УДК 621.391:519.72 + 004.942

М.В. Конфедрат
Ю.Ю. Іванов

ТУРБО-ДЕКОДУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРИНЦИПІВ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ БЕЛЛМАНА

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Дана робота присвячена розв'язанню екстремальної задачі пошуку найбільш правдоподібного шляху на гратці згорткового коду з використанням принципів динамічного програмування Беллмана. Представлено математичні моделі методів декодування Вітербі, SOVA та удосконаленого SOVA.
Ключові слова: турбо-код, екстремальна задача, динамічне програмування, максимальна правдоподібність, метод декодування Вітербі, SOVA.

Abstract
This work is devoted to the solution of the extremal task of finding the maximum likelihood path on the convolutional code trellis using the principles of Bellman's dynamic programming. Mathematical models of Viterbi decoding method, SOVA and improved SOVA are presented.
Keywords: turbo-code, extremal task, dynamic programming, maximum likelihood, Viterbi decoding method, SOVA.

Вступ

Теорія кодування інформації зародилася в роботах американського інженера К. Шеннона в 1948 році [1]. Він запропонував використовувати компресію даних з джерела, шифрувати дані, а потім застосовувати завадостійке кодування. Майже всі коди можна декодувати тільки перебірними методами, причому варіантів рішення більше кількості атомів у Всесвіті. Тому необхідно досліджувати методи непереборного декодування, враховуючи вимоги систем зв'язку. Турбо-коди з імовірнісними методами декодування – помітне досягнення в теорії завадостійкого кодування, яке дозволяє здійснити високоефективне передавання даних практично в будь-якій системі зв'язку: телебачення, мобільні і космічні комунікації тощо. Наприклад, дослідження NASA JPL (Mars Reconnaissance Orbiter у зв'язці з Mars Science Laboratory) дозволили отримати більше 24 Гб інформації, включаючи високоякісні фотографії і відеофайли поверхні Червоної планети за допомогою марсохода Curiosity та турбо-кода, запропонованого К. Берру і співавторами в революційній роботі 1993 року [2, 3].

Для декодування турбо-кодів можна використовувати декілька методів. Німецькими вченими Й. Хагенауером та П. Хоехером у 1989 році представлено побітовий метод декодування SOVA (improved soft-output Viterbi algorithm – удосконалений алгоритм Вітербі з "м'яким" виходом) [4] на основі звичайного методу декодування згорткових кодів, винайденого А. Вітербі [5, 6]. Слід зазначити, що метод декодування SOVA пов'язаний з динамічним програмуванням, основою якого є принцип оптимальності (principle of optimality), сформульований Р. Беллманом у 1953 році [7, 8]. Класичним є метод декодування MAP (maximum a posteriori probability – алгоритм декодування за максимумом апостеріорної імовірності), представлений у 1993 році К. Берру [3] на основі роботи Л. Баала [9], та його модифікації для зниження обчислювальної складності (log-MAP, PL-log-MAP, max-log-MAP алгоритми тощо) [10]. Розглянуті методи максимізують кореляційну метрику замість мінімізації відстані. Взагалі всі методи декодування турбо-подібних кодів можна інтерпретувати як реалізацію техніки, відомої як обмінні ймовірнісні алгоритми (message passing algorithms).

Метою даної праці є аналіз методів розв'язання екстремальної задачі пошуку найбільш правдоподібного шляху на гратці згорткового коду (Вітербі, SOVA та його побітової версії), а також представлення їхніх математичних моделей з використанням динамічного програмування.

Результати дослідження

Метод динамічного програмування [7, 8]. Будемо розглядати екстремальну задачу пошуку найбільш правдоподібного шляху на гратці згорткового коду під час декодування. Дана задача представляє собою класичний варіант оптимізаційної задачі. Для того, щоб її можна було описати моделлю динамічного програмування необхідно виконання ряду *умов*:

- задача може інтерпретуватись як *n*-кроковий процес управління, а показник ефективності процесу може бути представлений в адитивній формі, тобто як сума показників ефективності на кожному кроці;
- структура задачі інваріантна відносно кількості кроків *n*, тобто повинна бути визначена для будь-якого *n* і не залежати від нього;
- на кожному кроці стан системи визначається кінцевою кількістю параметрів стану та управляється кінцевою кількістю змінних;
- вибір рішення на *k*-ому кроці не впливає на попередні кроки, а стан на початку цього кроку є функцією лише попереднього стану і вибраного на ньому рішення (умова відсутності післядії).

Фактично необхідно виконання *принципів оптимальності та занурення*:

- оптимальне рішення на кожному кроці визначається станом системи на початок цього кроку. Яким би не був стан системи в результаті певної кількості кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати рішення таким чином, щоб воно призводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний;
- структура задачі, яка розв'язується методом динамічного програмування, не змінюється при зміні кількості кроків *n*. У цьому сенсі всякий конкретний процес із заданим числом кроків виявляється якби зануреним в сімейство подібних йому процесів і може розглядатися з позиції більш широкого класу задач.

Реалізація названих принципів дає гарантію того, що рішення, прийняте на черговому кроці, виявиться найкращим щодо всього процесу в цілому. Послідовність покрокових рішень призводить до вирішення вихідної задачі.

Метод декодування А. Вітербі (послідовність символів, жорсткі рішення) [5, 11]. Розглядаємо згортковий кодер з двома бінарними символами на виході (дібіт). Декодер Вітербі у випадку безпомилкового приймання всієї послідовності бітів буде мати інформацію про цю послідовність, а також про будову кодера (тобто діаграму його станів) та його початковий стан. Маючи всю цю інформацію, він повинен відновити початкову послідовність бітів. Для переходу, що відповідає прийнятому дібіту (тобто перехід правильний), метрика помилок приймається рівною нулю, а для інших переходів вона розраховується за кількістю відмінних бітів в прийнятому дібіті та тому дібіті, який відповідає розглянутому переходу (метрика Хеммінга). Отже, будується гратка коду, на якій прокладається шлях, що має найкоротшу метрику накопичених помилок за всі такти *t* кодера. Для роботи даного методу потрібно використати метрики ребер на решітці та блок операцій додати-порівняти-вибрати (ACS – Add-Compare-Select). Зручно побудувати таблицю, в якій відображати всі метрики помилок для переходів із одного стану в інший за певний момент часу. Ті шляхи, які мають найменшу метрику помилок, називають "вижившими", у протилежному випадку – "конкуруючими". Для пошуку екстремуму можна задати цільову функцію *z* наступним чином

$$z = \sum_{i=1}^{t_n} error\_metric(i) \to \min . \qquad (1)$$

Метод декодування SOVA (послідовність символів, м'які рішення) [12]. Даний метод аналогічний жорсткому варіанту, але використовує у якості метрики помилок кореляційні метрики або евклідову відстань.

$$z = \sum_{i=1}^{t_n} (original\_message(i) - recieve\_message(i))^2 \to \min . \qquad (2)$$

Удосконалений SOVA (побітовий, м'які рішення) [4, 10, 13-15]. Ідеї, які лежать в основі попередніх методів формують базу даного методу, але використовується певна модифікація. Формулу (2) можна переписати, використавши правила теорії імовірності. Тоді математична модель даної модифікації будується на основі використання множини станів $\{s_o,...,s_n\}$ (стани гратки), також враховується, що отримано послідовність $\{x_{\xi}{}_0{}^n\}$. Проводиться пошук послідовності станів s_i (шляху) на гратці і максимізується вихідна ймовірність $p\left(\{s_0,...,s_n\} \mid x_{\xi_0}^{\ n}\right)$ у формі

$$p\left(\{s_0,...,s_n\} \mid x_{\xi_0}^{\ n}\right) = \frac{p\left(x_{\xi_0}^{\ n}, \{s_0,...,s_n\}\right)}{p\left(x_{\xi_0}^{\ n}\right)} = \frac{p\left(x_{\xi_0}^{\ n} \mid \{s_0,...,s_n\}\right) \cdot p\left(\{s_0,...,s_n\}\right)}{p\left(x_{\xi_0}^{\ n}\right)}. \tag{3}$$

Отже, на основі аналізу формули (3) ставиться задача оптимізації – необхідно максимізувати взаємну ймовірність у чисельнику, тобто

$$\Lambda = p\left(x_{\xi_0}^{\ n}, \{s_0,...,s_n\}\right) = p\left(x_{\xi_0}^{\ n} \mid \{s_0,...,s_n\}\right) \cdot p\left(\{s_0,...,s_n\}\right) \to \max. \tag{4}$$

Дану задачу оптимізації можна розв'язати, врахувавши, що $\{s_o,...,s_n\}$ представляє собою марковську послідовність, а отримана послідовність $\{x_{\xi}{}_0{}^n\}$ не залежить від вибору шляху на гратці, тобто відбувається ряд незалежних подій (отримання символів), що повністю відповідає умовам, у випадку виконання яких, можна застосовувати динамічне програмування. Після проведення перетворень та спрощень можна отримати формулу для розрахунку метрики вперед на гратці

$$M_k(s_k) = \max_{d_k=\pm 1}^{(s',s)} \left(M_{k-1}(s_{k-1}) + \frac{1}{2} \cdot \left(d_k \cdot LLR_{апр.}(d_k) + d_k \cdot LLR_{кан.} \cdot x_k + \sum_{k=2}^{n} d_{k,v} \cdot LLR_{кан.} \cdot x_{k,v} \right) \right), \tag{5}$$

де $M_{k\text{-}1}(s_{k\text{-}1})$ – поточна метрика; $LLR_{апр}$, $LLR_{кан}$, $LLR_{зовн}$ – апріорне (внутрішнє), канальне і зовнішнє знання про дані d_k з використанням зашумлених даних x_k; v – кількість перевірочних символів.

Після знаходження "вижившого" шляху за допомогою операції XOR порівнюються два шляхи ("вижившиий" та "конкуруючий"), які проходять через мітку $\lambda = | M_k^{(1)}(s) - M_k^{(2)}(s) |$ на певному етапі гратки. Якщо бінарний символ "вижившого" шляху співпадає з конкуруючим (0), то на відповідному місці ставиться ∞, інакше (1) – λ. Далі складається матриця надійностей рішень та знаходиться мінімум на кожному етапі діаграми згорткового коду. Розрахунок м'яких апостеріорних рішень для кожного біта можна представити у вигляді

$$LLR_{SOVA}(d_k) \approx d_k \cdot \min_{d_k \neq d_k^i} \lambda_k^i \approx LLR_{апр}(d_k) + LLR_{кан} \cdot x_{k,1} + LLR_{зовн}(d_k). \tag{6}$$

Подальша робота методу заснована на ітеративному визначенні зовнішньої інформації $LLR_{зовн}(d_k)$ з декодера.

Висновки

У даній роботі розв'язано екстремальну задачу пошуку найбільш правдоподібного шляху на гратці згорткового коду з використанням принципів динамічного програмування. Розглянуто формалізовані математичні моделі методів декодування Вітербі та SOVA для згорткових кодів, а також удосконаленого SOVA для турбо-коду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication / C.E. Shannon // Reprinted from The Bell System Technical Journal. – 1948. – V. 27. – P. 379-423, 623-656.
2. Модификации для снижения вычислительной сложности алгоритма декодирования BCJR MAP в турбо-кодовых конструкциях / О.В. Стукач, А.Н. Романюк, А.Я. Кулик, Ю.Ю. Иванов // Наукові

праці ДонНТУ. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. – Красноармійськ: ДоНТУ, 2015. – № 1(20). – С. 107-112.

3. Berrou C. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes / C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima // Proceedings of the ICC'93. – Switzerland: 1993. – P. 1064-1070.

4. Hagenauer J. A Viterbi Algorithm with Soft-Decision Outputs and its Applications / J. Hagenauer, P. Hoeher // Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference. – USA: 1989. – P. 1680-1686.

5. Viterbi A.J. Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm / A. J. Viterbi // IEEE Transactions on Information Theory. – 1967. – V. 13. – P. 260-269.

6. Витерби А.Д. Принципы цифровой связи и кодирования / А.Д. Витерби, Дж.К. Омура. – М.: Радио и связь, 1982. – 536 с.

7. Беллман Р.Э. Динамическое программирование / Р.Э. Беллман. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.

8. Окулов С.М. Динамическое программирование / С.М. Окулов, О.А. Пестов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 299 с.

9. Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate / L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, J. Raviv // IEEE Transactions on Information Theory. – 1974. – V. 20. – P. 284-287.

10. Іванов Ю.Ю. Особливості апаратно-програмної реалізації турбо-кодів: порівняльний аналіз складності реалізації на цифровому сигнальному процесорі / Ю.Ю. Іванов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця: ВНТУ, 2016. – № 3 (126). – С. 94-101.

11. Ivanov Y. A Viterbi Algorithm as a Key to Decoding Turbo-Code / Y. Ivanov, A. Kulyk, S. Krivogubchenko // Nauka i studia. – Przemysl: Nauka i studia, 2012. – № 11(56). – P. 60-65.

12. Банкет В.Л. Дискретная математика в задачах теории цифровой связи / В.Л. Банкет. – Одесса: ОНАС, 2008. – 118 с.

13. Woodard J. Comparative Study of Turbo Decoding Techniques: An Overview / J. Woodard, L. Hanzo // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2000. – V. 49. – № 6. – P. 2208-2233.

14. Кулик А.Я. Апаратна реалізація декодера SOVA з «м'яким» 3-бітовим квантованим виходом / А.Я. Кулик, Ю.Ю. Іванов // Цифрові технології. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2012. – № 12. – С. 15–22.

15. Іванов Ю.Ю. Вступ до Computer Science. Дискретна математика: цікава та не дуже: лекції, алгоритми та задачі / Ю.Ю. Іванов. – 2018. – 89 с. – Режим доступу: https://iq.vntu.edu.ua/method/read_url.php?tbl_num=2&url=/fdb/1166/Discrete_Math_by_IVANOV.djvu.

Конфедрат Микола Вадимович — студент групи І-15б, факультет комп'ютерних систем і автоматики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Іванов Юрій Юрійович — канд. техн. наук, асистент кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: Yura881990@i.ua.

Науковий керівник: ***Іванов Юрій Юрійович*** — канд. техн. наук, асистент кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Konfedrat Nicholas V. — student, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Ivanov Yurii Yu. — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: Yura881990@i.ua.

Supervisor: ***Ivanov Yurii Yu.*** — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.