

# КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ТУРБО-ДЕКОДУВАННЯ НА ОСНОВІ MAX-LOG-MAP ТА LOG-MAP З КВАДРАТИЧНОЮ КОРЕКТУЮЧОЮ ФУНКЦІЄЮ

Вінницький національний технічний університет

## *Анотація*

*Розроблено комбінований турбо-декодер, який використовує різні складові методи (max-log-MAP та модифікований log-MAP з квадратичною коректуючою функцією). Це зменшить обчислювальну складність турбо-декодування на етапі обчислення метрик та апостеріорних рішень з виходу декодера без значної втрати ефективності декодування даних.*

**Ключові слова:** системи передавання інформації, турбо-код, метод декодування MAP, складність обчислень, коректуюча функція, квадратична апроксимація.

## *Abstract*

*The combined turbo-decoder, that uses various component methods (max-log-MAP and modified log-MAP with quadratic correction function), has been developed. It will reduce the computational complexity of turbo-decoding at the stage of calculating metrics and a posteriori decisions from the output of the decoder without significant loss of data decoding efficiency.*

**Keywords:** information transmission systems, turbo-code, MAP decoding method, computational complexity, correction function, quadratic approximation.

## **Вступ**

Системи цифрового передавання інформації відіграють важливу роль в сучасному світі, і вимоги до швидкості та надійності переданих даних постійно зростають. У стаціонарних системах зв'язку адитивний шум і міжсимвольна інтерференція є основними факторами, які призводять до появи помилок при передаванні даних каналом зв'язку. Реалізація сучасних завадостійких систем передавання цифрової інформації неможлива без застосування кодерів, виконаних за сучасною технологією, здатних працювати на високих тактових частотах, що дозволяє підвищити ефективність використання апаратної реалізації, енергетичну ефективність, завадостійкість, а також позитивно позначається на економічному ефекті. Кодери і декодери завадостійких кодів є найбільш ресурсомістким компонентом апаратури, особливо із зростанням швидкості передавання інформації. Для підвищення енергетичної ефективності та виправлення помилок практично у всіх сучасних цифрових системах застосовується завадостійке кодування цифрових сигналів. Застосування завадостійкого кодування дозволяє працювати при меншому співвідношенні сигнал/шум. Завадостійкість забезпечує надійність і вірогідність переданої інформації. Найбільш помітним досягненням в теорії завадостійкого кодування за останні роки є турбо-коди [1].

Складність алгоритмів турбо-декодування та явна недостатність програмного забезпечення вільного розповсюдження перешкоджають впровадженню турбо-кодів, хоча в даний час багато систем намагаються використовувати саме їх [2]. Під час роботи з розглянутим кодом виникає проблема його декодування, а, відповідно, і реалізації цієї процедури. Оптимальним посимвольним методом декодування турбо-кодів є модифікований С. Verrou метод BCJR (за першими літерами прізвищ першовідкривачів) [3, 4]. Слід зазначити, що в англійських джерелах розглянутий метод декодування має декілька назв: MAP (за максимумом апостеріорної ймовірності), APP (за апостеріорною ймовірністю), Forward-Backward (алгоритм вперед та назад), Belief Propagation (алгоритм з розповсюдженням довіри), Sum-Product (алгоритм суми добутків). Даний метод базується на іншому відомому у інформатиці та математичній статистиці EM-алгоритмі (алгоритм очікування-максимізації), а саме у його окремому випадку – алгоритмі Baum-Welch. Метод MAP є найбільш

ефективним, тому що дозволяє досягти мінімально можливого показника коефіцієнта бітових помилок BER при низькому відношенні сигнал/шум  $E_b/N_0$ , але не застосовується на практиці, оскільки має високу обчислювальну складність. Використовують метод log-MAP та його субоптимальні модифікації, найпопулярнішою з яких є max-log-MAP [5-10].

**Метою** роботи є розробка комбінованого турбо-декодера, який використовує різні складові методи (max-log-MAP та модифікований log-MAP з квадратичною коректуючою функцією), що дозволить зменшити обчислювальну складність турбо-декодування на етапі обчислення метрик та апостеріорних рішень з виходу декодера, досягти низьких значень BER при певному відношенні сигнал/шум  $E_b/N_0$  без значної втрати ефективності декодування даних.

### Результати дослідження

Метод декодування лінійних кодів на ґратці коду, представлений Vahl, Coske, Jelinek і Raviv (BCJR) в 1974 році [2], розглядає загальний випадок марківського джерела інформації, яка передається дискретним каналом без пам'яті. У роботі [3] вперше була запропонована модифікація, яка дозволила створити високоефективний ітеративний метод оптимального посимвольного MAP-декодування згорткових турбо-кодів. Правило ухвалення рішення, відоме як максимум апостеріорної імовірності, можна представити у вигляді правила мінімальної імовірності помилки з урахуванням апіорної імовірності даних у наступній формі

$$LLR_{MAP}(d_k) = LLR_{apr.}(d_k) + LLR_{кан} \cdot x_k + LLR_{зовн}(d_k) = \ln \frac{\sum_{(s',s)}^{d_k=+1} \alpha_{k-1}(s') \cdot \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s)}{\sum_{(s',s)}^{d_k=-1} \alpha_{k-1}(s') \cdot \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s)}, \quad (1)$$

де  $LLR_{apr.}$ ,  $LLR_{кан}$ ,  $LLR_{зовн}$  – апіорна, канална та зовнішня інформація;  $\ln(\cdot)$  – натуральний логарифм,  $\alpha_k(s) = \sum \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')$  – метрика прямого шляху на діаграмі кодера;  $\beta_{k-1}(s') = \sum \gamma_k(s',s) \cdot \beta_k(s)$  – метрика зворотного шляху на ґратчастій діаграмі; реберна метрика виражається як

$$\gamma_k(s',s) \approx \exp\left(\frac{1}{2} \cdot (d_k \cdot LLR_{apr.}(d_k)) + d_k \cdot LLR_{ch.} \cdot x_k + \sum_{k=2}^n d_{k,v} \cdot LLR_{ch.} \cdot x_{k,v}\right). \quad (2)$$

Модифікація MAP алгоритму під назвою log-MAP працює в логарифмічній області, має меншу обчислювальну складність і дає результати BER, які максимально наближені до результату MAP. Метрики можна представити у наступній формі

$$\gamma_k^{LM}(s',s) = \ln \gamma_k(s',s) = \frac{1}{2} \cdot \left( d_k \cdot LLR_{apr.}(d_k) + d_k \cdot LLR_{ch.} \cdot x_k + \sum_{k=2}^n d_{k,v} \cdot LLR_{ch.} \cdot x_{k,v} \right), \quad (3)$$

$$\alpha_k^{LM}(s) = \ln \alpha_k(s) = \ln \left( \sum_{(s',s)} \exp(\gamma_k^{LM}(s',s) + \alpha_{k-1}^{LM}(s')) \right), \quad (4)$$

$$\beta_{k-1}^{LM}(s') = \ln \beta_{k-1}(s') = \ln \left( \sum_{(s',s)} \exp(\gamma_k^{LM}(s',s) + \beta_k^{LM}(s)) \right). \quad (5)$$

Спрощення можна представити у формі логарифму з коректуючою функцією  $f_{cor}$

$$\begin{aligned} f(A_{N-1}, A_N) &= \ln(\exp(A_{N-1}) + \exp(A_N)) = \\ &= \max(A_{N-1}, A_N) + \ln(1 + \exp(-|A_{N-1} - A_N|)) = \max(A_{N-1}, A_N) + f_{кор}(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Застосувавши формули (1)-(6), можна записати м'який вихід log-MAP алгоритма в формі

$$LLR_{LM}(d_k) = \left( \max_{d_k=+1}^{(s',s)} (\alpha_{k-1}^{LM}(s') + \beta_k^{LM}(s) + \gamma_k^{LM}(s',s)) + f_{кор.1} \right) - \left( \max_{d_k=-1}^{(s',s)} (\alpha_{k-1}^{LM}(s') + \beta_k^{LM}(s) + \gamma_k^{LM}(s',s)) + f_{кор.2} \right). \quad (7)$$

Для економії часу, спрощення та швидкості обчислень, замість того, щоб декілька разів звертатися до відносно повільної та кошовної в апаратному виконанні функції  $\exp(\cdot)$ , для виразу  $f_{кор}$  використовують апроксимацію. Автори даної роботи пропонують використати ефективну модифікацію з квадратичною коректуючою функцією *Quad-log-MAP*. Розглядається компенсуюча функція на інтервалі  $z \in (0; +\infty)$  з нульовою асимптотою в нескінченності. На основі аналізу даної функції можна помітити, що, коли  $z_i > 4$ , то компенсуюча функція приймає значення малої константи, яка менша за 0,02. Тому даною величиною можна знехтувати [10]. Виконаємо апроксимацію квадратичним поліномом за методом найменших квадратів з використанням комп'ютерного пошуку. Формулу для розрахунку значень компенсуючої функції можна привести у вигляді

$$f_{кор}(z) = \begin{cases} 0,0576 \cdot z^2 - 0,3920 \cdot z + 0,6782, & \text{if } z \in [0; 4); \\ 0,0000, & \text{if } z \in (4; \infty). \end{cases} \quad (8)$$

Точність запропонованої компенсуючої функції  $f_{кор}$  також можна перевірити шляхом порівняння з аналогами на тестовому інтервалі  $[0; 0,01; 10]$ , використавши статистичні оцінки: середню абсолютну помилку  $MAE = 0,0091$ ,  $RMSE = 0,0135$ , лінійний коефіцієнт кореляції  $r = 0,9974$  між аналогом та оригінальною функцією. Дана квадратична апроксимація компенсуючої функції наближається до значень оригіналу краще, ніж комбінована (на 0,17%), таблиця пошуку Robertson-Wang (на 0,34%), гібридна (на 0,49%), лінійна (на 1,14%), багатокрокова (на 2,18%), лінійна з рядом К. Маклорена (на 6,23%), константна (на 10,33%) компенсуючі функції, але дещо менш точна, ніж кусково-лінійна функція (на 0,2%).

Популярна модифікація методу MAP під назвою *max-log-MAP* має набагато меншу обчислювальну складність, оскільки не використовується коректуюча складова. Ефективність для цього методу на 10% менше, в порівнянні з MAP [6, 11].

Кількість елементарних математичних операцій [12, 13], які необхідно виконати для методів MAP, *Quad-log-MAP* та *max-log-MAP*, розраховується за наступними виразами (залежно від пам'яті кодера  $m$  та загальної кількості символів  $h$  з виходу кодера)

$$f_{MAP}(m, h) = 2^{m+2} \cdot h + 153 \cdot 2^{m+1} + 361, \quad (9)$$

$$f_{Quad-log-MAP}(m, h) = 2^{m+2} \cdot h + 65 \cdot 2^m - 6, \quad (10)$$

$$f_{MLM}(m, h) = 2^{m+2} \cdot h + 11 \cdot 2^{m+1} + 3, \quad (11)$$

Запропонований метод *Quad-log-MAP* простіший за MAP на  $\Theta = 301 \cdot 2^m + 355$  елементарних математичних операцій. Його ефективність наближається до показників методу MAP з незначними втратами. Для ще більшого спрощення процесу турбо-декодування запропоновано використовувати комбінований турбо-декодер, який містить складові декодери, які використовують *Quad-log-MAP* та *max-log-MAP* методи. Це дозволить зменшити кількість математичних операцій на показник  $\Delta = 522 \cdot 2^m + 719$ , а відповідно і час роботи декодера за один цикл.

## Висновки

У цій роботі запропоновано використовувати комбінований турбо-декодер, який використовує різні складові методи, а саме *max-log-MAP* та модифікований *log-MAP* з квадратичною коректуючою функцією, яка досить добре корелює з оригіналом  $r = 0,9974$ . Це дозволить уникнути значної врати ефективності декодування даних, але значно знизить обчислювальну складність процесу турбо-декодування на етапі обчислення метрик та апостеріорних рішень з виходу декодера у порівнянні з MAP методом.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Woodard J. Comparative Study of Turbo Decoding Techniques: An Overview / J. Woodard, L. Hanzo // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2000. – V. 49. – № 6. – P. 2208-2233.
2. Ivanov Y. A Viterbi Algorithm as a Key to Decoding Turbo-Code / Y. Ivanov, A. Kulyk, S. Krivogubchenko // Nauka i studia. – Przemysl: Nauka i studia, 2012. – № 11(56). – P. 60–65.
3. Berrou C. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes / C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima // Proceedings of the ICC'93. – Switzerland, Geneva: 1993. – P. 1064-1070.
4. Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate / L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, J. Raviv // IEEE Transactions on Information Theory. – 1974. – V. 20. – P. 284-287.
5. Hanzo L. Turbo Coding, Turbo Equalisation and Space-Time Coding for Transmission over Wireless Channels / L. Hanzo, T.H. Liew, B.L. Yeap. – Southampton: Department of Electronics and Computer Science of UK, 2002. – 746 p.
6. Robertson P. A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain / P. Robertson, E. Villebrun, P. Hoeher // 1995 IEEE International Conference on Communications ICC'95 "Gateway to Globalization". – USA, Seattle: IEEE, June 18, 1995. – V. 2. – P. 1009-1013.
7. Abrantes S. From BCJR to Turbo Decoding: MAP Algorithms Made Easier / S. Abrantes // Information and Telecommunication Technology Center of the University of Kansas, USA. – Lawrence: ITTC, 2004. – 30 p.
8. Soleymani M.R. Turbo Coding for Satellite and Wireless Communications / M.R. Soleymani, Y. Gao, U. Vilaipornsawai. – New York: Kluwer Academic, 2002. – 231 p.
9. A Novel Suboptimal Piecewise-Linear-log-MAP Algorithm for Turbo Decoding / Yu.Yu. Ivanov, A.N. Romanyuk, A.Ia. Kulyk, O.V. Stukach // Proceedings on XI IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2015). – Omsk: Omsk State Technical University, Russia, 21-23 May, 2015. – P. 1-8.
10. Stukach O.V. A Brief Overview and Experimental Researches of Novel PL-log-MAP Turbo Decoding Algorithm / O.V. Stukach, A.N. Romanyuk, Yu.Yu. Ivanov // Proceedings on XIII IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2017). – Astana: S. Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Republic of Kazakhstan, 29-30 June, 2017. – Access mode: <http://ieeetpu.ru/proceedings/papers/4uw461.pdf>.
11. Особливості оцінювання параметрів процесу передавання даних із використанням турбо-кодів / Р.Н. Кветний, Ю.Ю. Іванов, С.Г. Кривогубченко, О.В. Стукач // Метрологія та прилади. – К: ВКФ «Фавор ЛТД», 2017. – № 3 (65). – С. 25-32.
12. Ливенцев С.П. Анализ сложности MAP, MAX LOG MAP и LOG MAP алгоритмов декодирования турбокодов при декодировании бита информации / С.П. Ливенцев, С.В. Зайцев, Б.В. Горлинский // Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні. – К.: КПІ, 2006. – № 1 (12). – С. 125-135.
13. Кулик А.Я. Порівняльний аналіз складності реалізації методів декодування турбо-кодів / А.Я. Кулик, С.Г. Кривогубченко, Ю.Ю. Іванов // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – № 1 (26). – С. 26–31.

**Чуйко Іван Геннадійович** — магістрант групи ІАКІТ-17м, факультет комп'ютерних систем і автоматики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

**Іванов Юрій Юрійович** — канд. техн. наук, асистент кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: Yura881990@i.ua.

Науковий керівник: **Іванов Юрій Юрійович** — канд. техн. наук, асистент кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

**Chuiko Ivan G.** — graduate student, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

**Ivanov Yuriy Yu.** — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: Yura881990@i.ua.

Supervisor: **Ivanov Yuriy Yu.** — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.