УДК 681.31

Денисюк В.О.

Вінницький національний аграрний університет

ПОХИБКА ТРИВИМІРНОЇ ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЗА МЕТОДОМ ЦИФРОВОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО АНАЛІЗАТОРА

Вступ

Комп'ютерна графіка знаходить широке застосування у різноманітних науково-технічних галузях народного господарства де необхідно збільшити наочність представлення інформації. Розвиток комп'ютерних технологій дає змогу сьогодні моделювати складні об'єкти у двовимірному та тривимірному координатному просторі. Досить актуальною є задача комп'ютерної графіки про забезпечення необхідної швидкодії при формуванні тривимірних зображень без збільшення апаратних витрат з достатньою достовірністю відтворення графічної інформації.

Постановка задачі

Існують два основних способи відтворення відрізків прямих ліній - програмний та апаратний.

Програмна реалізація не задовільняє вимозі необхідної швидкодії більшості завдань із динамічним перетворенням зображення [4, 5]. Це доводить необхідність апаратної реалізації лінійної інтерполяції.

Актуальність дослідження обумовлена стрімким розвитком виробництва графічних акселераторів для відтворення складних картин та сцен, в яких широко використовуються різноманітні високопродуктивні алгоритми відтворення елементів зображень, у першу чергу – відрізків прямих ліній.

Розглянемо більш детально методи формування відрізків прямих ліній. Серед методів лінійної інтерполяції (ЛІ) найбільше поширення одержали методи, засновані на використанні цифрових інтеграторів послідовного переносу (ЦІПП) [4], і методи, що засновані на використанні цифрових інтеграторів паралельного переносу [4-6] або з обчисленням оціночної функції (ОФ) [4-7].

Пристрої ЛІ у випадку двовимірної (2D) інтерполяції, засновані на розв’язанні системи диференціальних рівнянь прямої у параметричному вигляді з використанням цифрових інтеграторів паралельного переносу [1, 2-5], містять два регістра приростів і два накопичувальних суматори. Модуль перерахування суматорів дорівнює 2^n, де n - розрядність суматорів. Як одиничні прирости по координатах виступають сигнали переповнення накопичувальних суматорів.

Лінійний інтерполятор, заснований на рішенні системи диференціальних рівнянь прямої у параметричному вигляді із застосуванням цифрових інтеграторів послідовного переносу [1, 3], містить два регістра приростів, дві логічні схеми множника (ЛСМ) і загальний для обох інтеграторів лічильник. Сигнали виходів схем множників є сигналами одиничних приростів по координатах. Застосування інтеграторів послідовного переносу вносить додаткову похибку через нерівномірність проходження імпульсів на виході інтегратора, яку можна зменшити, наприклад, використовуючи комбіновані цифрові інтегратори [3].

Вищенаведені методи інтерполюють довільний відрізок прямої за 2^n тактів, де n-розрядність пристрою. Щоб збільшити швидкодію лінійної інтерполяції, змінюють ємність лічильника двійкового множника залежно від величин координатних приростів або здійснюють спільне збільшення координатних приростів до нормалізації одного з них (здійснюють зсув обох координатних приростів убік старших розрядів, щоб старший розряд одного з координатних приростів збігся зі старшим розрядом пристрою) [4, 5].

Особливістю методу лінійної інтерполяції з оціночною функцією є виключення операції множення у виразі функціональної залежності X і Y за рахунок використання покрокових алгоритмів, що заміняють, операцію множення у функції $y=f(x)$ на покрокові операції додавання або обчислення.

Інтерполяція по цьому методі дає ординатну похибку, що не перевищує кроку дискретизації. Відомі методи з оціночною функцією, що реалізують як тільки координатні кроки, так і діагональні кроки. Також існують методи з початковою установкою оціночної функції, що дають мінімальну ординатну похибку інтерполяції (не більше 0.5 кроку дискретизації). Знайшов застосування метод з обчисленням двох оціночних функцій і кроком у бік меншої [4]. Відомі також методи, що реалізують два координатних кроки [4-7].

При використанні методів з ОФ обчислення здійснюються по рекурентним співвідношенням. Відтворення функціональної залежності ведеться інтерполяційними кроками, які формуються в кожний тактовий момент часу. Тривалість інтерполяційного кроку визначається часом підсумовування в суматорі ОФ. У методах, заснованих на рішенні систем диференціальних рівнянь із використанням цифрових інтеграторів паралельного переносу, швидкодія також обмежується мікрооперацією підсумовування. Причому, апаратна складність суматорів значно перевищує апаратну складність ЦІПП. Таким чином, методи з використанням суматорів не задовольняють вимогам динаміки складних зображень при мінімумі апаратних витрат. Це доводить необхідність використання інших методів, а саме методів із ЦДА, де швидкодія визначається мікрооперацією рахунку в молодшому розряді лічильника.

Мета статті – аналіз особливостей алгоритму відтворення відрізків прямих ліній за методом цифрового диференційного аналізатора для визначення похибки лінійної інтерполяції при відтворенні інформації у тривимірному дискретному координатному просторі.

Алгоритм формування відрізків прямих ліній за методом цифрового диференційного аналізатора

Похибка ЦІПП - різниця між значенням вихідної величини x при ідеальному виконанні заданої операції відтворення та величиною x_0, отриманої із сигналів, що видаються інтегратором [1]. Оскільки цифровий інтегратор видає значення для обчислення ординат функцій у дискретних точках, то і розглядається похибка тільки в цих же точках при цілочисельних значеннях аргументу, який вимірюється числом імпульсів [1]. Початковий стан лічильника ЦІПП (*CT*) дорівнює 0. У регістр керуючого коду ЦІПП (*RG*) уведене число:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1} \ , \tag{1}$$

де a_i - i-й розряд регістра керуючого коду *RG*.

Число імпульсів, вироблених і-тою схемою збігу по надходженню t імпульсів на вхід ЦІПП, дорівнює:

$$t_i = ent\left(\frac{t+2^{i-1}}{2^i}\right), \tag{2}$$

Відповідно число імпульсів на виході ЦІПП дорівнює:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1} \ . \tag{3}$$

По надходженню $t=2^n$ імпульсів ЦІПП переходить у початковий стан. Рівняння прямої, що проходить через точки (0, 0) і (2^n, Δx):

$$x = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1} \cdot t / 2^n \ . \tag{4}$$

Таким чином, похибка інтегрування ЦІПП, що дорівнює $\delta_p = x - x_0$, має вигляд:

$$\delta_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1}}{2^n} \cdot t - \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1} \ . \tag{5}$$

Оцінку похибки δ_p інтегрування ЦІПП (ЦДА або ДП) розглянуто у працях [1, 3, 5]. За формулою (5) отримані дані для значень абсолютної максимальної похибки ЦІПП δ_p для $n = 1 \div 32$ [5].

Розглянем тривимірну (*3D*) інтерполяцію лінійної функції *z=f(x,y)* на пристрої, який містить три ЦІПП з одним спільним лічильником [2, 5]. За горизонталь візьмемо x, за вертикаль - y, за третю координату, яка направлена від спостерігача углиб екрану пристроя відображення інформації (ПВІ), - z. Координатні вісі Ox, Oy, Oz утворюють ліву трійку [3, 5, 6].

У регістри управління інтерполятора записані коди відповідних координатних приростів: Δx - координатний приріст по осі x - в RG^x, Δy - по осі у - в RG^y, Δz - по осі z - в RG^z:

$$\begin{cases} \Delta x = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} a_{n-i+1} \\ \Delta y = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} b_{n-i+1} \\ \Delta z = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i+1} c_{n-i+1}, \end{cases} \tag{6}$$

де a_i, b_i або c_i - i-й розряд RG^x, RG^y або RG^z відповідно.

Вихідні частотні послідовності координатних двійкових множників F_m^x, F_m^y та F_m^z є відповідно функції x_0, y_0 і z_0 від імпульсів t частоти F_o на вході загального лічильника (7):

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i a_{n-i+1}; y_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i b_{n-i+1}; z_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i c_{n-i+1}. \tag{7}$$

В результаті одержуємо функцію $z_0=f\ (x_o,y_o)$ у 3D ДКПВ (xyz). У подальших міркуваннях приймаємо, що $\Delta x>=\Delta y$, $\Delta x>=\Delta z$ і Δx містить в старшому розряді "1", тобто є нормалізованою величиною, як шукана виступає наступна функція:

$$\frac{x}{dx} = \frac{y}{dy} = \frac{z}{dz} \tag{8}$$

За похибку *3D* лінійної інтерполяції у точці $Q_o(x_o,y_o,z_o)=Q(r_0)$ прийнято обирати відстань від точки Q_o, що належить *3D* дискретному координатному просторі, на інтерполяційній кривій $z_o=f(x_o,y_o)$, до прямої, що інтерполюється та задана виразом (8) [4, 5, 7]. Тобто за похибку *3D* лінійної інтерполяції δ_o обирається величина нормалі від точки Q_0 до інтерпольованої прямої. Визначимо вираз для δ_n.

Припустимо, що точка Q_1 (x_1,y_1,z_1) - початкова точка відрізка інтерпольованої прямої, що задається координатними приростами Δx, Δy, Δz, а $Q_2(x_2,y_2,z_2)$ - кінцева точка. Рівняння прямої, що проходить через дві точки Q_1 і Q_2 (9):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{9}$$

Відстань δ_n від точки $Q_o(x_o,y_o,z_o)$ до прямої, заданої виразом (9), така [2]:

$$\delta_n = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \tag{10}$$

Для спрощення обчислень припустимо, що точка Q_1 (x_1,y_1,z_1) співпадає з початком координат O $(x_1=0\ y_1=0,\ z_1=0)$. Тоді з урахуванням (8) і (9) вираз (10) приймає вигляд:

$$\delta_n = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \Delta y & \Delta z \\ -y_0 & -z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Delta z & \Delta x \\ -z_0 & -x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y \\ -x_0 & -y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \tag{11}$$

Необхідно відзначити, що величину δ_n можна визначати по іншим залежностям [1, 7], але вони містять *arc*-тригонометричні функції, що робить важким використання таких залежностей при машинному аналізі. У свою чергу, використання (11) дозволяє визначити лише абсолютне значення δ_n, що цілком задовольняє задачі оцінки δ_n.

Були визначені значення δ_n для $i = 1 \div 5$. Встановлено, що максимальна похибка δ_n виникає двічі в процесі інтерполяції прямої, причому, напрями векторів нормалі, відповідних δ_n, протилежні (одна назустріч одній). Для параметрів Δy, Δz, y_o та z_o справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \Delta y = \Delta z, \\ y_0 = z_0 \end{cases} \tag{12}$$

Крім того, встановлено що:

$$\left[\begin{array}{ll}\Delta x = 2\Delta y + 1, & \text{для n-непарних;} \\ \Delta x = 2\Delta y, & \text{для n-парних.}\end{array}\right. \tag{13}$$

Якщо умовно позначити число імпульсів t на вході лічильника, відповідних першій появі максимальної похибки при і-парних, як $C^1{}_i$ і саму похибка, як δ^1_n, а число імпульсів, відповідних другій появі максимальної похибки , як $C^2{}_i$ і саму похибку, як δ^2_n, то, враховуючи особливості проекції інтерполяційних прямих на площину *(yOz),* пропонується вважати, що числу вхідних імпульсів $C^1{}_i$ відповідає негативна похибка δ^1_n, а $C^2{}_n$ - додатня похибка δ^2_n. В процесі виконаного аналізу і на підставі принципу математичної індукції запропонований ітеративний метод визначення параметрів, при яких виникає максимальна похибка 3D лінійної інтерполяції з використанням ЦІПП:

1) якщо i-непарне, тоді $\Delta x_i=2\cdot\Delta x_{i-1}+1$, $\Delta y_i=\Delta z_i=\Delta x_{i-1}$, а $C_i^1=2\cdot C^2{}_{i-1}+1$, $C^2{}_i=C^2{}_{i-1}$, причому $\Delta x_i=C^1{}_i$, а $\Delta y_i=\Delta z_i=\Delta x_{i-1}=C^2{}_i$;
2) якщо i-парне, тоді $\Delta x_i=2\cdot\Delta x_{i-1}$, $\Delta y_i=\Delta z_i=\Delta x_{i-1}$, а $C^1{}_i=C^1{}_{i-1}$, $C^2{}_i=2\cdot C^1{}_{i-1}$, причому, $\Delta x_i=C^2{}_i$, а $\Delta y_i=\Delta z_i=\Delta x_{i-1}=C^1{}_i$.

Якщо за x_0 та y_0, відповідних числу імпульсів на вході $C^1{}_i$, узяти $x^1{}_0$ і $y^1{}_0$, а за x_o та y_o, відповідних $C^2{}_1$ узяти $x^2{}_0$ і $y^2{}_0$, то з виконаного аналізу витікає система (14):

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x_0^1 - 2y_0^1 = 2n-1, \\ 2y_0^2 - x_0^2 = 2n+1; \end{array}\right. & \text{при } i\text{- непарному} \\ \left[\begin{array}{l} x_0^1 - 2y_0^1 = n/2, \\ 2y_0^2 - x_0^2 = n/2; \end{array}\right. & \text{при } i\text{-парному}\end{cases} \tag{14}$$

З урахуванням (12) справедливо наступне: $\begin{vmatrix} \Delta y & \Delta z \\ -y_0 & -z_0 \end{vmatrix} \equiv 0$.

Таким чином вираз (11) прийме вигляд:

$$\delta_n = \frac{\sqrt{2}\cdot(\Delta x\cdot y_0 - \Delta y\cdot x_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + 2\cdot\Delta y^2}} . \tag{15}$$

З урахуванням (13) та (14) для парних i вираз для похибки (15) приймає вигляд:

$$\delta_n^1 = -\frac{n}{2\sqrt{3}};\delta_n^2 = \frac{n}{2\sqrt{3}} \quad . \tag{16}$$

З урахуванням (13), (14) та на підставі (15) для непарних *i* можна записати наступні вирази (17):

$$\delta_n^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3} - \frac{n+1}{2}\right);\delta_n^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{2}\right). \tag{17}$$

У результаті проведених досліджень та за допомогою запропонованих виразів (16) та (17) отримані данні по абсолютній максимальній похибці *3D* лінійного інтерполятора на ЦІПП (табл. 1 і табл. 2).

Проаналізуємо похибку *3D* лінійного інтерполятора на ЦІПП. Величина відносної похибки відтворення *3D* прямої лінії складає $(\delta_0 / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}) \cdot 100\%$ та є величиною спадаючою: при *n=5* вона дорівнює 5,3 %, а при *n=10* вона вже дорівнює 0,35 %. Інакше кажучи, чим більше роздільна здатність ДКПВ, тим менше помітна абсолютна похибка інтерполяції. Наприклад, для *n=12* максимальна абсолютна похибка *3D* інтерполятора дорівнює 3,4641 дискрета, відносна ж похибка складає 0,10 % (при *n=12*, роздільна здатність *3D* ДКПВ складає 4096×4096×4096 пікселів). Отримані значення відносних похибок *3D* інтерполяції є величинами значно меншими у порівнянні, наприклад, з похибками виводу зображення на екран ПВІ, що досягають величини від 0.4÷0.5% до 4÷5% [4, 5, 7] і не пов'язані з похибкою інтерполяції. Крім того, при використанні інтерполяторів на ЦІПП похибка виникає тільки в проміжних точках відрізка прямої лінії, що відтворюється. Початок і кінець інтерполяційного відрізка точно співпадають з ідеальними межами відрізка, тобто при побудові, наприклад, ламаної лінії, що складається з послідовності відрізків, не відбуватиметься накопичення похибки інтерполяційних координат початку сторін ламаної щодо їх ідеальних координат.

Таблиця 1. Похибка *3D* лінійного інтерполятора на ЦІПП,

двійковий код Δx, Δy, Δz та $C_i^{1,2}$ для $n=2\div16$

Роз-ряд-ність, n	Значення Δx, значення $\Delta y=\Delta z$		Число імпульсів на вході лічильника, C_i^1, C_i^2		Похибка, δ_n
	Двійкове старші - молодші	Десяткове	Двійкове старші - молодші	Десяткове	
2	10 01	2 1	10 01	1 2	0.5774
3	101 010	5 2	010 101	5 2	0.7386
4	1010 0101	10 5	1010 0101	5 10	1.1547
5	10101 01010	21 10	10101 01010	21 10	1.3406
6	101010 010101	42 21	101010 010101	21 42	1.7321
7	1010101 0101010	85 42	1010101 0101010	85 42	1.9230
8	10101010 01010101	170 85	10101010 01010101	85 170	2.3094
9	101010101 010101010	341 170	101010101 010101010	341 170	2.5015
10	1010101010 0101010101	682 341	1010101010 0101010101	341 682	2.8868
11	10101010101 01010101010	1365 682	10101010101 01010101010	1365 682	3.0791
12	101010101010 010101010101	2730 1365	101010101010 010101010101	1365 2730	3.4641
13	1010101010101 0101010101010	5461 2730	1010101010101 0101010101010	5461 2730	3.6565
14	10101010101010 01010101010101	10922 5461	10101010101010 01010101010101	5461 10922	4.0415
15	101010101010101 010101010101010	21845 10922	101010101010101 010101010101010	21845 10922	4.2339
16	1010101010101010 0101010101010101	43690 21845	1010101010101010 0101010101010101	21845 43690	4.6188

Висновки

Здійснивши аналіз особливостей відтворення відрізків прямих ліній за методом цифрового диференційного аналізатора, визначено абсолютне значення похибки алгоритму інтерполяції відрізків прямих у тривимірному координатному просторі – формули (16) і (17); та моменти часу виникнення цієї похибки - таблиці 2 та 3. Виявлено, що припустимо використання алгоритму *3D* інтерполяторів відрізків прямих ліній за методом цифрового диференційного аналізатора з урахуванням вимог до точності в конкретній галузі застосування, наприклад, в системах реального часу, імітаторах, в анімації, в тренажерах, що вимагають максимальної швидкодії при зміні зображення, тобто при наявності динамічних зображень без жорстких вимог до точності відтворення зображення.

Таблиця 2. Похибка 3D лінійного інтерполятора на ЦІПП,

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, C_i^1, C_i^2, x_o^1$ та y_o^2 для $n=3 \div 16$

Розряд-ність, n	Δx, $\Delta y = \Delta z$	(1) (2)	C_i^1 C_i^2	x_o^1 — y_o^1 x_o^2 — y_o^2	Похибка, δ_n
3	5 2	(2) (1)	5 2	1 —— 1 4 —— 1	0.7386
4	10 5	(1) (2)	5 10	4 —— 1 6 —— 4	1.1547
5	21 10	(2) (1)	10 21	6 —— 4 15 —— 6	1.3406
6	42 21	(1) (2)	21 42	15 —— 6 27 —— 15	1.7321
7	85 42	(2) (1)	42 85	27 —— 15 58 —— 27	1.9230
8	170 85	(1) (2)	85 170	58 —— 27 112 —— 58	2.3094
9	341 170	(2) (1)	170 341	112 —— 58 229 —— 112	2.5015
10	682 341	(1) (2)	341 682	229 —— 112 453 —— 229	2.8868
11	1365 682	(2) (1)	682 1365	453 —— 229 912 —— 453	3.0791
12	2730 1365	(1) (2)	1365 2730	912 —— 453 1818 —— 912	3.4641
13	5461 2730	(2) (1)	2730 5461	1818 —— 912 3643 — 1818	3.6565
14	10922 5461	(1) (2)	5461 10922	3643 — 1818 7279 — 3643	4.0415
15	21845 10922	(2) (1)	10922 21845	7279 — 3643 14566 — 7279	4.2339
16	43690 21845	(1) (2)	21845 43690	14566 — 7279 29124 – 14566	4.6188

Література

1.Воронов А.А. и др. Цифровые аналоги для систем автоматического управления.- М.-Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1960.- 196 с.

2. Денисюк В.О. Дослідження похибки алгоритму тривимірної лінійної інтерполяції за методом цифрового диференційного аналізатора/ Денисюк В.О., Пєтух А.М., Веселовська Н.Р.// Міжнародний науково-технічний журнал "Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах", м.Хмельницький, № 1, 2008р., С. 104-111.

3. Корн Г. А. Справочник по математике : Определения, теоремы, формулы : Для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн. – 6-е изд. – СПб. : Лань, 2003.– 831 с.

4.Пєтух А.М., Обідник Д.Т., Романюк О.Н. Інтерполяція в задачах контурного формоутворення: монографія.- Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007.-103 с. ISBN 978-966-641-223-5.

5. Пєтух А. М. Швидкодійні цифрові функціональні генератори графічних примітивів : монографія / А. М. Пєтух, В. О. Денисюк, Д. Т. Обідник. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 148 с. ISBN 978-966-641-343-0.

6. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ. - М.: Мир, 2006. - 640 с.

7. Эдвард Энджел. Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL, 2-е изд.: Пер с англ.- М.: Изд. дом "Вильямс", 2001.- 592 с.

8. Meyer M.A., Gordon B.M. Pulse-Rate Multipler. Patent 2910237 USA, Filled Dec. 5, 1952, Patented Oct.27, 1959.