В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Практикум

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Практикум

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 51(075)
ББК 22.я73
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 30.10.2014 р.)

Рецензенти:

Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор

Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор

Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, В. В.

Х76 Вища математика. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум / В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 116 с.

У навчальному посібнику на системній основі наводиться теоретичний мінімум з базових тем курсу «Вища математика», а саме з лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії та основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади проведення інтерактивних практичних занять із розглядуваних тем.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)
ББК 22.я73

ЗМІСТ

Математика – цариця всіх наук. Її улюблениця – істина, її вбрання – простота і ясність. Палац цієї володарки оточено тернистими заростями, і, щоб досягти його, кожному доводиться пробиратися крізь хащі. Випадковий мандрівник не виявить у палаці нічого привабливого. Краса його відкривається лише розуму, що любить істину і загартований в боротьбі з труднощами, і такому, який свідчить про незвичайну схильність людини до заплутаних, але невичерпних і піднесених розумових насолод.

Ян Снядецький

Розв'язування задач є найхарактернішим і специфічним різновидом вільного мислення.

В. Джеймс

ВСТУП

У суспільстві розвиненої ринкової економіки працевлаштування та досягнення мети всіма членами суспільства тісно пов'язано з умінням постійно вдосконалювати свої здібності, встигати за розвитком науково-технічного прогресу, бути готовим до використання сучасних інформаційних технологій. В епоху науково-технічної революції широке розповсюдження математичних знань стає органічною потребою. Більшість провідних професій в сучасному суспільстві вимагають від майбутніх спеціалістів різного профілю значних знань з математики та умінь її застосування. Математика набуває все більшого значення в інших науках, а також широко використовується при розв'язанні завдань науково-технічного прогресу, особливо тих, що стосуються нових галузей техніки. В сучасних умовах певний обсяг математичних знань, добре володіння математичними методами стали обов'язковим елементом загальної культури. Організація навчального та виховного процесу студентів повинна сприяти досягненню ними ґрунтовних знань з обраної спеціальності, умінню творчо мислити, коротко та логічно виражати свої думки. Важливу роль у набутті вказаних вище рис відіграє процес вивчення математичних дисциплін.

Для загальної освіти майбутніх спеціалістів вкрай необхідно познайомити їх з науковими методами дослідження, логічної побудови математичних теорій. Математика завжди вважалася і вважається одним із найскладніших предметів, однак не можна переоцінити її особливу роль у розвитку мислення, формуванні творчої особистості. Загальноосвітня мета вивчення даної дисципліни полягає в тому, щоб надати студентам систематизовані знання основ математичної науки і ті уміння та навики, що необхідні для міцного, повноцінного і свідомого засвоєння знань, окреслених навчальною програмою. Життєво-практична ціль викладання даної дисципліни полягає в озброєнні студентів тими знаннями, уміннями та навичками математичних алгоритмів, які б вони могли використовувати у своїй повсякденній практичній діяльності.

У **практикумі** подано перелік практичних занять з розділів курсу «Елементи лінійної алгебри», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія». Кожне практичне заняття містить: тему, мету, питання для самопідготовки, план, термінологічний словник ключових понять, зразки розв'язування типових задач, добірку завдань для аудиторної та самостійної роботи. Для допомоги у підготовці до практичних занять, а також для виконання самостійної роботи у практикумі подано список рекомендованої літератури.

Практикум, призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення окремих розділів курсу.

1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Практичне заняття № 1

Матриці та дії над ними. Визначники, їх властивості та обчислення

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з тем: «Матриці», «Визначники», набути навичок і вмінь виконання дій над матрицями, обчислення визначників різними методами, знаходження рангу матриці.

Питання для самопідготовки:

– поняття матриці, визначника матриці;
– види матриць;
– дії над матрицями, властивості дій над матрицями;
– поняття визначника другого (третього) порядку;
– основні властивості визначників;
– поняття мінору, алгебраїчного доповнення елемента визначника;
– теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпця;
– ранг матриці, способи знаходження рангу матриці.

План практичного заняття

1). Матриці, їх види. Додавання, віднімання, множення матриць.
2). Обчислення визначників II та III порядків.
3). Обчислення визначників третього і вищих порядків методом розкладу визначника за елементами рядка або стовпця.
4). Знаходження рангу матриці.

Теоретичний довідник

Матрицею називають прямокутну таблицю розмірами m на n або $m \times n$. Як правило, елементами матриці є числа, хоча це можуть бути й функції, і буквені вирази. Записують матриці так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця – це матриця, у якої $m = n$.

Діагональна матриця – це квадратна матриця, в якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одинична матриця – це діагональна матриця, в якої всі елементи дорівнюють одиниці.

Нульова матриця – це матриця, в якої всі елементи дорівнюють нулю.

Трикутна матриця – це квадратна матриця, в якої всі її елементи, що розміщені нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Вектор - рядок – це матриця, що містить лише один рядок.

Вектор - стовпець – це матриця, що містить лише один стовпець.

Симетрична матриця – це матриця, для якої $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i \in \overline{1,m}; \forall j \in \overline{1,m})$.

Транспонована матриця – це матриця рядки і стовпці якої поміняні місцями, позначають $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Узгоджені матриці – це матриці, для яких кількість стовпчиків у першій матриці дорівнює кількості рядків у другій.

Операції додавання, віднімання, порівняння, множення матриць на число здійснюється поелементно. Множаться матриці лише узгоджені.

Добуток матриць не має переставної властивості, тобто ***не завжди*** $AB = BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці називають ***переставними***.

Кожній квадратній матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ поставимо у відповідність дійсне число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, яке називають ***визначником другого порядку***. Позначають:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

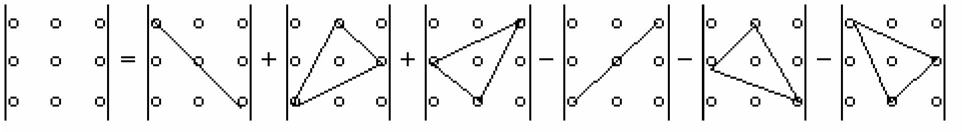
Теорема. Визначник другого порядку з ненульовими елементами дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його рядки (стовпчики) пропорційні.

Кожній квадратній матриці А третього порядку поставимо у відповідність число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} +$$

$$+a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}),$$

яке називають ***визначником третього порядку***: $\Delta = \det A$ *або* $\Delta = |A|$.



Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ n-го порядку називають визначник $(n-1)$-го порядку, що одержується з визначника Δ викресленням i-го рядка і j-го стовпчика, на перетині яких розміщується елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника Δ називають число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, тобто якщо число $(i+j)$ парне, то $A_{ij} = M_{ij}$, в іншому випадку – $A_{ij} = -M_{ij}$.

Теорема (про розклад визначника). Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення.

Властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо рядки та стовпці його поміняти місцями

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки або стовпці, то знак визначника змінюється на протилежний.

Наслідок. Якщо визначник містить два однакових рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

3. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника

Наслідок 1. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо визначник містить пропорційні рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

4. Якщо елементи деякого рядка визначника представляють собою суму двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників.

Наслідок. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) домножити на число λ і додати почленно до елементів іншого рядка (стовпця), то значення визначника не зміниться.

5. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Наслідок. Визначник діагональної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Ранг матриці А – це найбільший порядок відмінного від нуля її мінора. Ранг матриці А прийнято позначати *Rg(A)* або *rang A*.

Властивості рангу матриці:

1. Ранг матриці А порядку $m \times n$ не перевищує меншого з чисел m і n тобто $r(A) \le \min\{m,n\}$.
2. $r(A)=0$ тоді і тільки тоді, коли А – нульова матриця.
3. Ранг квадратної матриці А n-го порядку дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця А невироджена, тобто її визначник не дорівнює нулю.

Методи обчислення рангу матриці:

1. Метод ***окантування*** (за означенням).
2. Метод, який полягає в застосуванні ***елементарних перетворень*** матриці, до яких належать:

а) вилучення нульового рядка (стовпця);

б) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;

в) зміна порядку рядків (стовпців);

г) додавання до кожного елемента деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число;

д) транспонування матриці.

За допомогою елементарних перетворень матрицю можна звести до трикутного вигляду.

Матриці, які ми одержуємо за допомогою елементарних перетворень, називаються ***еквівалентними*** і позначаються знаком «$\sim$».

Ранг матриці трикутного вигляду дорівнює кількості діагональних елементів, які не дорівнюють нулю.

Алгоритм знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень

1. Зробити так, щоб коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Для цього можна поміняти рядки місцями.
2. В першому стовпці під коефіцієнтом a_{11} зробити всі нулі. Для цього помножити перший рядок послідовно на $\frac{-a_{21}}{a_{11}}, \frac{-a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ і додати відповідно до другого, третього, m-го рядків.
3. Якщо в результаті перетворень отримали рядок чи стовпець, що містить усі нулі, то його вилучити.
4. Аналогічно зробити так, щоб коефіцієнт $a_{22} \neq 0$, а під ним були нулі.
5. Описані дії повторити для всіх діагональних елементів (з однаковими індексами), доки матриця не буде зведена до трикутного вигляду.
6. Знайти ранг матриці (кількість діагональних елементів, які не дорів-

нюють нулю).

Теорема 1. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Теорема 2. Ранг ступінчатої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Ненульовий рядок – це рядок, який містить в собі хоча б один елемент, який не дорівнює нулю.

Ранг матриці не зміниться, якщо її транспонувати. Ранг матриці дорівнює рангу ступінчатої матриці, яка одержана із даної матриці за допомогою елементарних перетворень.

Метод обвідних мінорів

Цей метод полягає в наступному:

1. Находимо який-небудь мінор M_1 першого порядку (тобто елемент матриці) відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 0$ (матриця A– нульова).

2. Обчислюємо мінори другого порядку, які містять в собі M_1 (обводять M_1) до тих пір, поки не знайдеться мінор M_2 відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, якщо є, то $r(A) \geq 2$ і т. д.

k. Обчислюємо мінори k-го порядку, якщо вони існують, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$. Якщо таких мінорів немає, або вони всі дорівнюють нулю, то $r(A) = k - 1$, якщо хоча б один мінор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ і т. д.

При знаходженні рангу матриці таким способом достатньо на кожному кроці знайти всього один ненульовий мінор k-го порядку, причому шукати його потрібно тільки серед мінорів, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$.

Матрицю A^{-1} називають ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Квадратну матрицю A називають ***виродженою***, якщо її визначник дорівнює нулю. Якщо $|A| \neq 0$, то матрицю A називають ***невиродженою***.

Якщо матриця A невироджена, то обернену до неї матрицю A^{-1} можна знайти за таким алгоритмом:

1) обчислити визначник $|A| = \Delta$;
2) обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} для всіх елементів матриці A;
3) знайти матрицю $\tilde{A}$, що має вигляд $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$;
4) записати обернену матрицю: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}$

Для контролю варто переконатися, що $A \cdot A^{-1} = E$.

Література

1. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник. / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
2. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посібник : у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
3. Валєєв К. Г. Математичний практикум : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
4. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи ; ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : навч. посібник / В. Д. Гетманцев. – К. : Либідь, 2001. – 256 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебн. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1980. – 320 с.
7. Долгіх В. М. Вища математика для економістів : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх. – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – Ч. 1 : Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – 103 с.
8. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
9. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К. : Вища школа, 2001. – 303 с.
10. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / за редакцією Ю. К. Рудавського. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 256 с.
11. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
12. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
13. Кривуца В. Г. Вища математика : практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
14. Лиман Ф. М. Вища математика : навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
15. Навієв Е. Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник / Е. Х. Навієв, В. М. Владіміров, О. А. Миронець. – К. : Либідь, 1997. – 152 с.
16. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1987. – 552 с.

17. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач : навч. посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – К. : Діал, 2000. – 160 с.
18. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 262 с.
19. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебн. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.

Навчальне видання

Хом'юк Віктор Вікторович
Хом'юк Ірина Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Практикум

Редактор І. Городенська

Оригінал-макет підготовлено І. Хом'юк

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад пр. Зам. №

.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.