

УДК 621.7

Краєвський В. О., Михалевич В. М., Добранюк Ю. В. (Вінниця, ВНТУ)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗГИНАННЯ СМУГИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ТА ШИРИНИ

В роботі розроблена математична модель згинання полоси перемінної ширини та товщини матрицею і пуансоном, котрі мають радіуси закруглень, соизмеримые с расстоянием между ними. В моделі для определения точок касания полоси к матрице и пуансону учитывалась толщина полоси. На основе модели предложен алгоритм, позволяющий определять уравнение выгнутой оси полоси. Алгоритм реализован в среде Maple 9.

The article is devoted to the development of the mathematical model of the plate with a variable breadth and thickness flexure by lower die and a male mold which have bending radius, commensurable with distance between them. In this model for definition of contingence points of the plate to a lower die and a male mold width of plate was taken into account. On base of the mathematical model the algorithm, which permits to determine the equation of a plate cambered axle, is offered. The algorithm is implemented in software environment Maple 9.

У роботі [1] розроблено математичну модель згинання смуги матрицею та пуансоном, які мають радіуси заокруглень, що сумірні із відстанню між ними. Але при розробці цієї моделі, при визначенні точок дотику до матриці та пуансона, а також при визначенні радіуса заокруглення нейтральної поверхні, нехтували товщиною заготовки. В процесах ротаційної витяжки, зокрема тих, що розробляються авторами цієї роботи [2], товщина заготовки сумірна із відстанню між пуансоном та матрицею, тому нехтування товщиною заготовки може призвести до значної похибки при розрахунку плеча сили, а, отже, і до похибки при визначенні зусилля.

Метою роботи є розробка математичної моделі згинання смуги змінної товщини та ширини.

Насамперед урахування товщини заготовки відіб'ється на визначенні моменту згинання у перерізі із $x = x_A$ (рис. 1), оскільки зміниться радіус кривизни нейтральної поверхні. Згідно основних положень та позначень введених в [1], отримаємо

$$M_A = b(x_A + \Delta x_A) \cdot \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x_A + \Delta x_A)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot (R_M(x_A) + s(x_A + \Delta x_A)/2)^2}{3 \cdot E^2} \right]. \quad (1)$$

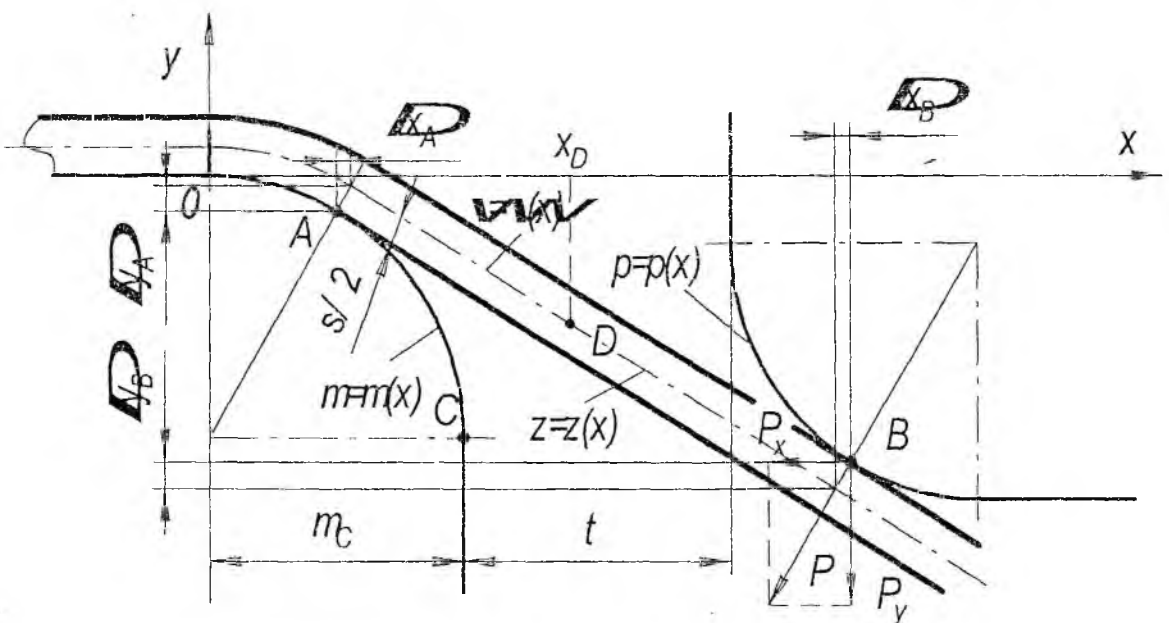


Рис. 1. Розрахункова схема

Як наслідок зміняться згинальні моменти, які діють у перерізі із координатою x , що належить ділянці пружно-пластичних M_{np} та пружних M_{np} деформацій:

$$M_{ni}(x) = \frac{b(x_A + \Delta x_A)}{x_B - \Delta x_B - x_A - \Delta x_A - \frac{dp(x_B)}{dx}(m(x_A) + \Delta y_A - p(x_B) + \Delta y_B)} \times$$

$$\times \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x_A + \Delta x_A)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot (R_M(x_A) + s(x_A + \Delta x_A)/2)^2}{3 \cdot E^2} \right] \times$$

$$\times \left(x_B - \Delta x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx}(\omega(x) - p(x_B) + \Delta y_B) \right); \quad (2)$$

$$M_{np}(x) = \frac{b(x_A + \Delta x_A)}{x_B - \Delta x_B - x_A - \Delta x_A - \frac{dp(x_B)}{dx}(m(x_A) + \Delta y_A - p(x_B) + \Delta y_B)} \times$$

$$\times \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x_A + \Delta x_A)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot (R_M(x_A) + s(x_A + \Delta x_A)/2)^2}{3 \cdot E^2} \right] \times$$

$$\times \left(x_B - \Delta x_B - x - \frac{dp(x_B)}{dx}(z(x) - p(x_B) + \Delta y_B) \right). \quad (3)$$

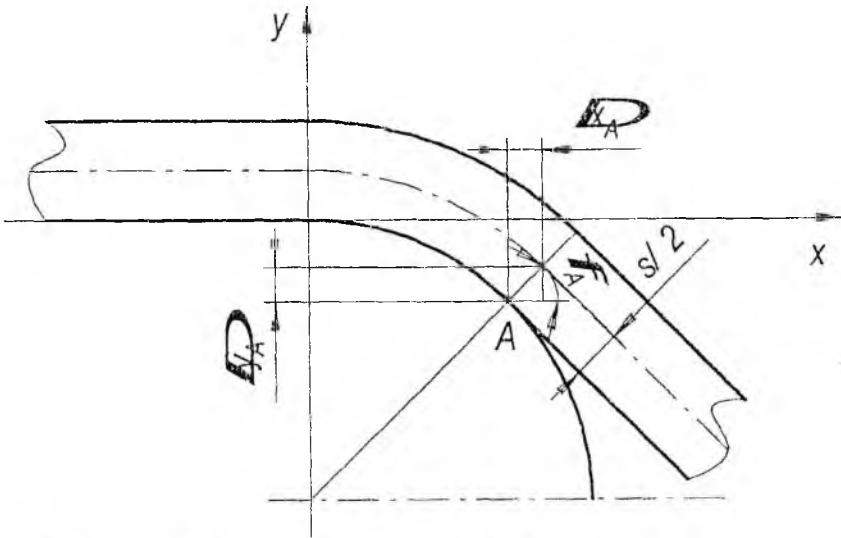


Рис. 2. До визначення Δx_A та Δy_A у формулі (6)

Також зміняться початкові та додаткові умови. Отже, початкові умови для розв'язання задачі Коші такі:

$$\begin{cases} \omega(x_A + \Delta x_A) = m(x_A) + \Delta y_A; \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A + \Delta x_A) = \frac{dm}{dx}(x_A). \end{cases} \quad (4)$$

Для визначення невідомих параметрів x_A та x_B необхідні такі додаткові умови:

$$\begin{cases} z(x_B - \Delta x_B) = p(x_B) - \Delta y_B; \\ \frac{dz}{dx}(x_B - \Delta x_B) = \frac{dp}{dx}(x_B). \end{cases} \quad (5)$$

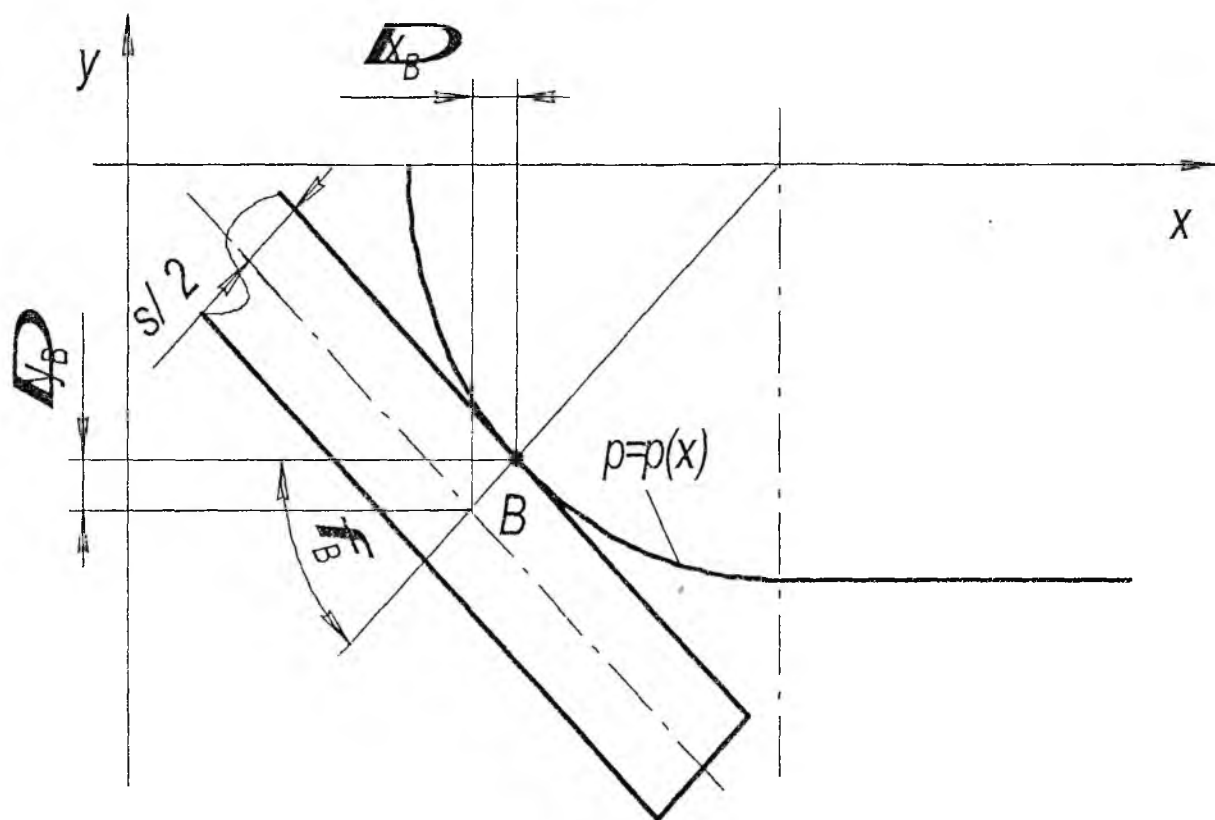


Рис. 3. До визначення Δx_B та Δy_B у формулі (6)

Отже, як і у випадку, коли товщина заготовки не враховувалась, маємо задачу на власні розв'язки

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = - \frac{2b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} E \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot [s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4M_{m1}(x)]}}; \\ \omega(x_A + \Delta x_A) = m(x_A) + \Delta y_A; \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A + \Delta x_A) = \frac{dm}{dx}(x_A); \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{12 \cdot M_{mp}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}; \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}; \\ z(x_B - \Delta x_B) = p(x_B) - \Delta y_B; \\ \frac{dz}{dx}(x_B - \Delta x_B) = \frac{dp}{dx}(x_B). \end{array} \right. \quad (6)$$

Крім невідомих, що фігурують у математичній моделі без врахування товщини смуги, з'явилися також Δx_A , Δx_B , Δy_A , Δy_B . Знайдемо вирази для їх визначення. Як видно з рис. 2

$$\begin{aligned}\Delta x_A &= \frac{s(x_A + \Delta x_A) \cdot \cos \varphi_A}{2}; \\ \Delta y_A &= \frac{s(x_A + \Delta x_A) \cdot \sin \varphi_A}{2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Тангенс кута φ_A визначимо, як кутовий коефіцієнт нормалі до $m(x)$ у точці A

$$\operatorname{tg} \varphi_A = -\frac{1}{\frac{dm(x_A)}{dx}}.\quad (8)$$

Отже,

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{s(x_A + \Delta x_A)}{2} \cdot \cos \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\frac{dm(x_A)}{dx}} \right); \\ \Delta y_A = \frac{s(x_A + \Delta x_A)}{2} \cdot \sin \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\frac{dm(x_A)}{dx}} \right). \end{cases}\quad (9)$$

Аналогічно знаходимо Δx_B та Δy_B (рис. 3)

$$\begin{cases} \Delta x_B = \frac{s(x_B - \Delta x_B)}{2} \cdot \cos \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\frac{dp(x_B)}{dx}} \right); \\ \Delta y_B = \frac{s(x_B - \Delta x_B)}{2} \cdot \sin \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\frac{dp(x_B)}{dx}} \right). \end{cases}\quad (10)$$

Задача (6) розв'язується методом стрільби. Спочатку визначаються інтервали зміни параметрів x_A та x_B . Для цього дійсну нейтральну поверхню смуги апроксимуємо прямою лінією і знаходимо точки дотику до матриці та пуансона x'_A та x'_B (маємо систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими)

$$\begin{cases} \omega(x) = a \cdot x + b; \\ \omega(x'_A + \Delta x'_A) = m(x'_A) + \Delta y'_A; \\ \frac{d\omega}{dx}(x'_A + \Delta x'_A) = \frac{dm}{dx}(x'_A); \\ \omega(x'_B - \Delta x'_B) = p(x'_B) - \Delta y'_B; \\ \frac{d\omega}{dx}(x'_B - \Delta x'_B) = \frac{dp}{dx}(x'_B). \end{cases}\quad (11)$$

Параметр x_A належить інтервалу $(0; x'_A)$, а параметр $x_B = (m_C + t; x'_B)$. Розбиваємо обидва інтервали на N частин і знаходимо $N \times N$ розв'язків задачі Коші і обираємо той, який найкраще відповідає додатковим умовам (5).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}. \end{array} \right. \quad (12)$$

Якщо розглянути частинний випадок задачі (6), коли смуга має постійні товщину та ширину, тобто $b(x) = const$ та $s(x) = const$; радіуси заокруглень матриці та пуансона постійні і дорівнюють R_M та R_n , відповідно і мають місце рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} b(x) = b; \\ s(x) = s; \\ m(x) = \sqrt{R_M^2 - x^2} - R_M; \\ p(x) = -\sqrt{R_n^2 - (x - t - R_M - R_n)^2} - h + R_n. \end{array} \right. \quad (13)$$

тоді задача (6) набуде вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{2 \cdot b \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b \cdot \sigma_m} \cdot [s^2 \cdot \sigma_m \cdot b - 4 \cdot M_{nv}(x)]}; \\ \left[1 + \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ \omega(x_A + \Delta x_A) = \sqrt{R_M^2 - x_A^2} - R_M + \Delta y_A; \\ \frac{d\omega}{dx}(x_A + \Delta x_A) = -\frac{x_A}{\sqrt{R_M^2 - x_A^2}}; \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s^3 \cdot b}; \\ \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ \frac{dz(x_D)}{dx} = \frac{d\omega(x_D)}{dx}; \\ z(x_B - \Delta x_B) = -\sqrt{R_n^2 - (x_B - t - R_M - R_n)^2} - h + R_n - \Delta y_B; \\ \frac{dz}{dx}(x_B - \Delta x_B) = \frac{x_B - t - R_M - R_n}{\sqrt{R_n^2 - (x_B - t - R_M - R_n)^2}}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Алгоритм розв'язання цієї задачі був реалізований у математичному додатку Maple 9. Результати розрахунку показані на рис. 4.

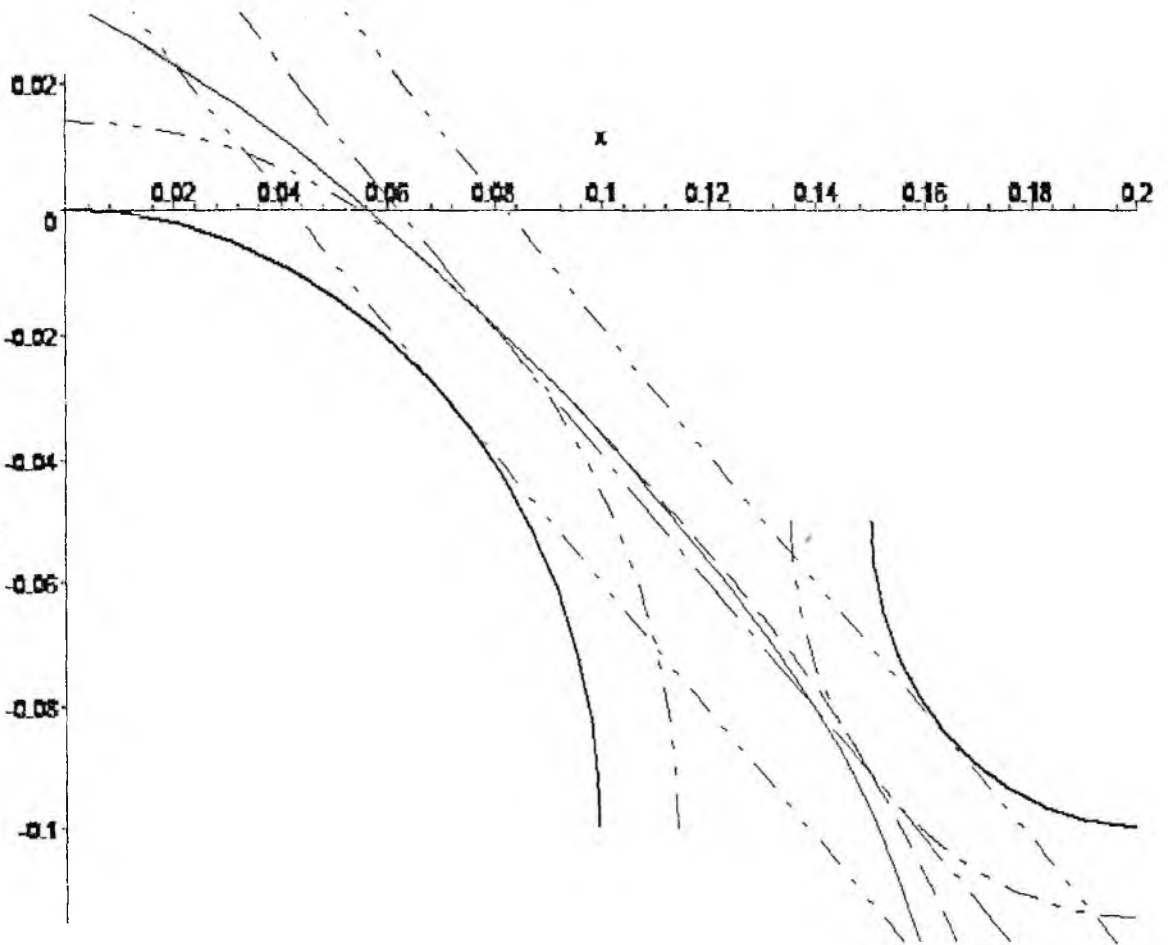


Рис. 4. Розрахунок положення нейтральної поверхні під час згинання із врахуванням товщини заготовки: суцільна лінія – положення при пружно-пластичних деформаціях; штрихова лінія – положення при пружних деформаціях; штрих-пунктирна лінія – апроксимація нейтральної поверхні прямою

Висновки

У роботі розроблено математичну модель згинання смуги змінної ширини та товщини матрицею та пуансоном, які мають радіуси заокруглень, що співрозмірні із відстанню між ними. В моделі для визначення точок дотику смуги до матриці та пуансона, а також для визначення радіуса заокруглення нейтральної поверхні смуги враховувалась товщина смуги. На основі моделі запропоновано алгоритм, який дозволяє визначати точки дотику смуги до матриці та пуансона, координату перерізу, при якому відбувається перехід смуги із пружно-пластичного напружено-деформованого стану у пружний, рівняння вигнутої осі ділянки смуги, що знаходиться у пружно-пластичному напружено-деформованому стані, та рівняння вигнутої осі ділянки смуги, що не має пластичних деформацій. На основі алгоритму складено програми у середовищі Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красівський В. О., Михалевич В. М., Матвійчук В. А. Математична модель згинання смуги // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні (Донбаська державна машинобудівна академія). – Краматорськ: ДДМА. – 2006. – С. 103-108.
2. Матвійчук В. А., Михалевич В. М., Красівський В. О. Розробка маловідходних процесів формування тонкостінних циліндричних деталей // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні (Донбаська державна машинобудівна академія). – Краматорськ: ДДМА. – 2004. – С. 281-286.