приклад 3.21 Побудувати ряд Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів $f(t)$ (рис. 3.14):

$$f(t)=\begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \le t \le 0; \\ -1, & 0 \le t \le \frac{T}{2}, \end{cases}$$

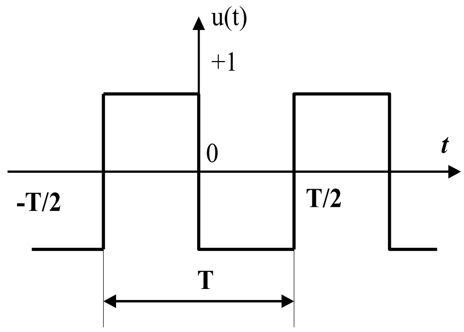


Рисунок 3.14

f(t)

використавши тригонометричну та комплексну форму цього ряду.

Розв'язування

Для знаходження тригонометричної форми ряду Фур'є використаємо формули (3.27) – (3.29). Маємо $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{T}$;

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} dt + \int_{0}^{T/2}(-1)dt\right) = \frac{2}{T}\left(t\Big|_{-T/2}^{0} - t\Big|_{0}^{T/2}\right) = \frac{2}{T}\left(0 + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - 0\right) = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_k t dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}\cos\omega_k t dt + \int_{0}^{T/2}(-1)\cos\omega_k t dt\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{-T/2}^{0} - \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{0}^{T/2}\right) = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_k t dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}\sin\omega_k t dt + \int_{0}^{T/2}(-1)\sin\omega_k t dt\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(-\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{-T/2}^{0} + \frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{0}^{T/2}\right) = \frac{2}{T}\left(-\frac{1}{\omega_k} + \frac{\cos\omega_k \frac{T}{2}}{\omega_k} + \frac{\cos\omega_k \frac{T}{2}}{\omega_k} - \frac{1}{\omega_k}\right) =$$

$$= \frac{4}{T}\left(-\frac{T}{2\pi k} + \frac{T\cos\pi k}{2\pi k}\right) = \frac{2}{\pi k}\left(-1 + \cos\pi k\right) = \frac{2}{\pi k}\left(-1 + (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \dfrac{-4}{\pi k}, & k = 2m-1, m \in Z. \end{cases}$$

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції $f(t)$ такий:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi(2m-1)}{T}t}{2m-1}.$$

Для подання ряду в комплексній формі скористаємось формулами (3.37) та (3.38). Маємо

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j\omega k t}dt=\frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}e^{-j\omega k t}dt-\int_{0}^{T/2}e^{-j\omega k t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\left(-\left.\frac{e^{-j\omega k t}}{j\omega_k}\right|_{-T/2}^{0}+\left.\frac{e^{-j\omega k t}}{j\omega_k}\right|_{0}^{T/2}\right)=\frac{1}{T}\left(-\frac{T}{2\pi kj}+\frac{Te^{\pi kj}}{2\pi kj}+\frac{Te^{-\pi kj}}{2\pi kj}-\frac{T}{2\pi kj}\right)=\frac{1}{2\pi kj}\left(e^{\pi kj}+e^{-\pi kj}-2\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\cos z=\dfrac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}\\ j^2=-1\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi kj}\left(2\cos\pi k-2\right)=j\,\frac{1-\cos\pi k}{\pi k}.$$

Таким чином, ряд Фур’є в комплексній формі для заданої функції такий:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}j\,\frac{1-\cos\pi k}{\pi k}e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\ .$$

Приклад 3.22 Розкласти в ряд Фур’є в дійсній формі функцію $f(t)=2t$ (рис. 3.15, а), задану на відрізку $[0,2]$: а) за косинусами; б) за синусами; в) в повний ряд Фур’є, беручи за період T довжину відрізка.

Розв’язування

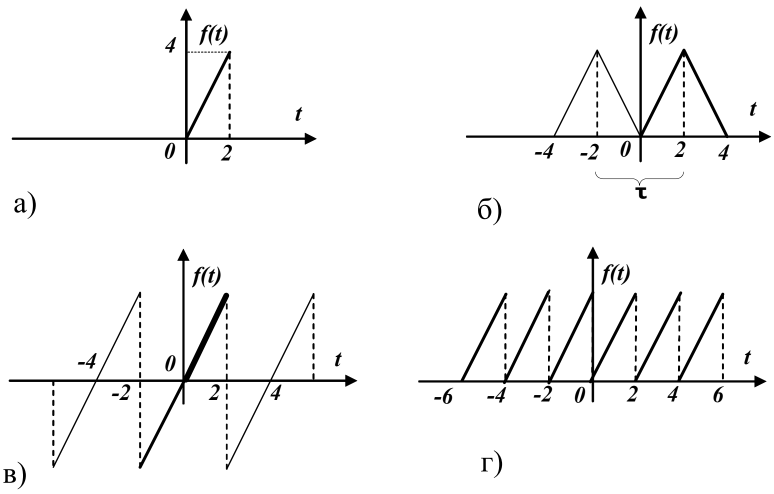


Рисунок 3.15

а) Довизначимо функцію $f(t)$ на відрізку $[-2,0]$ парним чином (рис. 3.15, б). Побудуємо періодичне продовження одержаної функції з періодом $T=4$, $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{T}=\dfrac{\pi k}{2}$. Тоді $b_k=0$, $k\in Z$;

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_k t dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 2t\cos\frac{\pi k}{2} t dt = 2\int_0^2 t\cos\frac{\pi k}{2} t dt =$$

$$= \begin{cases} \textit{Інтегруємо частинами}: \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \cos\frac{\pi k}{2} t dt, \quad v = \frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2} t \end{cases} = 2\left(\frac{2t}{\pi k}\sin\frac{\pi k t}{2}\bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi k}\int_0^2 \sin\frac{\pi k t}{2} dt\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi k t}{2}\bigg|_0^2 = \frac{8}{\pi^2 k^2}\left(\cos\pi k - 1\right) = \frac{8}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, \quad k = 2m; \\ -\frac{16}{\pi^2 k^2}, \quad k = 2m-1. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 2\int_0^2 t dt = t^2\Big|_0^2 = 4.$$

Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є за косинусами таке:

$$2t = 2 - \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2m-1)\pi}{2} t}{(2m-1)^2}.$$

б) Довизначимо функцію $f(t)$ на відрізку $\left[-2, 0\right]$ непарним чином (рис. 3.15, в). Побудуємо періодичне продовження одержаної функції з періодом $T = 4$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{\pi k}{2}$. Тоді $a_k = 0$, $k \in Z$;

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_k t dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 2t\sin\frac{\pi k}{2} t dt = 2\int_0^2 t\sin\frac{\pi k}{2} t dt =$$

$$= \begin{cases} \textit{Інтегруємо частинами}: \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \sin\frac{\pi k}{2} t dt, \quad v = -\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2} t \end{cases} = 2\left(-\frac{2t}{\pi k}\cos\frac{\pi k t}{2}\bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi k}\int_0^2 \cos\frac{\pi k t}{2} dt\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{4}{\pi k}\cos \pi k + \frac{4}{\pi^2 k^2}\sin \frac{\pi k t}{2}\Bigg|_0^2 \right) = -\frac{8}{\pi k}(-1)^k .$$

Таким чином, розвинення даної функції за синусами таке:

$$2t = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi t}{2}.$$

в) Продовжимо функцію $f(t)$ на всю числову вісь за законом періодичності (рис. 3.15, г), взявши за період $T = 2$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \pi k$.

Тоді

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = 2\int_0^2 tdt = 4;$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos \omega_k t dt = \int_0^2 2t\cos \pi k t dt = 2\int_0^2 t\cos \pi k t dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \textit{Інтегруємо} \quad \textit{частинами}: \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \cos \pi k t dt, \quad v = \frac{1}{\pi k}\sin \pi k t \end{array} \right\} = 2\left(\frac{t}{\pi k}\sin \pi k \Bigg|_0^2 - \frac{1}{\pi k}\int_0^2 \sin \pi k t dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos \pi k t\Big|_0^2 = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left(\cos 2\pi k - 1\right) = \frac{8}{\pi^2 k^2}\left(1 - 1\right) = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \omega_k t dt = \int_0^2 2t\sin \pi k t dt = 2\int_0^2 t\sin \frac{\pi k}{2} t dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \textit{Інтегруємо частинами}: \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \sin \pi k t dt, \quad v = -\frac{1}{\pi k}\cos \pi k t \end{array} \right\} = 2\left(-\frac{t}{\pi k}\cos \pi k t \Bigg|_0^2 + \frac{1}{\pi k}\int_0^2 \cos \pi k t dt \right) =$$

$$= 2\left(-\frac{2}{\pi k}\cos 2\pi k + \frac{1}{\pi^2 k^2}\sin \pi kt \Big|_0^2 \right) = -\frac{4}{\pi k}.$$

Таким чином, розвинення в ряд Фур'є даної функції таке:

$$2t = 2 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin \pi kt}{k}.$$

Приклад 3.23 Функцію

$$f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1; \\ 1+t, & -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

подати інтегралом Фур'є.

Розв'язування

Обчислимо спектральну функцію $f(t)$ (3.62):

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}(1+t)e^{i\omega t}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{i\omega t}dt \right).$$

Обидва інтеграли інтегруємо частинами.

$$\int_{-1}^{0}(1+t)e^{j\omega t}dt = \left\{ \begin{matrix} u = 1+t, & du = dt \\ dv = e^{j\omega t}dt, & v = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} \end{matrix} \right\} = \frac{1+t}{j\omega}e^{j\omega t}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{j\omega}\int_{-1}^{0}e^{j\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{j\omega t}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{j}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\left(1 - e^{-j\omega}\right).$$

$$\int_{0}^{1}(1-t)e^{j\omega t}dt = \left\{ \begin{matrix} u = 1-t, & du = -dt \\ dv = e^{j\omega t}dt, & v = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} \end{matrix} \right\} = \frac{1-t}{j\omega}e^{j\omega t}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{j\omega}\int_{0}^{1}e^{j\omega t}dt =$$

$$= -\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2}e^{j\omega t}\Big|_{0}^{1} = \frac{j}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - 1\right).$$

Таким чином,

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{j}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\left(1-e^{-j\omega}\right)+\frac{j}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega}-1\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{\omega^2}-\frac{2\cos\omega}{\omega^2}\right).$$

Шукане розвинення $f(t)$ в інтеграл Фур'є за формулою (3.63) таке:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-j\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)e^{-j\omega x}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega)e^{-j\omega x}d\omega\cdot$$

Питання для самоперевірки

1. Які функції називаються ортогональними? Дайте означення ортогональної системи функцій.

2. Яка система функцій називається тригонометричною? Доведіть, що тригонометрична система функцій є ортогональною на відрізку $[-\pi;\pi]$.

3. Сформулюйте основні властивості періодичних функцій.

4. Наведіть означення тригонометричного ряду. Як визначаються коефіцієнти тригонометричного ряду?

5. Виведіть формули Ейлера-Фур'є. Що називається коефіцієнтами Фур'є?

6. Дайте означення ряду Фур'є. Сформулюйте теорему про існування ряду Фур'є.

7. Поясніть вислів: "Функція розвивається в ряд Фур'є"?

8. В чому полягає періодичне продовження функції.

9. Сформулюйте теорему Діріхле.

10. Який вигляд набуває ряд Фур'є для парної і непарної функцій? Доведіть відповідні формули.

11. Який вигляд має ряд Фур'є для функції з довільним періодом $2l$? Виведіть відповідні формули.

12. Який вигляд набуває ряд Фур'є для парної і непарної функцій з довільним періодом $2l$? Доведіть відповідні формули.

13. Виведіть формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є у випадку задання функції на відрізку $[0;T]$.

14. Запишіть ряд Фур'є для функції $f(x)$ періоду 2π в комплексній формі. Наведіть формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є в цьому випадку.

15. Який вигляд має комплексна форма ряду Фур'є для періодичної функції з довільним періодом Т? Наведіть відповідні формули для коефіцієнтів Фур'є.

16 Дайте означення гармоніки, хвильових чисел функції, спектра функції. Що ми розуміємо під поняттями амплітудного і фазового спектрів?

17. Дайте поняття узагальненого ряду Фур'є. Запишіть узагальнені формули Ейлера-Фур'є.

18. Чому виникає потреба у введенні поняття інтеграла Фур'є? Виведіть формулу Фур'є. Який вираз називається інтегралом Фур'є?

19. Запишіть формулу Фур'є для парної і непарної функцій. Які формули називаються косинус- , синус-формулами Фур'є?

20. Який вигляд має комплексна форма інтеграла Фур'є? Виведіть її.

21. Дайте означення прямого і оберненого перетворення Фур'є.

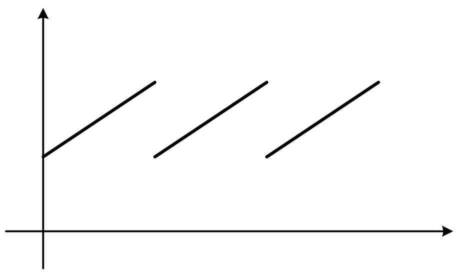
22 Наведіть означення спектральної щільності амплітудного спектра функції.

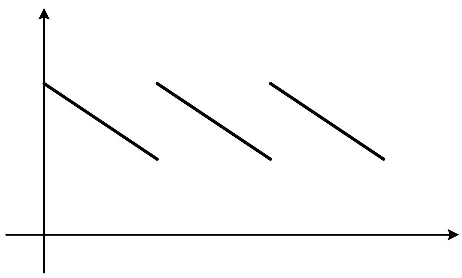
23 Дайте означення прямого і оберненого косинус-, синус-перетворень Фур'є.

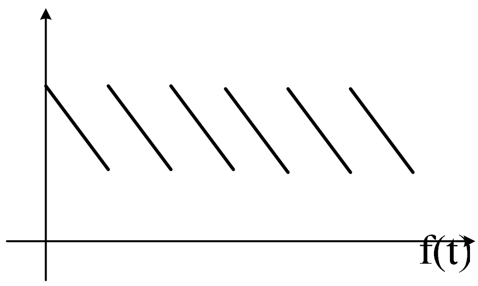
24. Як записується комплексна форма інтеграла Фур'є в радіотехнічній літературі? Наведіть приклади застосування інтеграла Фур'є в радіотехніці.

Завдання для самостійної роботи

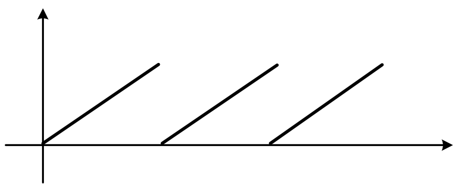
Завдання 3.1 Розкласти в ряд Фур'є в комплексній і дійсній формах періодичну функцію, задану графіком. Побудувати амплітудний і фазовий спектри

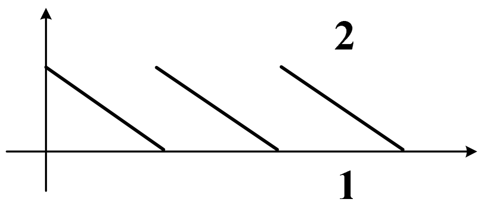

1.


2.

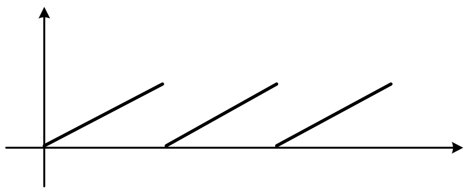


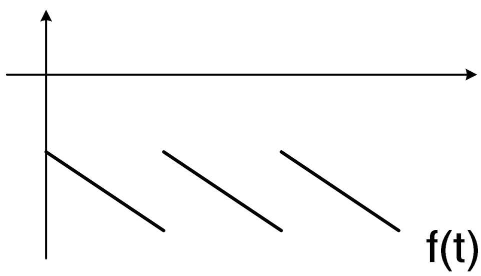
3.


4.

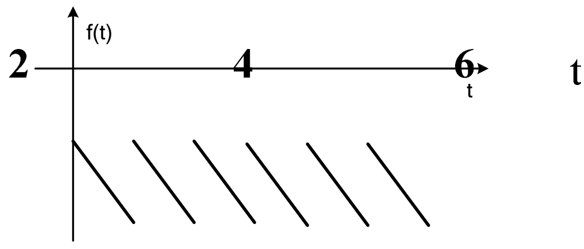


5.

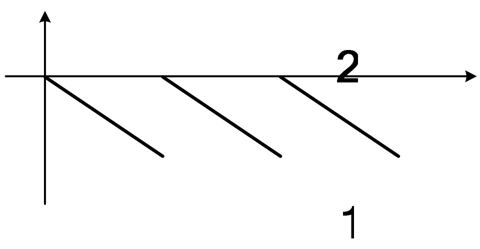

6.



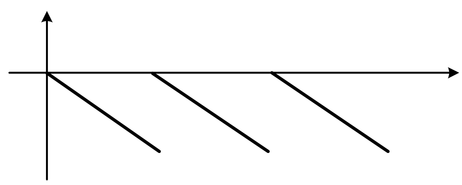
7.



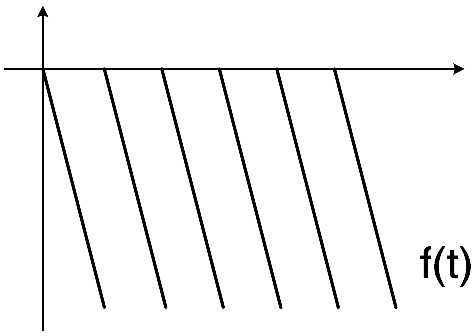
8.



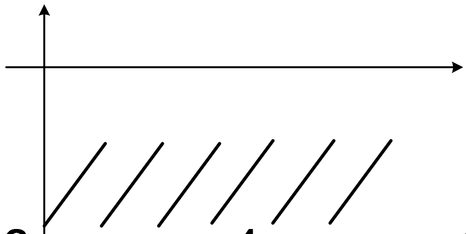
9.


10.

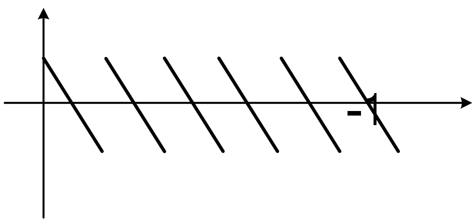
1 2 3 4 5 6 t



11.

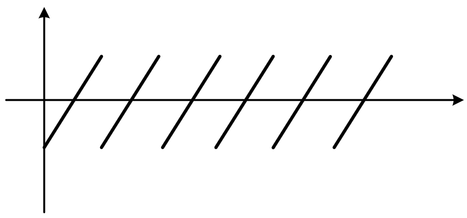


12. 2 4 6 t

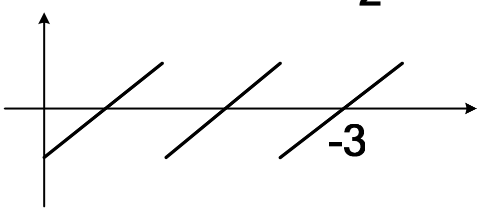


13.

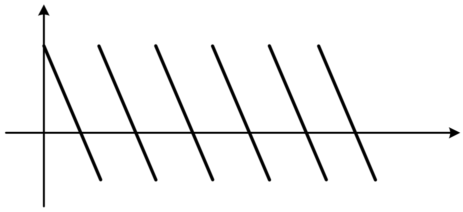
-2



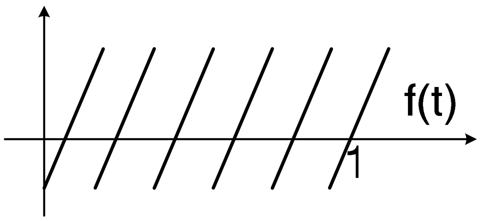
14.



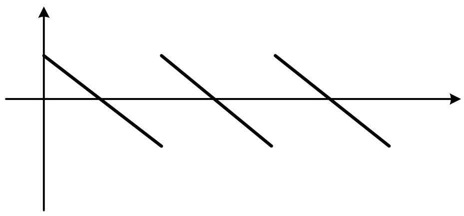
15.



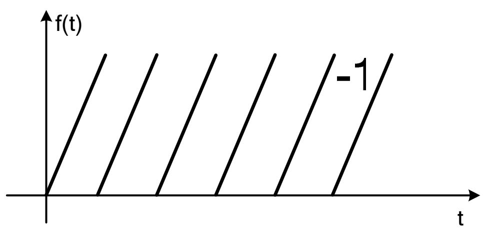
16.



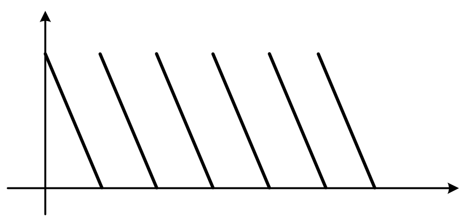
17.



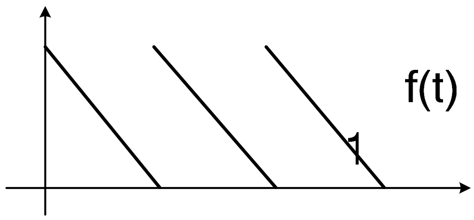
18. 2 4 6 t



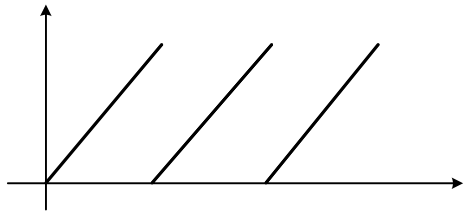
19.



20.

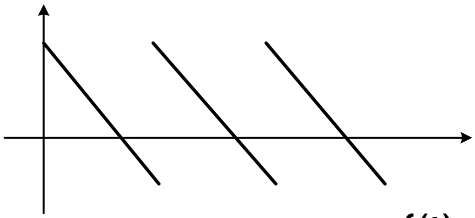


21.

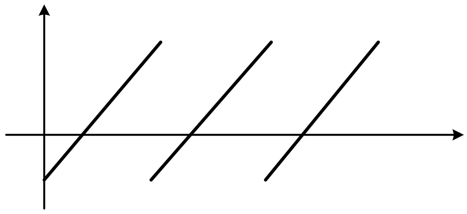


22. 2 4 6 t

-1



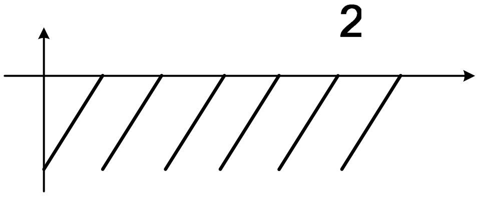
23.



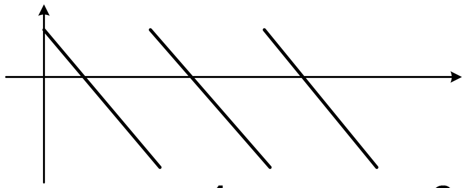
24.

f(t)

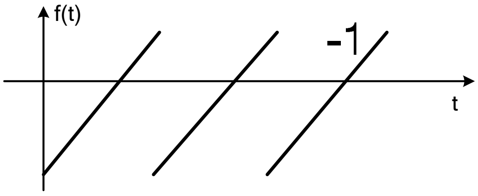
2



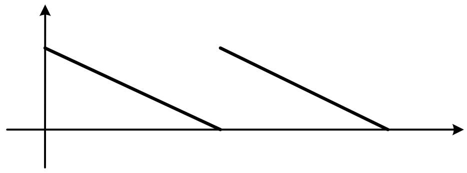
25.



26. 2 4 6 t

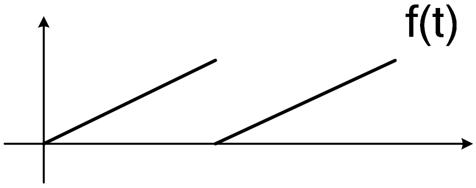


27.



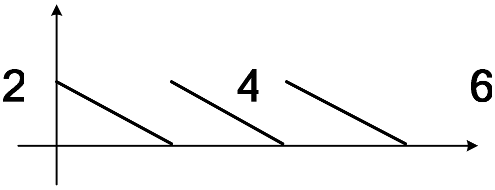
28.

f(t)



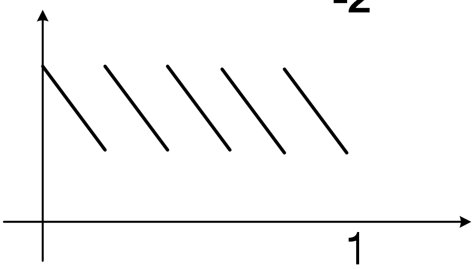
29.

2 4 6 t

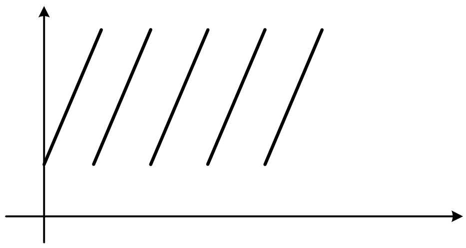


30.

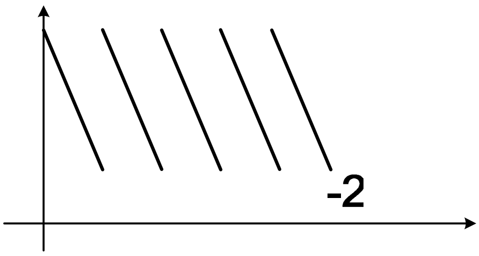
-2



31.

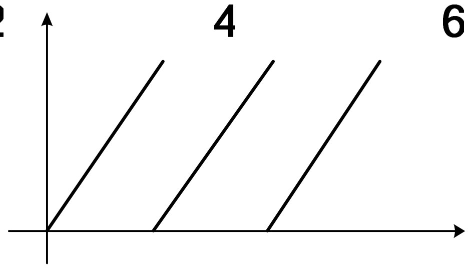


32.



33.

2 4 6

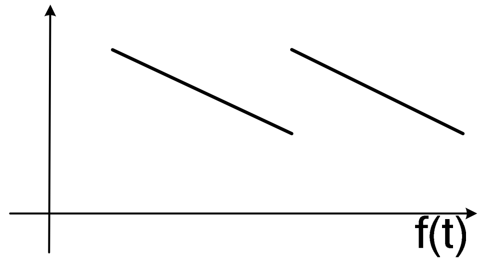


34.

f(t)

1

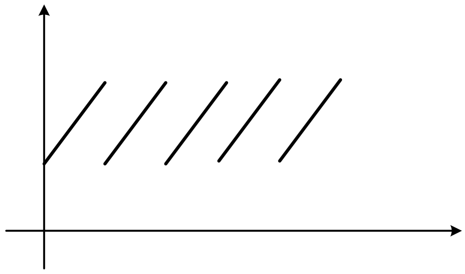
1 2 3 4 5 6 t



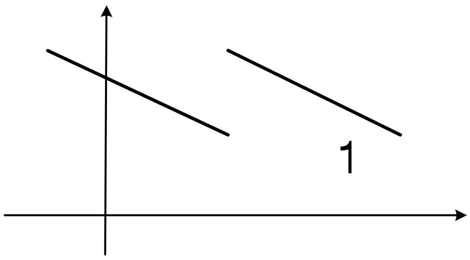
f(t)

35.

2

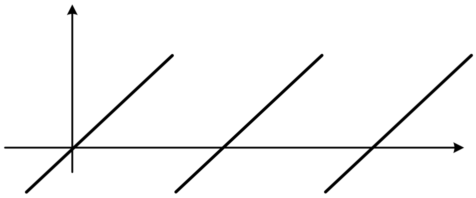


36.



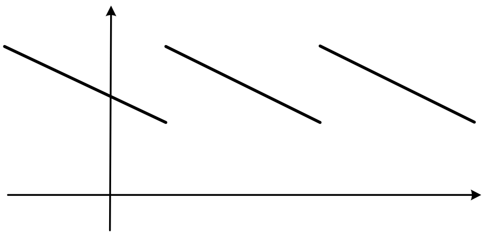
1

37.

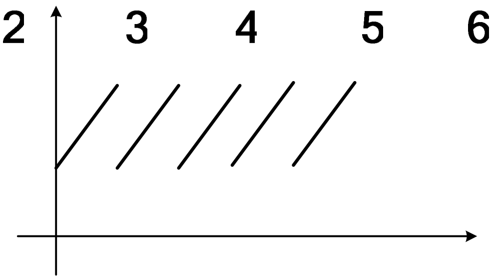


38.

1 2 3 4 5 6 t



39.



f(t)

40.

3

2

-1 1 2 3 4 5 t

f(t)

3

2

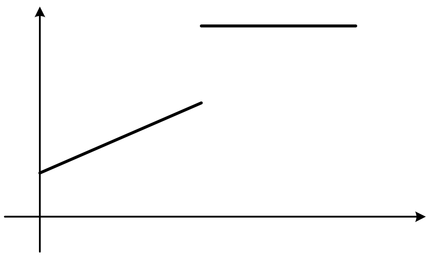
-1 1 2 3 4 5 t

Завдання 3.2 Розкласти в ряд Фур'є в дійсній формі функцію f(t), задану графіком на відрізку [0; l]:

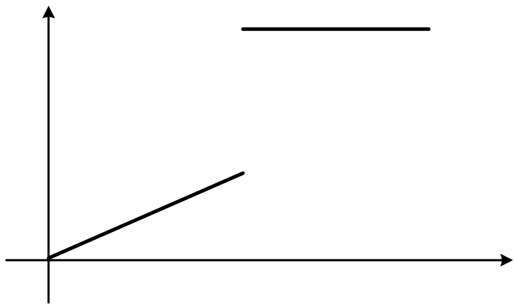
а) за косинусами;

б) за синусами;

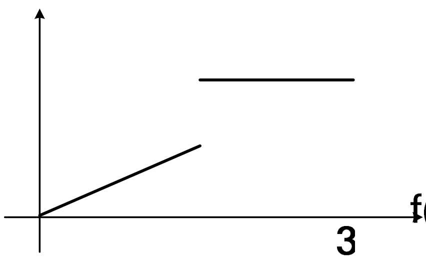
в) в повний ряд Фур'є, беручи за період T довжину відрізка [0; l], [T=l]:



1.



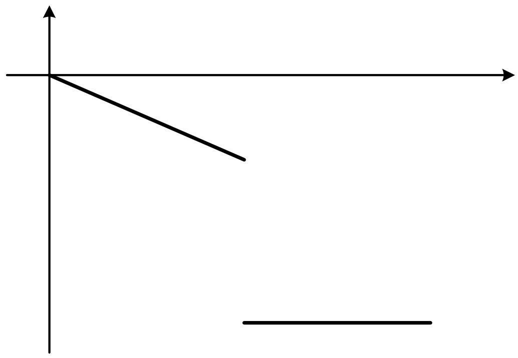
2.



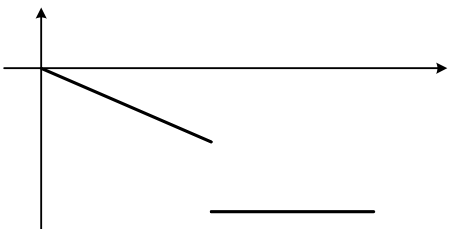
f(t)

3

3.

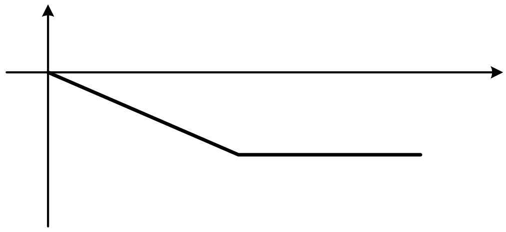


4.

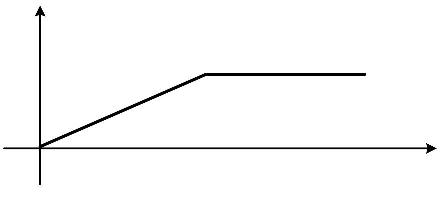


5.

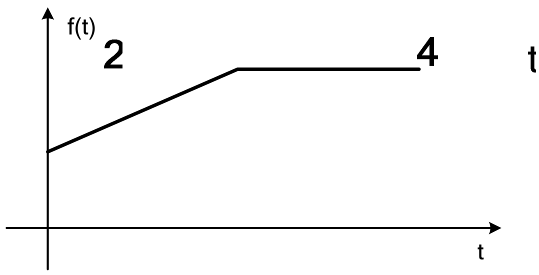
1



6.



7.

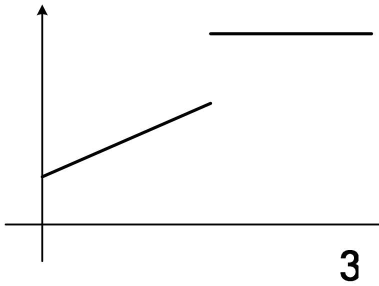


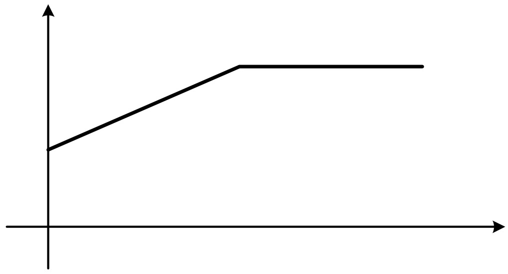
8.

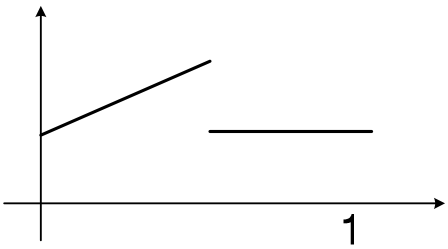
f(t)

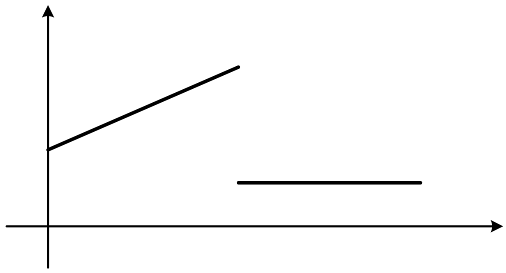
3

1

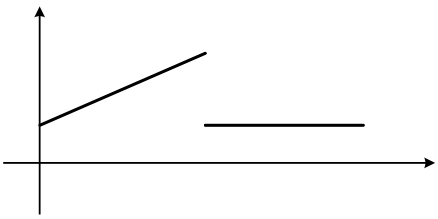
9.

f(t)
3

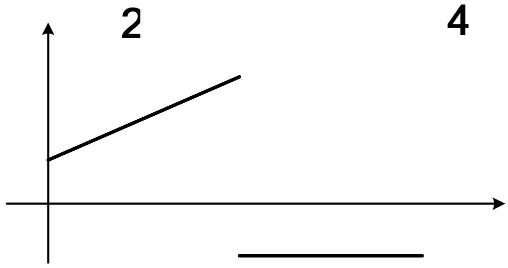
10.


11.

1

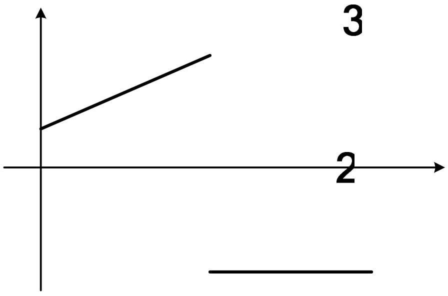
12.


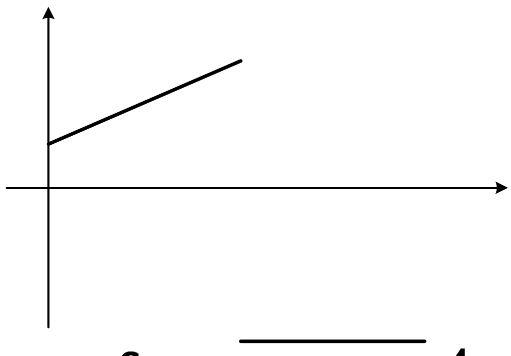
2 4 t

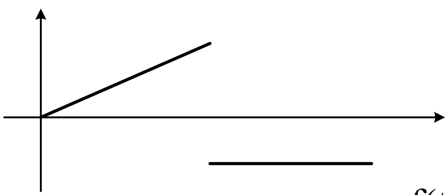
13.


14.


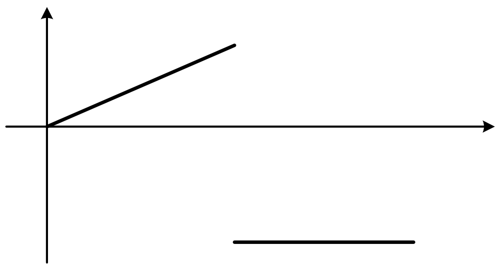
f(t)
3

15.

2

16.

2 4 t

17.


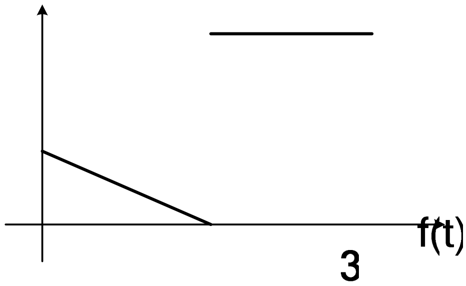
f(t)

18.


2

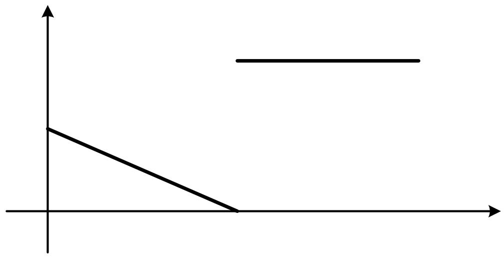
1

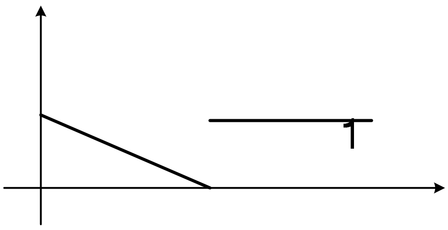
2 **4** t

19. 

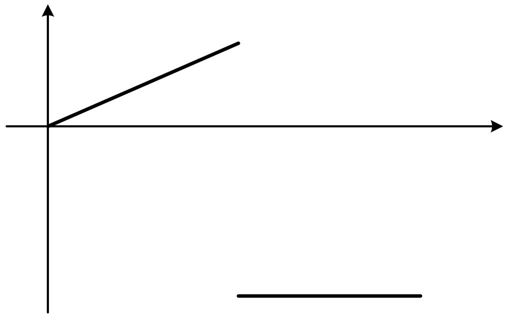
f(t)

3

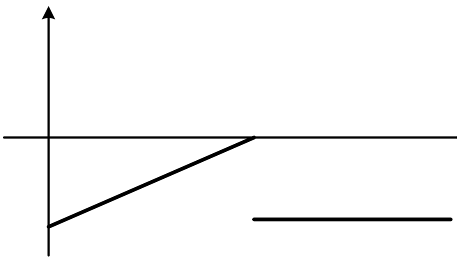
20. 

21. 

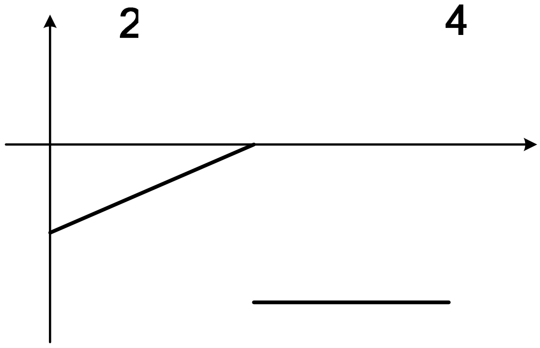
1

22. 

2 4 t

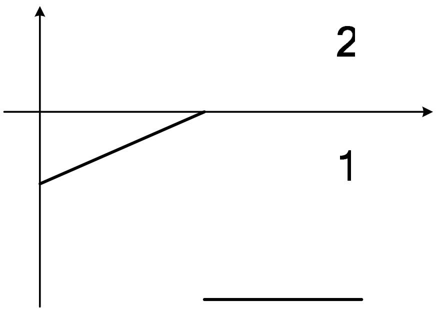
23. 

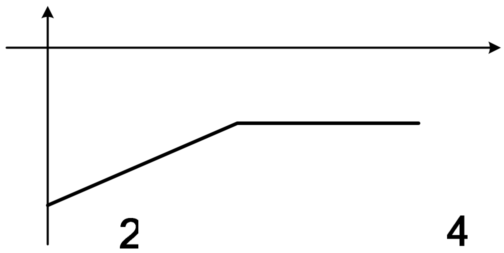
f(t)

24. 

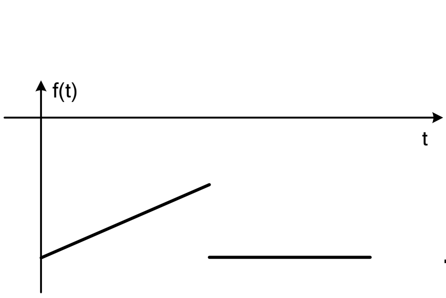
2

1

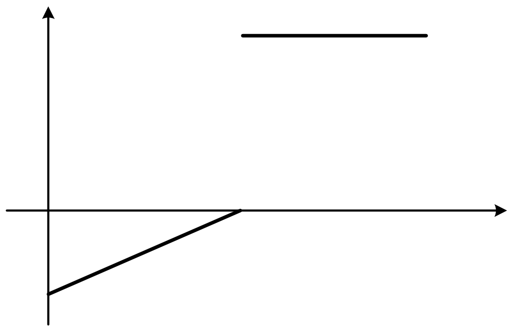
25. 

26. 

2 4 t

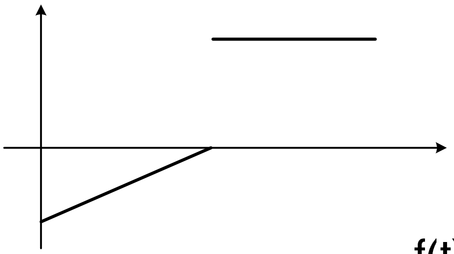
27. 

f(t)

28. 

1

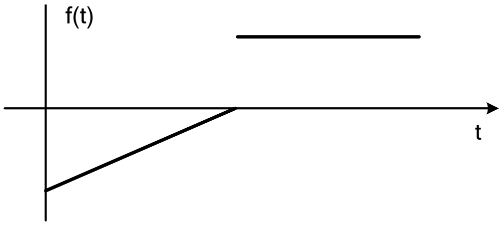
2 4



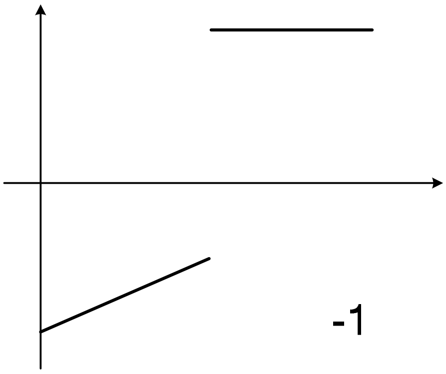
29.

f(t)

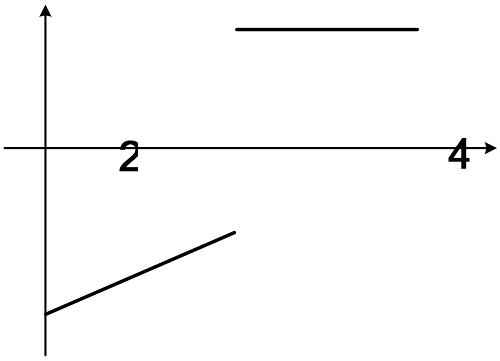
2



30.

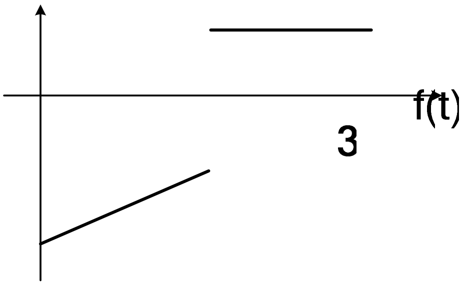


31.

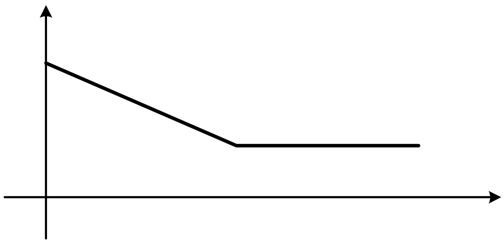


t

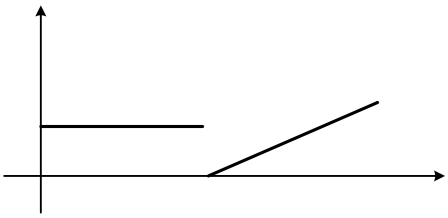
32.



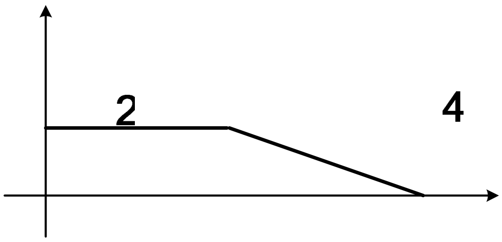
33.



34.

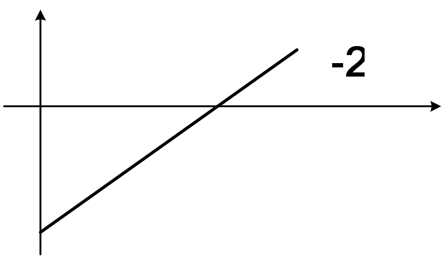


35.

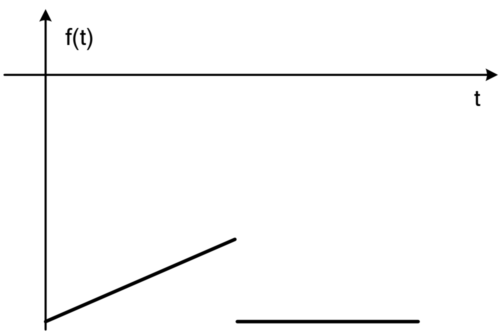


t

36.



37.

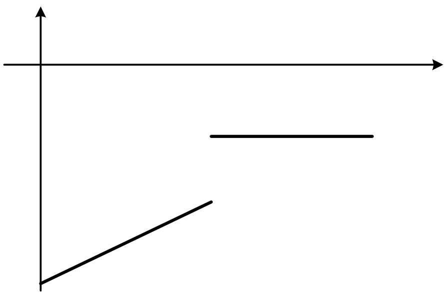


38.

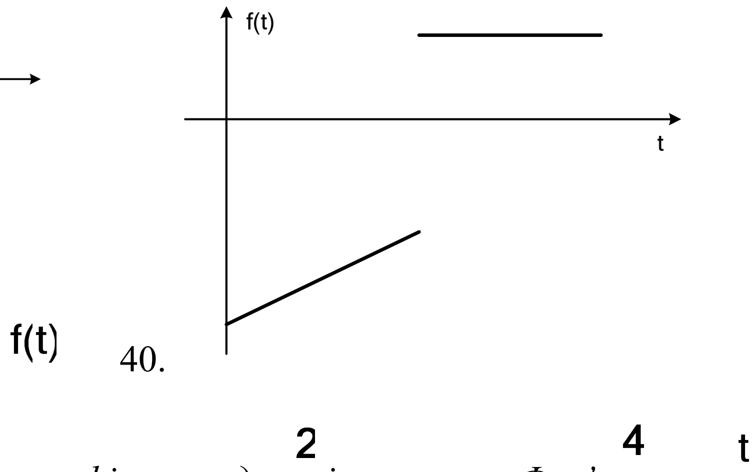
f(t)

1

2 4 t

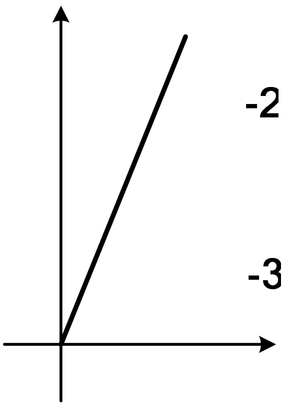


39.

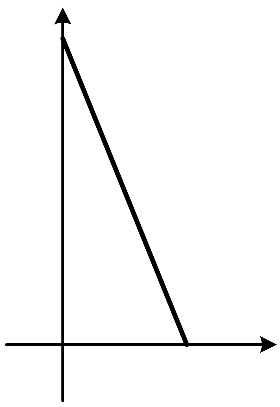


40.

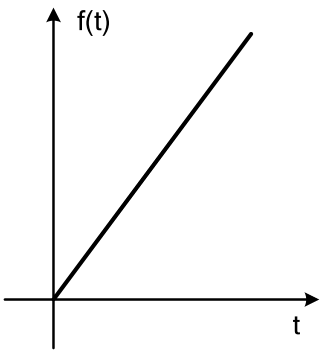
Завдання 3.3 Функцію f(t), задану графіком, подати інтегралом Фур'є



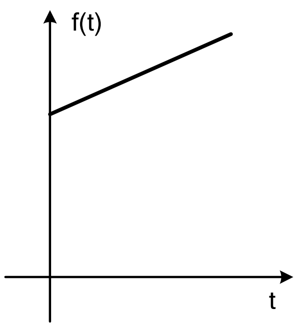
1.



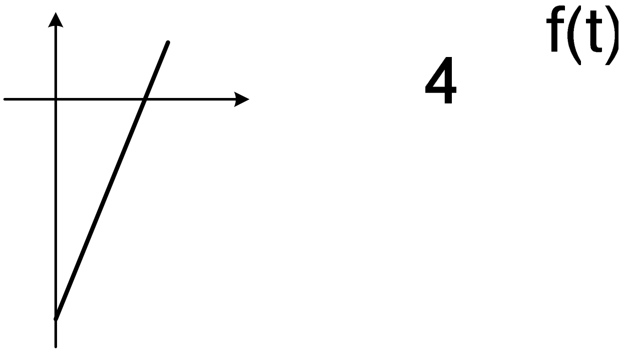
2.



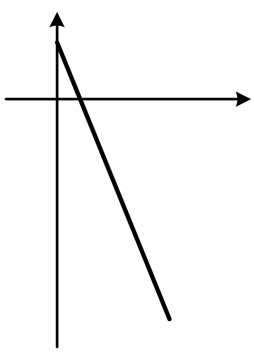
3.



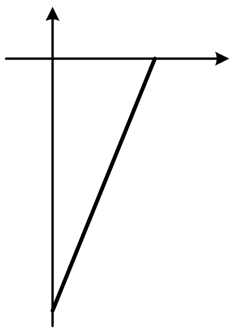
4.



5.

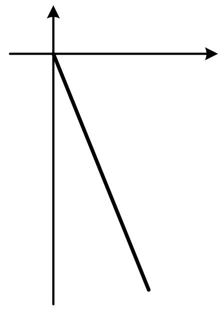


6.



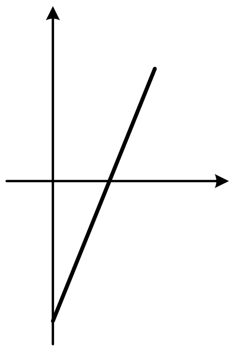
7.

f(t)

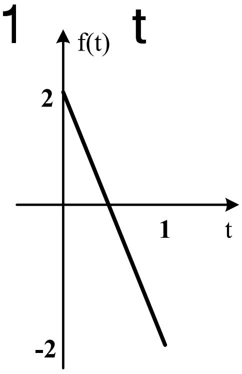


8.

1 t

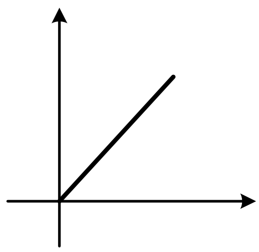


9.



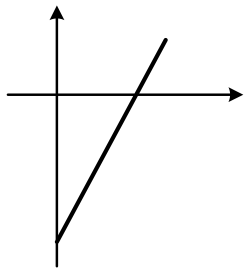
10.

-4



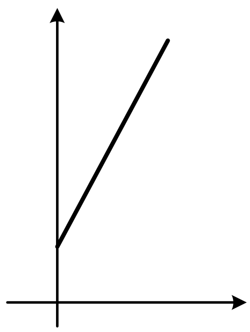
11.

f(t)

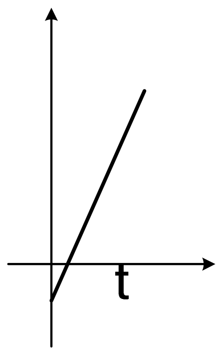


12.

2



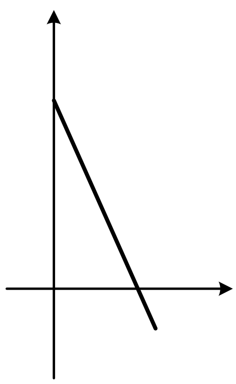
13.



1 t

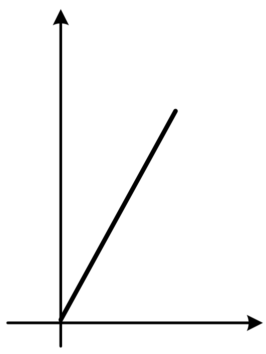
14.

-2



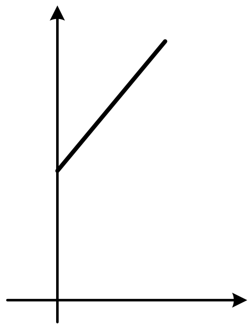
15.

f(t)



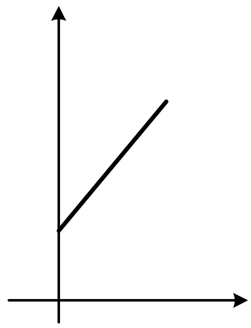
16.

 2

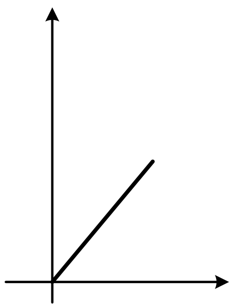


17.

4 f(t)

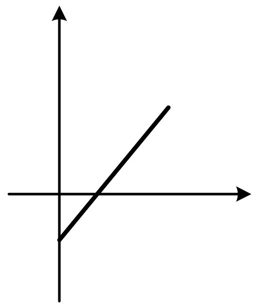


18.

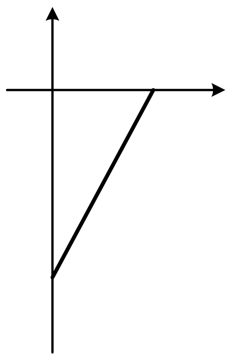


19.

2

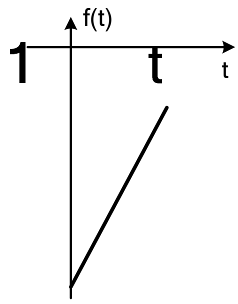


20.

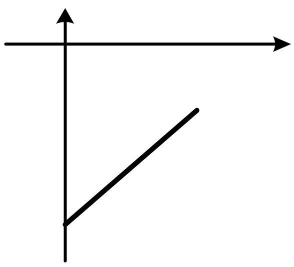


21.

f(t)

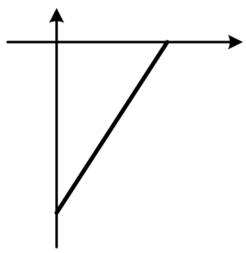


22.

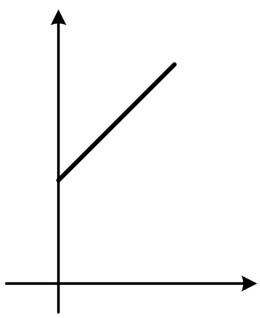


23.

2

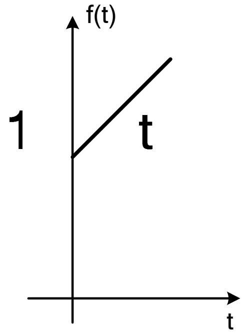


24.



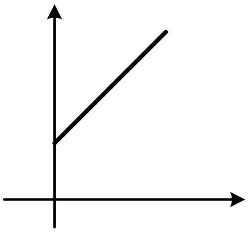
25.

f(t)

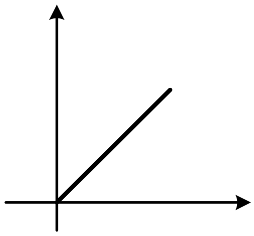


26.

1 t

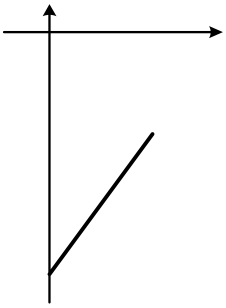


27.



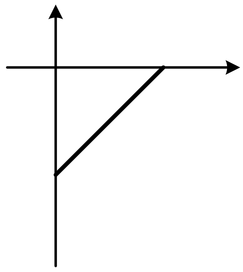
f(t) 28.

2



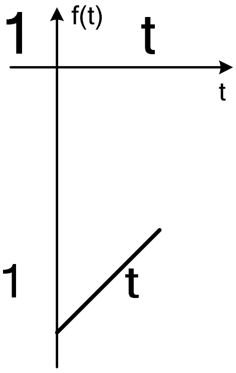
1

29.



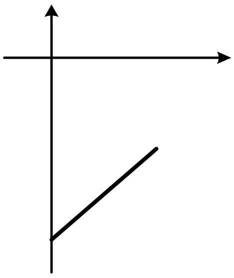
30.

1 t



f(t)

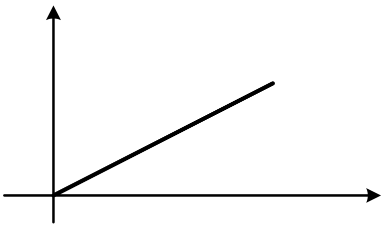
1 t



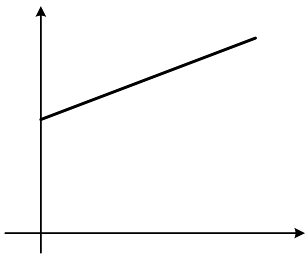
31.

32.

-2

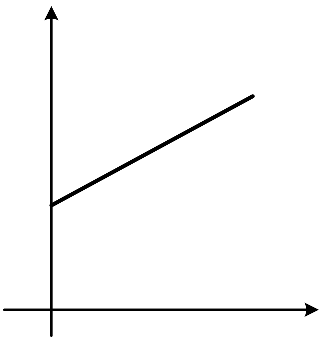


33.

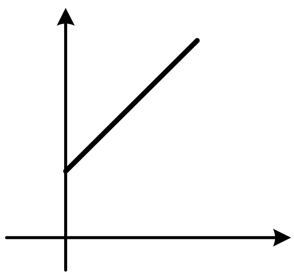


34.

-4



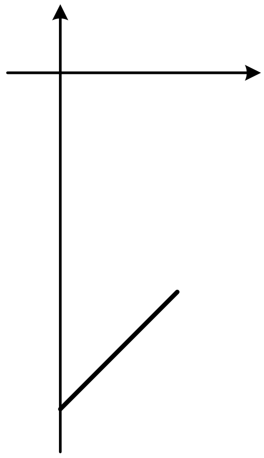
35.



f(t) 36.

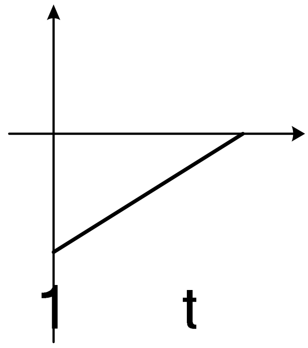
1 t

-1

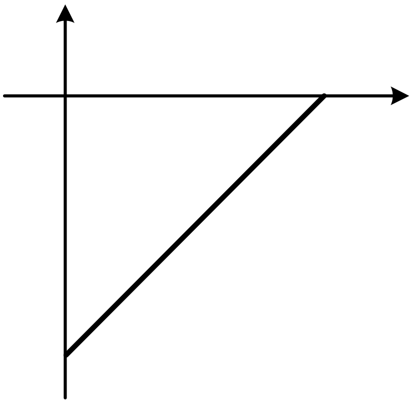


37.

f(t)

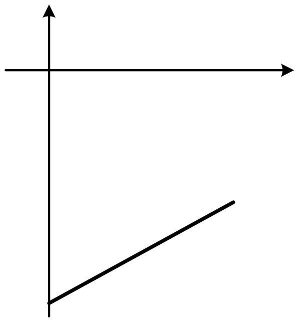


38.



39.

-3



40.

-4

f(t)

1 2 t

-2

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988.
3. Барась С.Т., Костюк О.А., Кравцов Ю.І. Основи теорії телекомукаційних систем. Збірник задач, запитань, вправ. – Вінниця: ВНТУ, 2003.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). – М.: Факториал, 1996.
5. Воробьёв Н.Н. Теория рядов: Учеб. пособие для втузов. – М.: Наука, 1986.
6. Власова Е.А. Ряды: Учеб. для вузов. 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учеб. для студентов математических специальностей университетов. – М.: Наука, 1976.
9. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.
10. Методические указания к выполнению типовых расчётов по курсу высшей математики. Часть 6. Ряды / Сост. И.С. Петрунина, В.С. Петрунин, Л.И. Педорченко. – Винница: ВПИ, 1988.
11. Никольский С.М. Курс математического анализа: Учеб. для вузов: В 2 т., Т.1. – М.: Наука, 1991.
12. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. – К.: Выща школа, 1987.
13. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2. – М.: Наука, 1985.
15. Пугачёв В.С. Лекции по функциональному анализу: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Изд-во МАИ, 1996.
16. Тостов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980.
17. Треногин В.А. Функциональный анализ: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1993.
18. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1973.

ДОДАТОК А

Розклад функції в ряд Тейлора знаходить найширше застосування як при розв‘язуванні задач вищої математики, так і в прикладних областях. В системі Maple на цей випадок передбачені такі процедури:
taylor() – розклад в ряд Тейлора,
mtaylor() – розклад в ряд Тейлора функцій декількох змінних,
series() – узагальнений ряд (для аналітичних функцій такий ряд співпадає з рядом Тейлора).

Приклад А1. Розвинути функцію $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=-2$.

Використаємо процедуру taylor(), вказавши першим параметром функцію, яка розкладається в ряд, другим параметром – рівність, яка визначає змінну і точку, в околі якої виконується розкладання в ряд. Третій необов‘язковий параметр – порядок «залишку» ряду. Так, якщо розкладати функцію необхідно до доданків зі степенем 4 (включно), то порядок залишку дорівнює 5.

```
> taylor(1/(x^2+4*x+7),x=-2,5);
```

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x+2)^2+\frac{1}{27}(x+2)^4+O((x+2)^6)$$

Щоб відкинути залишок ряду (доданок з $O()$), використаємо процедуру convert (). Визначимо вираз f , який задає початкову функцію.

```
> f:=1/(x^2+4*x+7);
```

$$f:=\frac{1}{x^2+4\,x+7}$$

Основну частину ряду позначимо через f1 (змінна середовища **%%**

посилається на результат виконання передостанньої операції (тобто на ряд функцій), а опція polynom є інструкцією, що вказана першим параметром.

```
> f1:=convert(%%, polynom);
```

$$f1 := \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x+2)^2 + \frac{1}{27}(x+2)^4$$

Тепер можна порівняти, наскільки відрізняються початкова функція і наближення рядом Тейлора (наближення, оскільки залишок ряду був відкинутий)

```
> plot([f,f1],x=-1..1.2,color=(BLUE,PINK),
linestyle=[SOLID,DASHDOT],
titlefont=[HELVETICA,BOLD,13]).
```

Бачимо (рис. А1), що навіть розкладу до четвертого степеня досить, щоб коректно апроксимувати функцію в околі точки $x_0 = -2$. Різницю видно тільки при істотному віддаленні від точки розкладу.

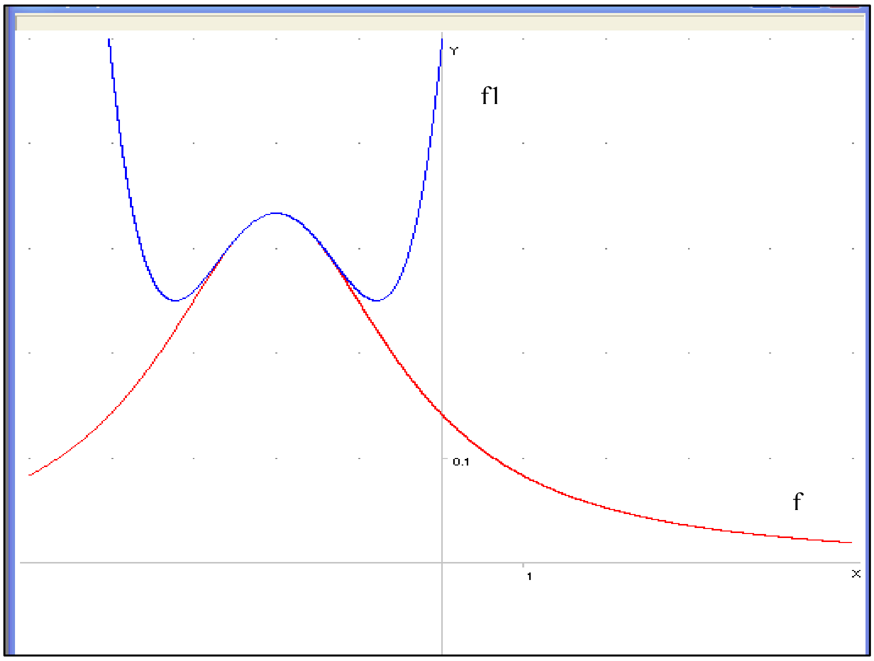


Рисунок А1

ДОДАТОК В

Можливість розкладу в ряд Тейлора можна прослідкувати за допомогою системи Maple, а прикладний пакет Mathcad дозволяє провести дослідження на апроксимацію функції рядом Тейлора.

Нехай ставиться задача запису для заданої функції розкладу в ряд Тейлора в околі точки x_0. Побудувати графік функції і графік кількох частинних сум ряду Тейлора.

Порядок виконання завдання

1. Встановити автоматичний режим обчислення і режим відображення результатів по горизонталі.
2. Означити функцію *f(x)*.
3. Виконати заміну $t = x - x_0$ і записати одержану функцію змінної *t*.
4. Використати розклад функції змінної *t* за формулою Тейлора в околі нуля, щоб записати для неї ряд Тейлора.
5. Означити частинну суму ряду Тейлора як функцію числа доданків і змінної *x*.
6. Побудувати графіки функції *f(x)* і частинних сум її ряду Тейлора.

Приклад В1. Запишіть ряд Тейлора функції $\frac{1}{x}$ в околі точки $x_0 = 2$. Побудуйте графік функції і частинних сум її ряду Тейлора в околі цієї точки.

Фрагмент робочого документа Mathcad з відповідними обчисленнями і графіками наведено нижче.

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad t := x - 2 \qquad x := t + 2$$

$$\frac{1}{(t+2)} := \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot t + \frac{1}{8}\cdot t^2 - \frac{1}{16}\cdot t^3 + O\left(t^4\right)$$

$$c(n) := (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{(n+1)}} \qquad S(n,x) := \sum_{k=0}^{n} \left[c(k)\cdot(x-2)^k\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \left[\frac{1}{2^{(n+1)}} \cdot (x-2)^n\right]\right] \rightarrow \frac{1}{x}$$

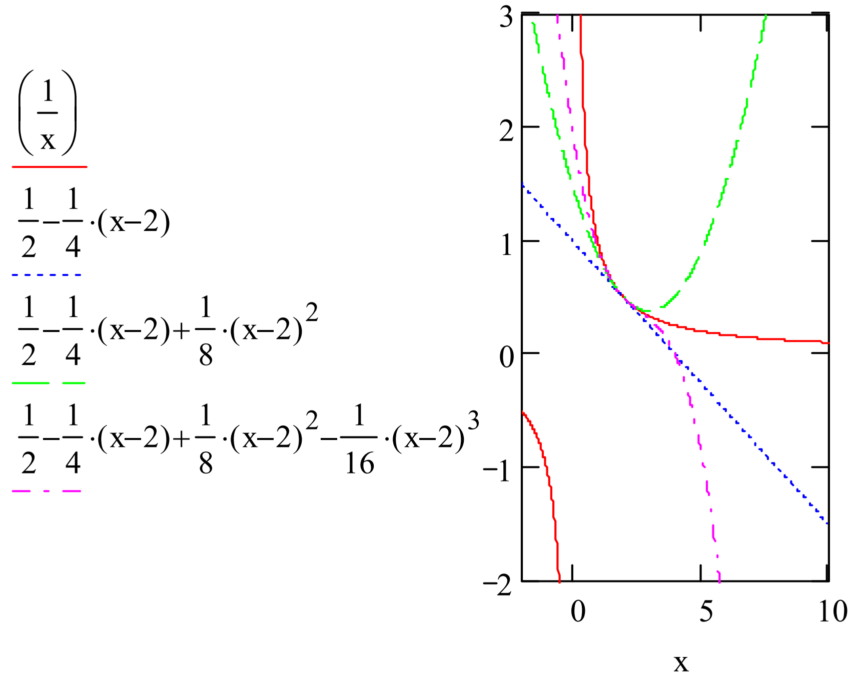


Рисунок В1

Навчальне видання

Наталія Василівна Сачанюк-Кавецька

Лідія Іванівна Педорченко

Майя Борисівна Ковальчук

Теорія рядів

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Н.В. Сачанюк-Кавецькою

Редактор В.О. Дружиніна

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29.7 × 42 $^1\!/_4$
Друк різографічний
Тираж прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ