



ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ

*Международный
научно-технический журнал
Основан в июле 1969 г.*

№ 3 (363) — 2003 г.

Учредители: Национальная академия наук Украины
Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины
(Регистрационное свидетельство серия КВ № 129 от 07. 10. 1993 г.)

Издатель Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины

Редакционная коллегия:

В. Т. Трошенко (главный редактор), **В. А. Борисенко**, **Б. А. Грязнов**,
А. Л. Квитка, **В. Н. Киселевский**, **Б. И. Ковальчук**, **Л. В. Кравчук**,
А. Я. Красовский, **В. В. Кривенюк**, **А. А. Лебедев**, **П. П. Лепихин**,
В. В. Матвеев, **В. П. Науменко**, **Г. В. Степанов**, **В. А. Стрижало**
(зам. главного редактора), **В. В. Харченко**, **В. К. Харченко** (зам.
главного редактора), **А. П. Яковлев**

Редакционный совет:

М. Билы (Словакия), **С. Коцаньда** (Польша), **Н. А. Махутов** (Россия),
К. Миллер (Великобритания), **Я. Немец** (Чехия), **Г. Плювинаж**
(Франция), **Л. Тот** (Венгрия), **Д. Франсуа** (Франция), **К. В. Фролов**
(Россия)

Редакция журнала «Проблемы прочности»:

А. О. Хоцяновский (отв. секретарь)
В. В. Науменко (зав. ред.-изд. отделом)
Л. Б. Дедух (вед. редактор)
Л. В. Молчанова (редактор)
Н. М. Шинкаренко (корректор)

*Адрес редакции: 01014, Киев – 14, ул. Тимирязевская, 2
Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко
Национальной академии наук Украины*

*Телефон: (044) 296 5657
Факс: (044) 296 1684
E-mail: <postmaster@ipp.adam.kiev.ua>*

*Журнал переводится на английский язык и издается в США с 1969 г. издательством
Kluwer Academic/Plenum Publishers под названием «Strength of Materials»*

© Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2003



PROBLEMS of STRENGTH

*International
scientific & technical journal
founded in July 1969*

No. 3 (363) — 2003

Founders: National Academy of Sciences of Ukraine
Pisarenko Institute of Problems of Strength, National Academy of Sciences
of Ukraine

Publisher: Pisarenko Institute of Problems of Strength, National Academy of Sciences
of Ukraine

Editorial board:

V. T. Troshchenko (editor-in-chief), V. A. Borisenko, B. A. Gryaznov,
V. K. Kharchenko (associate editor), V. V. Kharchenko, V. N. Kisilevskii,
B. I. Koval'chuk, A. Ya. Krasovskii, L. V. Kravchuk, V. V. Krivenyuk,
A. L. Kvitka, A. A. Lebedev, P. P. Lepikhin, V. V. Matveev, V. P. Naumenko,
G. V. Stepanov, V. A. Strizhalo (associate editor), A. P. Yakovlev

Advisory board:

M. Bily (Slovakia), D. Francois (France), K. V. Frolov (Russia),
S. Kosanda (Poland), N. A. Makhutov (Russia), K. Miller (UK),
Ya. Némec (Czech Republik), G. Pluinage (France), L. Toth (Hungary)

Editorial staff:

A. O. Khotsyanovskii, V. V. Naumenko, L. B. Dedukh,
L. V. Molchanova, N. M. Shinkarenko

*Address: Pisarenko Institute of Problems of Strength
2, Timiryazevskaya str., Kiev, 01014, Ukraine*

Telephone: (044) 296 5657

Fax: (044) 296 1684

E-mail: <postmaster@ipp.adam.kiev.ua>

*Since 1969 the Journal has been translated into English and published in the USA
by Kluwer Academic/Plenum Publishers under the title **Strength of Materials***

© Pisarenko Institute of Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, 2003

Содержание

Научно-технический раздел

ЛЕБЕДЕВ А. А., МИХАЛЕВИЧ В. М. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов	5
ФЕРРЕЙРА А. Ж. М., СА Ж. М. А. С., МАРКЕС А. Т. Нелинейный конечноэлементный расчет композитных оболочек с каучуковой матрицей (на англ. яз.)	15
ГАВРИЛЕНКО Г. Д., МАЦНЕР В. И., СИТНИК А. С. Устойчивость оболочек по форме близких к цилиндрическим	30
ГОГОЦИ Г. А., ЛУГОВОЙ Н. И., СЛЮНЯЕВ В. Н. Бифуркация трещин в ламинарных керамических композиционных материалах с жесткими межслоевыми связями	45
БОРОДАЧЕВ Н. М., АСТАНИН В. В. Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях	62
ЧИРКОВ А. Ю. Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости	70
БАСТУН В. Н. Деформационное упрочнение начально-изотропных металлов при деформировании по траекториям малой кривизны	101
БАРИЛО В. Г. Термическое деформирование материала при различной жесткости нагружающей системы	110
ГОРБЕНКО А. Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков	120
ЖУРАХОВСКИЙ С. В., ИВАЩЕНКО К. Б., РЯЗАНОВ Ю. А. Зависимость глубины проникания от параметров удлиненного ударника	130

Производственный раздел

ВОЙТЕНКО А. Ф., СТРИЖАЛО В. А., ВОЙТЕНКО Е. А. Автоматизированная установка для определения характеристик упругости и неупругости металлов и сплавов	136
ДЗЮБА В. С., ОКСИЮК С. В. Методика и установка для исследования композиционных материалов при кручении в условиях температур до 3300 К	141

Информационное сообщение

II Международная научно-техническая конференция “Проблемы динамики и прочности в газотурбостроении” (ГТД-2004)	148
--	-----

Утвержден к печати ученым советом ИПП им. Г. С. Писаренко НАН Украины.

*Номер подготовлен, набран и сверстан в редакции ИПП НАН Украины.
Отпечатан в типографии Издательского дома “Академперіодика”,
ул. Терещенковская 4, 01004, Киев-4. Заказ № 881.*

Подп. к печати и в свет 16. 05. 2003. Тираж 440 экз. Цена договорная.

Contents

Scientific and Technical Section

LEBEDEV A. A. and MIKHALEVICH V. M. Stress Invariant Selection in Solving Problems of Material Mechanics	5
FERREIRA A. J. M., SБ J. M. A. C., and MARQUES A. T. Nonlinear Finite Element Analysis of Rubber Composite Shells	15
GAVRILENKO G. D., MATSNER V. I., and SITNIK A. S. Stability of Almost Cylindrical Shells	30
GOGOTSI G. A., LUGOVOI N. I., and SLYUNYAEV V. N. Crack Bifurcation in Laminar Composite Ceramics with Rigid Interlaminar Connection	45
BORODACHEV N. M. and ASTANIN V. V. Solution Method for the Elasticity Theory 3D Problem in Displacements	62
CHIRKOV A. Yu. Mixed Projection-Grid Network of the Finite-Element Method Solution of Elasticity Theory Problems	70
BASTUN V. N. Strain Hardening of Initially Isotropic Metals under Loading along Slightly Curved Trajectories	101
BARILO V. G. Material Thermal Deformation at Different Rigidities of the Loading System	110
GORBENKO A. N. Stability of the Rotor Ball Automatic Balancing	120
ZHURAKHOVSKII S. V., IVASHCHENKO K. B., and RYAZANOV Yu. A. Penetration Depth vs Elongated Projectile Parameters	130

Production Section

VOITENKO A. F., STRIZHALO V. A., and VOITENKO E. A. Automatic Equipment for Determination of Elasticity and Inelasticity Characteristics of Metals and Alloys	136
DZYUBA V. S. and OKSIYUK S. V. A Test Method and Machine for Composite Material Torsion at Temperatures up to 3300 K	141

Announcement

Second International Scientific Conference "Problems of Dynamics and Strength in Gas-Turbine Construction" (GTE-2004)	148
---	-----

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4

О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов

А. А. Лебедев^а, В. М. Михалевич^б

^а Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

^б Винницкий государственный технический университет, Винница, Украина

Предлагается критерию прочности формулировать в виде зависимости интенсивности напряжений от безразмерного инварианта η , равного отношению первого инварианта тензора напряжений к интенсивности напряжений. Приведено доказательство корректности использования инварианта η в случае плоского напряженного состояния. На примерах сопоставления расчетных и экспериментальных данных показаны преимущества предложенной формы представления условий предельного состояния в сравнении с классическим подходом. Указаны возможные пути распространения описанного подхода применительно к объемному напряженному состоянию.

Ключевые слова: критерии прочности, тензор напряжений, плоское и объемное напряженное состояние.

При расчетах элементов конструкций на прочность фактические коэффициенты запаса определяют путем сопоставления уровня реально действующих в рассматриваемом элементе напряжений с характеристиками прочности материала.

За меру интенсивности внутренних усилий при произвольной системе напряжений принимается эквивалентное напряжение, рассчитанное по той или иной теории прочности, а в качестве меры прочности материала – характеристики, которые определяют путем испытания материала при простейших видах нагружения (растяжение, сжатие, реже – кручение).

Аналитическая формулировка условия прочности может быть представлена уравнением

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) = 0, \quad (1)$$

которое в пространстве главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ должно иметь однозначную геометрическую интерпретацию в виде регулярной или сингулярной поверхности, ограничивающей безопасную для заранее оговоренных условий область напряженных состояний. В уравнении (1) m_i – константа, характеризующая свойства материала.

Иногда в качестве параметров напряженного состояния принимают не главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а их инварианты. В этом случае условие прочности можно записать следующим образом:

© А. А. ЛЕБЕДЕВ, В. М. МИХАЛЕВИЧ, 2003

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2003, № 3

$$F(J_1, J_2, J_3, m_i) = 0, \quad (2)$$

где J_1 – первый инвариант тензора напряжений, равный среднему напряжению σ ,

$$J_1 = \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (3)$$

J_2 – второй инвариант девиатора напряжений, равный с точностью до коэффициента квадрату интенсивности напряжений $\sigma_{\text{и}}$,

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{\text{и}}^2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \quad (4)$$

J_3 – третий инвариант девиатора напряжений, связанный с углом ψ вида девиатора, или с фазой, определяющей направление октаэдрического касательного напряжения $\tau_{\text{окт}}$ в девиаторной плоскости.

Угол ψ и параметр Лоде–Надаи μ_{σ}

$$\mu_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \quad (5)$$

связаны зависимостью

$$\mu_{\sigma} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (6)$$

Таким образом, третий инвариант девиатора J_3 адекватен параметру μ_{σ} . Следовательно, условие прочности для произвольной системы напряжений (2) можно записать в виде

$$F^*(\sigma, \sigma_{\text{и}}, \mu_{\sigma}, m_i) = 0, \quad (7)$$

а предельные поверхности рассматривать в системе $\sigma - \sigma_{\text{и}} - \mu_{\sigma}$.

Применительно к плоскому напряженному состоянию ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$) условие (7) без изменения его физического смысла можно упростить путем формального исключения параметра μ_{σ} :

$$\sigma_{\text{и}} = f(\eta), \quad (8)$$

где η – показатель, имеющий смысл “жесткости” напряженного состояния,

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_{\text{и}}}. \quad (9)$$

При этом анализ различных напряженных состояний и обработка экспериментальных данных во многих случаях упрощаются, так как обработка

выполняется не в трехмерном пространстве главных напряжений, а в плоскости. Причем система $\sigma_{ii} - \eta$ является более гибкой и не приводит к неоднозначным результатам.

Докажем последнее утверждение. При плоском напряженном состоянии одно из главных напряжений равно нулю. Поэтому, учитывая, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, возможна реализация одного из трех вариантов:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq 0 \quad (\sigma_3 < 0); \quad (10)$$

$$\sigma_1 \geq 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 \leq 0 \quad (\sigma_1 + |\sigma_3| > 0); \quad (11)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0; \quad \sigma_3 = 0 \quad (\sigma_1 > 0). \quad (12)$$

Для первого варианта с учетом (3), (4), (9) имеем

$$\sigma_2 + \sigma_3 = \eta \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2}; \quad 3\sigma = \sigma_2 + \sigma_3. \quad (13)$$

Тогда

$$\eta = -\frac{1+k_1}{\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}}; \quad k_1 = \sigma_2/\sigma_3 \in [0; 1]. \quad (14)$$

Поскольку производная

$$d\eta/dk_1 = (3/2) \frac{k_1 - 1}{(k_1^2 - k_1 + 1)^{3/2}} < 0 \quad \text{при } k_1 \in [0; 1] \quad (15)$$

непрерывна, показатель η в данном случае изменяется в пределах

$$\eta(k_1 = 1) = -2 \leq \eta \leq \eta(k_1 = 0) = -1. \quad (16)$$

Для второго и третьего вариантов аналогично получим

$$\eta = -\frac{1+k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_2 + 1}}, \quad k_2 = \sigma_1/\sigma_3 \in (-\infty; 0]; \quad (17)$$

$$d\eta/dk_2 = (3/2) \frac{k_2 - 1}{(k_2^2 - k_2 + 1)^{3/2}} < 0 \quad \text{при } k_2 \in (-\infty; 0]; \quad (18)$$

$$\eta(k_2 = 0) = -1 \leq \eta \leq \eta(k_2 = -\infty) = 1, \quad (19)$$

причем

$$\text{для } k_2 \in [-1; 0] \text{ имеем } \eta \in [-1; 0], \text{ для } k_2 \in [-\infty; -1] - \eta \in [0; 1]; \quad (20)$$

$$\eta = \frac{1+k_3}{\sqrt{k_3^2 - k_3 + 1}}, \quad k_3 = \sigma_2/\sigma_1 \in [0; 1]; \quad (21)$$

$$d\eta/dk_3 = (3/2) \frac{1-k_3}{(k_3^2 - k_3 + 1)^{3/2}} > 0 \quad \text{при } k_3 \in [0; 1]; \quad (22)$$

$$\eta(k_3 = 0) = 1 \leq \eta \leq \eta(k_3 = 1) = 2. \quad (23)$$

Что касается параметра Лоде–Надаи μ_σ (5), то для каждого из трех вариантов он принимает все значения от -1 до $+1$. Действительно, для первого варианта имеем

$$\mu_\sigma = -2k_1 + 1, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma(k_1 = 0) = 1, \quad \mu_\sigma(k_1 = 1) = -1; \quad (24)$$

для второго –

$$\mu_\sigma = \frac{2}{1-k_2} - 1, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma(k_2 = -\infty) = -1, \quad \mu_\sigma(k_2 = 0) = 1; \quad (25)$$

для третьего –

$$\mu_\sigma = 2k_3 - 1, \quad \text{т.е. } \mu_\sigma(k_3 = 0) = -1, \quad \mu_\sigma(k_3 = 1) = 1. \quad (26)$$

Это означает, что значения σ_i, η однозначно определяют величины главных напряжений, а σ_i, μ_σ – неоднозначно.

Запишем соотношение (13) в виде, общем для всех трех вариантов:

$$\sigma_i + \sigma_j = \eta \sqrt{\sigma_i^2 - \sigma_i \sigma_j + \sigma_j^2}, \quad (27)$$

где i, j могут принимать любые из значений от единицы до трех, причем $i \neq j$.

Из приведенного анализа следует, что для $-2 \leq \eta \leq -1$ получаем $i=2, j=3$, для $-1 \leq \eta \leq 1-i=1, j=3$, для $1 \leq \eta \leq 2-i=1, j=2$. Возникающая неоднозначность при $|\eta|=1$ принципиального значения не имеет. Например, при $|\eta|=1$ из (27) следует

$$\sigma_i \sigma_j = 0. \quad (28)$$

Пусть $\eta=1$. Полагая $i=1, j=3$, получаем $\sigma_1 \sigma_3 = 0$. А поскольку $\sigma_1 \geq \sigma_3, \sigma_1 + |\sigma_3| > 0$ (см. (11)), то $\sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0$. Аналогично, принимая $i=1, j=2$, получаем $\sigma_1 \sigma_2 = 0$, а так как $\sigma_1 > 0$ (см. (12)), то $\sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0$. В обоих случаях конечный результат один и тот же: $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

При $|\eta| \neq 1$ на основании (27) запишем

$$k_l^2 - 2f_1(\eta)k_l + 1 = 0, \quad 0 \leq k_l \leq \sigma_i/\sigma_j; \quad (29)$$

$$f_1(\eta) = \frac{1 + 0,5\eta^2}{\eta^2 - 1}. \quad (30)$$

Из (27), (29) следует

$$k_l = \begin{cases} f_1(\eta) - \sqrt{f_1^2(\eta) - 1}, & \eta \in [-2; -1] \cup [0; 1] \cup [1; 2]; \\ f_1(\eta) + \sqrt{f_1^2(\eta) - 1}, & \eta \in [-1; 0]; \\ 0, & \eta = \pm 1, \end{cases} \quad (31)$$

причем при $\eta \in [-2, -1]$ $l=1$, при $\eta \in [-1, 1]$ $l=2$, при $\eta \in [1, 2]$ $l=3$.

Пример 1. Рассмотрим физически разные напряженные состояния:

а) равномерное двухосное растяжение – $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$;

б) одноосное сжатие – $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$.

В обоих случаях $\mu_\sigma = +1$, а показатель $\eta = 2$ в случае а) и $\eta = -1$ в случае б).

Пример 2. Значению $\mu_\sigma = 0$ соответствуют три разных показателя: $\eta_1 = -\sqrt{3}$ ($\sigma_2 = 0,5\sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = 0$); $\eta_2 = 0$ ($\sigma_1 = -\sigma_3 > 0$, $\sigma_2 = 0$); $\eta_3 = +\sqrt{3}$ ($\sigma_2 = 0,5\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 = 0$). В приведенных примерах абсолютные значения главных напряжений определяются величиной $\sigma_{\text{н}}$.

Представляет интерес еще один способ доказательства сформулированного утверждения, отличающийся наглядностью конечного вывода. В работе [1]* установлена связь между третьим инвариантом девиатора напряжений и инвариантами самого тензора:

$$J'_3 = J_3 - J_1 J_2 + \frac{2}{9} J_1^3, \quad (32)$$

где

$$J'_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}; \quad J_3 = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}; \quad J_1 = \sigma_{ii} = 3\sigma; \quad J_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij}; \quad (33)$$

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ – девиатор напряжений; σ_{ij} – тензор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера.

Зависимость (32) с учетом равенства [2]

$$|\sigma_{ij}| = \frac{1}{3} J_3 + \frac{1}{6} J_1^3 - \frac{1}{5} J_1 J_2 \quad (34)$$

принимает вид

$$J'_3 = 3|\sigma_{ij}| + \frac{1}{2} J_1 J_2 - \frac{5}{18} J_1^3. \quad (35)$$

С другой стороны, определитель $|\sigma_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ и при плоском напряженном состоянии равен нулю. Поэтому из (35) следует известная зависи-

* В [1] допущена опечатка: перед последним слагаемым должен стоять знак плюс (см. уравнение (32)).

мость [3] между третьим инвариантом девиатора напряжений, интенсивностью напряжений и средним напряжением:

$$J'_3 = \sigma(\sigma_{\text{и}}^2 - 3\sigma^2), \quad (36)$$

которую легко представить следующим образом:

$$J'_3 = \frac{1}{9} \sigma_{\text{и}}^3 \eta(3 - \eta^2). \quad (37)$$

Известно также, что в общем случае трехосного напряженного состояния имеет место равенство [1, 2]

$$J'_3 = \frac{2}{9} \sigma_{\text{и}}^3 \cos(3\psi). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что при плоском напряженном состоянии угол вида девиатора напряжений ψ определяется зависимостью

$$\psi = \frac{1}{3} \arccos[0,5\eta(3 - \eta^2)]. \quad (39)$$

Несложно показать, что

$$\mu_{\sigma} = \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right). \quad (40)$$

Ю. Н. Работновым [1] используется безразмерный инвариант ξ , равный

$$\xi = \frac{\sqrt{6} J'_3}{(J'_2)^{3/2}} = \cos(3\psi). \quad (41)$$

В работах А. А. Ильюшина фигурирует третий инвариант направляющего тензора напряжений D , равный $\xi/\sqrt{54}$.

На рис. 1 представлены графики, рассчитанные по соотношениям (39)–(41). Видно, что величины ψ , μ_{σ} , ξ однозначно определяются показателем η . Обратное неверно.

Преимущества предложенного подхода проиллюстрируем путем анализа известных экспериментальных данных [4], полученных при испытании трубчатых образцов из серого чугуна [5]. Результаты опытов обрабатывали по двухпараметрическим критериям Баландина и Писаренко–Лебедева для структурно-неоднородных материалов, к которым относится серый чугун:

$$\sigma_{\text{и}}^2 = A + B\sigma; \quad (42)$$

$$\sigma_{\text{и}} = a + b\sigma_1 0,75^{1-\eta}. \quad (43)$$

Выразив в соотношениях (42), (43) инварианты $\sigma_{\text{и}}$, σ через главные нормальные напряжения, а константы A, B, a, b через предельные напряжения при растяжении $\sigma_{\text{р}}$ и сжатии $\sigma_{\text{с}}$, получим:

для критерия Баландина

$$\begin{aligned} &\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ &+ (\sigma_{\text{с}} - \sigma_{\text{р}})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{р}}\sigma_{\text{с}}; \end{aligned} \quad (44)$$

для критерия Писаренко–Лебедева –

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{\text{р}}}{\sqrt{2}\sigma_{\text{с}}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} + \\ &+ \left(1 - \frac{\sigma_{\text{р}}}{\sigma_{\text{с}}}\right) \sigma_1 0,75^{1-\eta} = \sigma_{\text{р}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что многие известные критерии являются частными случаями критериев (44), (45).

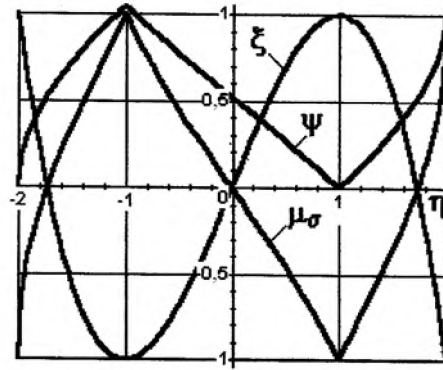


Рис. 1. Зависимости между инвариантами при плоском напряженном состоянии.

На рис. 2 приведено сопоставление экспериментальных и расчетных данных в традиционном пространстве главных напряжений.

Путем преобразований уравнений (44), (45) в координатах $\sigma_{\text{и}} - \eta$ получим:

для критерия Баландина

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{р}} - \sigma_{\text{с}})\eta + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{\text{р}} - \sigma_{\text{с}})\eta\right)^2 + \sigma_{\text{р}}\sigma_{\text{с}}}; \quad (46)$$

для критерия Писаренко–Лебедева –

$$\sigma_{и} = \frac{\sigma_p}{\frac{\sigma_p}{\sigma_c} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \right) \left\{ \eta + 2 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(0,5\eta(3 - \eta^2)) \right] \right\}} \cdot 0,75^{1-\eta} \quad (47)$$

Эти соотношения, последнее из которых справедливо только применительно к плоскому напряженному состоянию, можно трактовать как зависимость интенсивности напряжений от “жесткости” напряженного состояния, характеризуемой показателем η .

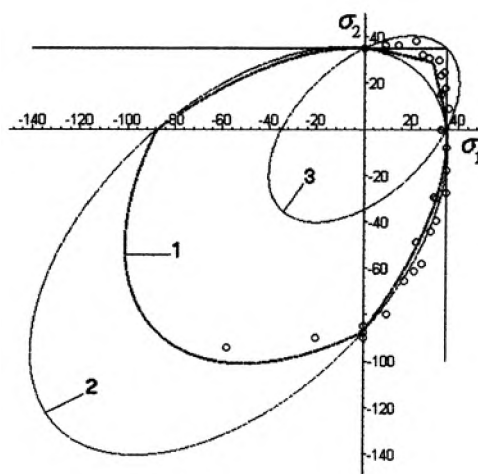


Рис. 2. Представление расчетных и экспериментальных данных по прочности серого чугуна в традиционном пространстве главных напряжений: 1 – условие Писаренко–Лебедева (45); 2 – условие Баландина (44); 3 – условие Мизеса; вертикальная и горизонтальная прямые – первая теория прочности.

На рис. 3 в координатах $\sigma_{и} - \eta$ представлены те же экспериментальные данные, что и на рис. 2. Поверхности длительной прочности

$$t_{*c} = t_{*c}(\sigma_i, \eta), \quad (48)$$

где t_{*c} – время до разрушения, построенные на основе известных экспериментальных данных, приведены в работах авторов [6, 7].

Сопоставление данных на рис. 2 и 3 показывает, что предлагаемая трактовка условий предельного состояния имеет очевидные преимущества в сравнении с классической. Прежде всего зависимость $\sigma_{и} = \sigma_{и}(\eta)$ представляется однозначной функцией, что облегчает визуальную оценку результатов и сравнение аналитических и экспериментальных данных. Например, из рис. 3 более четко видно, что условия Баландина и Писаренко–Лебедева имеют один и тот же порядок соответствия экспериментальным данным в области $-1 \leq \eta \leq 1$. В областях $-2 \leq \eta < -1$ и $1 \leq \eta < 2$ условие Баландина приводит к серьезному, даже качественному искажению, а погрешность превышает 60%.

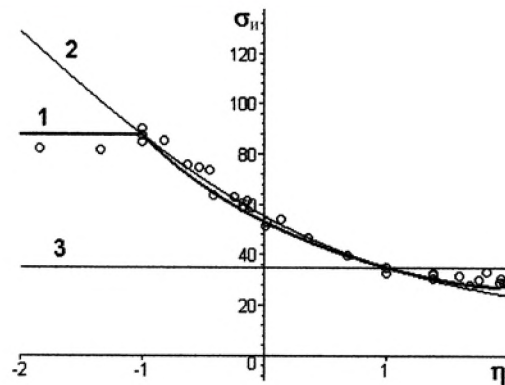


Рис. 3. Представление расчетных и экспериментальных данных по прочности чугуна в виде зависимости интенсивности напряжений от показателя “жесткости” напряженного состояния: 1 – условие Писаренко–Лебедева (47); 2 – условие Баладина (46); 3 – условие Мизеса.

Использование критериев в виде $\sigma_{и} = \sigma_{и}(\eta)$ исключает возможные ошибки и свободно от условностей, имеющих место при анализе условий предельного состояния в пространстве главных напряжений, так как система σ_1, σ_2 справедлива только для первого квадранта. Оси напряженных состояний четвертого квадранта должны иметь наименование σ_1, σ_2 , третьего квадранта – σ_2, σ_3 , второй квадрант вообще не используется.

При объемном напряженном состоянии одного показателя η уже недостаточно. Казалось бы естественным введение в этом случае параметра Лоде–Надаи μ_σ или угла вида девиатора ψ , однако эти параметры не остаются неизменными в условиях плоского напряженного состояния. Выбрав с учетом (39) в качестве второго показателя ν соотношение в виде

$$\nu = \cos(3\psi_\sigma) - 0,5\eta(3 - \eta^2), \quad (49)$$

критерии предельного состояния для произвольной системы напряжений можно свести к форме

$$\sigma_{и} = f(\eta, \nu), \quad (50)$$

причем показатель ν тождественно равен нулю при плоском напряженном состоянии. Можно показать, что к результату (49) мы пришли бы, приняв

$$\nu = \frac{|\sigma_{ij}|}{(\sigma_{и}/3)^3}. \quad (51)$$

Следует заметить, что случай трехосного напряженного состояния требует более глубокого анализа.

Предложенная форма геометрической интерпретации критериев предельного состояния не исключает использования классических подходов. В отдельных случаях благодаря отмеченным выше преимуществам она, несомненно, может оказаться более информативной и удобной.

Резюме

Запропоновано критерії міцності формулювати у вигляді залежності інтенсивності напружень від безрозмірного інваріанта η , який дорівнює відношенню першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень. Представлено доведення коректності використання інваріанта η у випадку плоского напруженого стану. На прикладах зіставлення розрахункових і експериментальних даних доведено переваги запропонованої форми подання умов граничного стану порівняно з класичним підходом. Установлено можливі шляхи розповсюдження описаного підходу стосовно об'ємного напруженого стану.

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
3. *Шевченко Ю. Н.* Термовязкоупругопластические процессы деформирования элементов твердого тела (обзор) // Прикл. механика. – 1994. – № 3. – С. 3 – 24.
4. *Павлов П. А.* Механические состояния и прочность материалов. – Л.: Из-во Ленинград. ун-та, 1979. – 176 с.
5. *Coffin L. F.* The flow and fracture of a brittle material // J. Appl. Mech. – 1950. – 17, No. 3. – P. 233 – 248.
6. *Лебедев А. О., Михалевич В. М.* До теорії тривалої міцності // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 57 – 62.
7. *Михалевич В. М.* Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1998. – 195 с.

Поступила 30. 09. 2002

Abstracts

Lebedev A. A. and Mikhalevich V. M. **Stress Invariant Selection in Solving Problems of Material Mechanics** // Problems of Strength. – 2003. – No. 3. – P. 5 – 14.

We suggest the strength criterion be represented in form of the dependence of the stress intensity on the infinite invariant η given by the relation of the first stress tensor invariant to the intensity of stresses. The proof of reasonable application of the invariant η to the case of plane stress is given. By correlations between the calculated and experimental data we show advantages of the proposed representation form of the ultimate state conditions over classic approaches. We outline possible ways of spreading the described approach as applied to a triaxial stress state.

Ferreira A. J. M., Sá J. M. A. C., and Marques A. T. **Nonlinear Finite-Element Analysis of Rubber Composite Shells** // Problems of Strength. – 2003. – No. 3. – P. 15 – 29.

A finite-element solution for rubber composite shells is presented. Sandwich laminates with a rubber core have also been studied. Incompressibility of a rubber matrix and complexity of composite shells bring forth the need for a sound numerical model to describe the behavior of such engineering materials. The developed model was applied to a degenerate shell element within the limits of the first- and third-order shear deformation theories. The model allows to predict with a sufficient accuracy the nonlinear behavior of sandwich shells with composite skins and rubber cores and composite shells with a rubber matrix.

Gavrilenko G. D., Matsner V. I. and Sitnik A. S. **Stability of Almost Cylindrical Shells** // Problems of Strength. – 2003. – No. 3. – P. 30 – 44.

We propose a method for evaluating critical loads of elastic almost cylindrical shells by the equilibrium equation in displacements. An analytical expression for critical stresses in momentless smooth shells has been obtained. We have graphically analyzed the role of individual components of the total potential energy of shells upon stress state stabilization or destabilization. A relation of the non-dimensional critical stresses to the classical ones de-

termined for ideal cylindrical shells is presented. The obtained results have been correlated with the known experimental data.

Gogotsi G. A., Lugovoi N. I., and Shyunyaev V. N. **Crack Bifurcation in Laminar Composite Ceramics with Rigid Interlaminar Connection** // Problems of Strength. – 2003. – No. 3. – P. 45 – 61.

Crack bifurcation in a symmetric two-component laminar composite has been studied. Geometrics restricting this effect realization have been established. Bifurcation area is determined by the following parameters: the number of layers, cooling temperature range, elastic constants, and the layer thermal expansion coefficients. Bifurcation constraints in the specimen with a given composition layer number are correlated to those for the specimen with a fixed stacked thickness.

Borodachev N. M. and Astanin V. V. **Solution Method for the Elasticity Theory 3D Problem in Displacements** // Problems of Strength. – 2003. – No. 3. – P. 62 – 69.

A new solution method for a 3D problem of the elasticity theory in displacements has been proposed. The method is based on the Tedone equilibrium equation. As distinct from the procedures of Betti and Cerrutti–Boussinesq, the described approach does not require volume expansion be previously evaluated. For the illustration, the first and second boundary-value problems for an elastic isotropic half-space have been considered.

Chirkov A. Yu. **Mixed Projection-Grid Network of the Finite-Element Method Solution of Elasticity Theory Problems** // Problems of Strength. – 2003. – No. 3. – P. 70 – 100.

A mixed projection-grid network of solving the elasticity theory boundary problems has been formulated. Correctness and convergence of mixed approximations for strains and displacements are studied. Results of the application of numerical integration have been analyzed. Convergence and accuracy estimates are based on the generalized function theory and functional-analysis methods. Iteration solution algorithms for discrete problems are proposed.