ЕНЕРГЕТИКА ТА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

УДК: 62-50

О. Б. Мокін[1]
Б. І. Мокін[1]
Я. В. Хом'юк[1]

УМОВИ ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

[1]Вінницький національний технічний університет

Обґрунтовані умови, за виконання яких нелінійні динамічні системи зі степеневими нелінійностями можна еквівалентно описувати в частотній області математичними моделями, за використання яких не потрібно обчислювати вольтерівські інтеграли з кратністю, рівною порядку степеневої нелінійності.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, степенева нелінійність, кратні інтеграли Вольтера, еквівалентна модель, частотна область.

Вихідні передумови та постановка задачі

В роботі [1] запропоновано нелінійну динамічну систему зі степеневою нелінійністю n-го порядку, на вхід якої надходить сигнал $x(t)$, а на виході має місце сигнал $y(t)$, представляти у вигляді послідовного з'єднання її лінійної частини з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$, на виході якої має місце квазісигнал $y^*(t)$, та безинерційної степеневої нелінійності n-го порядку

$$f(y^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(y^*\right)^i , \tag{1}$$

на вхід якої надходить квазісигнал $y^*(t)$, а на виході має місце сигнал $y(t)$, тобто, представляти так, як показано на рис. 1

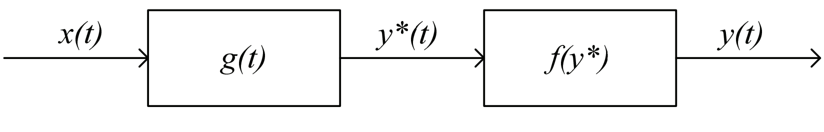

Рис. 1. Еквівалентна структурна схема нелінійної динамічної системи

У цій же роботі [1] показано, що за такого еквівалентування вихідний сигнал $y(t)$ нелінійної динамічної системи можна зв'язати з її вхідним сигналом $x(t)$ та імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$ лінійної частини вольтерівською інтегральною моделлю, що має вигляд

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\infty}^{\infty} \bullet\bullet^{i}\bullet\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t-\tau_1\right)...x\left(t-\tau_i\right) g\left(\tau_1,...,\tau_i\right) d\tau_1...d\tau_i . \tag{2}$$

А в роботі [2], розробляючи спрощений Фур'є-інтегральний метод ідентифікації нелінійної динамічної системи зі степеневою нелінійністю, зав'язаний на амлітудно-фазо-частотну характеристику (АФЧХ) її лінійної частини $W(j\omega)$, замість виразу (2), використано вираз

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\int_0^{\infty}x(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)^i, \quad (3)$$

який за використання представлення вхідного сигналу $x(t)$ у вигляді відрізку ряду Фур'є

$$x(t)\approx\sum_{q=-m}^{m}b_q e^{q\omega_0 t} \quad (4)$$

приводить до математичної моделі нелінійної динамічної системи у вигляді

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\sum_{q=-m}^{m}b_q W(jq\omega_0)e^{q\omega_0 t}\right)^i, \quad (5)$$

де $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$, а T — період інтегрування сигналу $x(t)$ при його розкладенні у відрізок ряду (4), з якою працювати набагато легше у порівнянні з вольтерівською моделлю (2).

В цій роботі показано, за яких умов перехід від моделі (2) до моделі (3) є коректним, визначено межі розширення цих умов, а також здійснено трансформацію моделей (3), (5) до умов розширення меж.

Розв'язання поставленої задачі

Порівнюючи вирази (2) і (3), бачимо, що вони відрізняються, по-перше, тим, що у виразі (2) нижньою границею інтегралів є мінус нескінченність, а у виразі (3) нижньою границею інтегралів є нуль. А по-друге, ці вирази відрізняються тим, що у виразі (2) має місце зважена сума кратних інтегралів, а у виразі (3) бачимо таку ж зважену суму, але однократних інтегралів, піднятих до степенів, які дорівнюють кратності інтегралів у відповідних доданках виразу (2).

Почнемо дослідження з пошуку відповіді на запитання:

1. Чи не впливає заміна нижніх границь в інтегралах на кінцевий результат?

2. Навіщо нам потрібна була така заміна?

Відповідати на ці запитання почнемо з нагадування, що, як показано в будь-якому навчальному посібнику з теорії автоматичного керування, наприклад [3], імпульсна перехідна характеристика $g(t)$ лінійної динамічної системи є реакцією типу

$$g(t)=\begin{cases}g(t) \text{ при } t\geq 0;\\ 0 \quad \text{ при } t<0,\end{cases} \quad (6)$$

цієї системи на вхідний сигнал у вигляді дельта-функції Дірака $\delta(t)$, для якої справедливими є співвідношення

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty \text{ при } t=0;\\ 0 \text{ при } t\neq 0,\end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1, \quad (7)$$

передаточна функція $W(p)$ системи — це перетворена по Лапласу її імпульсна перехідна характеристика $g(t)$, тобто

$$W(p)=\int_0^{\infty}g(t)e^{-pt}dt, \quad (8)$$

а АФЧХ $W(j\omega)$ системи отримуємо з передаточної функції $W(p)$ заміною комплексної змінної p на її уявну складову $j\omega$, тобто

$$W(j\omega)=W(p)\Big|_{p=j\omega}. \quad (9)$$

Отже, якщо у виразі (2) задамо ядру кратних інтегралів властивість (6), завдяки якій обнуляється значення будь-якого із цих інтегралів на проміжку значень змінної інтегрування $(-\infty,0)$, то у цьому виразі нижні границі інтегрування можна замінити на нулі — і це не приведе до зміни значень цих інтегралів.

А тепер покажемо, навіщо нам потрібна ця заміна нижніх границь інтегрування з $-\infty$ на 0.

Ця заміна потрібна тому, що у виразі (3) ми оперуємо зі значеннями АФЧХ $W\left(jq\omega_0\right)$ лінійної частини динамічної системи, взятими в окремих точках $q\omega_0$, а в інтегралі Лапласа (8), за допомогою якого зв'язуються між собою передаточна функція $W(p)$ лінійної частини динамічної системи, яка породжує АФЧХ $W(j\omega)$, з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$, нижньою границею є нуль.

Тепер перейдемо до пошуку відповіді на запитання, за яких умов від кратних інтегралів у виразі (2) можна перейти до відповідних степенів однократного інтеграла у виразі (3).

Цілком очевидно, що багатократні інтеграли у виразі (2) перетворюються в добуток однократних інтегралів, що в силу ідентичності цих однократних інтегралів (до меж інтегрування включно) приводить до відповідних степенів цих однократних інтегралів у виразі (3), лише тоді, коли для ядра кратного інтеграла справедливою є властивість

$$g\left(\tau_1,\tau_2,...,\tau_i\right)=g\left(\tau_1\right)\left(\tau_2\right)...g\left(\tau_i\right), \tag{10}$$

на що звернув увагу і автор роботи [1], який проте, звернувши на цю властивість увагу і назвавши її сепарабельністю ядра, у подальшому її не використовував і не намагався встановити клас функцій, для яких вона є справедливою. Тож із визначення класу функцій, для яких є справедливою властивість (10), ми і продовжимо наше дослідження.

Цілком очевидно, що лише одна функція — показникова, що має вигляд

$$f(\tau)=r^{\alpha\tau}, \tag{11}$$

де α, r — константи, задовольняє властивості (10), оскільки для неї є справедливою тотожність

$$r^{\alpha_1\tau\ +\alpha_2\tau_2+...+\alpha_i\tau_i}=r^{\alpha_1\tau}\ r^{\alpha_2\tau_2}...r^{\alpha_i\tau_i} \tag{12}$$

або

$$e^{\alpha_1\tau\ +\alpha_2\tau_2+...+\alpha_i\tau_i}=e^{\alpha_1\tau}\ e^{\alpha_2\tau_2}...e^{\alpha_i\tau_i}, \tag{13}$$

якщо в класі показникових функцій вибрати експоненціальні, котрі є базовими для усіх імпульсних перехідних характеристик лінійних динамічних систем і однозначно пов'язують експоненціальні складові цих характеристик зі значеннями полюсів передаточних функцій породжуючих їх систем. І як відомо, наприклад з [3], кожному полюсу передаточної функції у імпульсній перехідній характеристиці відповідає одна експоненціальна складова, число яких в імпульсній перехідній характеристиці дорівнює порядку диференціального рівняння, з якого отримано передаточну функцію.

А тому, якщо нелінійна динамічна система описується диференціальним рівнянням 1-го порядку, то вирази (2), (3) є тотожними, і математична модель (5) для такої системи є справедливою без будь-яких додаткових умов. Саме такі моделі синтезовані в роботі [2], а тому використання для ідентифікації цих моделей метода, побудованого на основі виразу (5) і також викладеного в роботі [2], є правомірним.

Але якщо вирази (2), (3) є тотожними лише для імпульсної перехідної характеристики, яка містить в собі тільки одну експоненціальну складову, характерну для динамічної системи 1-го порядку, то само собою виникає запитання: «А чи не можна їх трансформувати так, щоб вони були тотожними і за умови, що імпульсна перехідна характеристика динамічної системи містить в собі кілька експоненціальних складових, кількість яких, як ми уже відмітили вище, дорівнює порядку диференціального рівняння, яким описується процес у цій динамічній системі?»

Далі покажемо, що відповідь на це запитання є позитивною.

Нехай імпульсна перехідна характеристика лінійної динамічної системи є такою, що може бути представлена у вигляді

$$g(t)=g_1(t)+g_2(t). \tag{14}$$

Підставляючи вираз (14) у вираз (2), отримаємо:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\int_{-\infty}^{\infty}\bullet\bullet^i\bullet\bullet\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t-\tau_1\right)...x\left(t-\tau_i\right)\left[g_1\left(\tau_1,...,\tau_i\right)+g_2\left(\tau_1,...,\tau_i\right)\right]d\tau_1...d\tau_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\int_{-\infty}^{\infty}\bullet\bullet^i\bullet\bullet\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t-\tau_1\right)...x\left(t-\tau_i\right)g_1\left(\tau_1,...,\tau_i\right)d\tau_1...d\tau_i+\right. \tag{15}$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\bullet\bullet^i\bullet\bullet\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t-\tau_1\right)...x\left(t-\tau_i\right)g_2\left(\tau_1,...,\tau_i\right)_i d\tau_1...d\tau\right].$$

За умови, що для кожної складової у виразі (14) виконується тотожність (10), а якщо кожна складова є експонентою, то ця тотожність згідно з (13) виконується завжди — та згідно з виконанням для кожної складової властивості (6) вираз (15) ми можемо представити у вигляді

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\left(\int_0^{\infty}x(t-\tau)g_1(\tau)d\tau\right)^i+\left(\int_0^{\infty}x(t-\tau)g_2(\tau)d\tau\right)^i\right]. \quad (16)$$

У свою чергу вираз (16) з використанням співвідношень (4), (8), (9) легко приводиться до вигляду

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\left(\sum_{q=-m}^{m}b_qW_1\left(jq\omega_0\right)e^{q\omega_0 t}\right)^i+\left(\sum_{q=-m}^{m}b_qW_2\left(jq\omega_0\right)e^{q\omega_0 t}\right)^i\right], \quad (17)$$

де

$$W_1\left(jq\omega_0\right)=W_1(p)\Big|_{p=jq\omega_0};\quad W_2\left(jq\omega_0\right)=W_2(p)\Big|_{p=jq\omega_0}; \quad (18)$$

$$W_1(p)=\int_0^{\infty}g_1(t)e^{-pt}dt;\quad W_2(p)=\int_0^{\infty}g_2(t)e^{-pt}dt. \quad (19)$$

Узагальнюючи вираз (14) до N складових, тобто, представляючи імпульсну перехідну характеристику лінійної частини нелінійної динамічної системи N-го порядку у вигляді

$$g(t)=\sum_{k=1}^{N}g_k(t), \quad (20)$$

за умови, що для кожної складової у виразі (20) справедливою є властивість (10), легко дійти до узагальненого виразу

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{q=-m}^{m}b_qW_k\left(jq\omega_0\right)e^{q\omega_0 t}\right)^i\right], \quad (21)$$

де

$$W_k\left(jq\omega_0\right)=W_k(p)\Big|_{p=jq\omega_0},\ k=1,2,...,N,\quad W_k(p)=\int_0^{\infty}g_k(t)e^{-pt}dt. \quad (22)$$

Узагальнення Фур'є-інтегрального методу ідентифікації, побудованого в роботі [2] для випадку, коли імпульсна перехідна характеристика містить лише одну експоненціальну складову, на нелінійні динамічні системи N-го порядку з використанням узагальненої моделі (21) буде здійснено у нашій наступній статті.

Висновки

1. Визначені умови, за яких нелінійні динамічні системи зі степеневими нелінійностями можна ідентифікувати еквівалентними математичними моделями, що переводять розв'язування інтегралів Вольтерра в частотну область, і доведена адекватність розрахункових співвідношень запропонованого авторами раніше Фур'є-інтегрального методу ідентифікації нелінійних динамічних систем 1-го порядку зі степеневими нелінійностями.
2. Здійснено узагальнення запропонованого класу математичних моделей на нелінійні динамічні системи довільного порядку зі степеневими нелінійностями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Г. Ван-Трис. — М. : Мир. — 1964. — 167 с.
2. Мокін О. Б. Моделювання та оптимізація руху багатомасових електричних транспортних засобів поверхнями зі складним рельєфом / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін. — Вінниця : ВНТУ. — 2013. — 192 с.
3. Скляревич А. Н. Приведение линейных операторов в задачах автоматического управления / А. Н. Скляревич. — Рига : Зинатне. — 1965. — 155 с.

Рекомендована кафедрою відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 13.09.2016

Мокін Олександр Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів;

Мокін Борис Іванович — акад. НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів та кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки;

Хом'юк Яна Вікторівна — аспірантка кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

O. B. Mokin[1]
B. I. Mokin[1]
Ya. V. Khomiuk[1]

Conditions of Equivalentiation of Nonlinear Dynamic Systems with Power Nonlinearities in the Frequency Domain

[1]Vinnytsia National Technical University

There have been substantiated reasonable conditions under which performance of nonlinear dynamical systems with equivalent POWER nonlinearities can be described in the frequency domain mathematical models, the use of which is not required to calculate Voltairian integrals of multiplicity equal to the order of a power nonlinearity.

Keywords: nonlinear dynamic system, a power nonlinearity, multiple integrals Voltaire equivalent model frequency domain.

Mokin Oleksandr B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: abmokin@gmail.com;

Mokin Borys I. — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes and the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics;

Khomiuk Yana V. — Post-Graduate Student of the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics

А. Б. Мокин[1]
Б. И. Мокин[1]
Я. В. Хомюк[1]

Условия эквивалентирования нелинейных динамических систем со степенными нелинейностями в частотной области

[1]Винницкий национальный технический университет

Обоснованные условия, при выполнении которых нелинейные динамические системы со степенными нелинейностями можно эквивалентно описывать в частотной области математическими моделями, при использовании которых не требуется вычислять вольтеровские интегралы с кратностью, равной порядка степенной нелинейности.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, степенная нелинейность, кратные интегралы Вольтера, эквивалентная модель, частотная область.

Мокин Александр Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: abmokin@gmail.com;

Мокин Борис Иванович — акад. НАПН Украины, д-р техн. наук, профессор кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов и кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики;

Хомюк Яна Викторовна — аспирант кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики