

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РЕКЛАМИ В СОЦІАЛЬНІЙ ГРУПІ

<sup>1</sup>Київський національний університет імені Тараса Шевченка;

<sup>2</sup>Київський національний університет культури і мистецтв

*Змодельовано та досліджено процес розповсюдження реклами шляхом комунікації в межах заданої цільової аудиторії. Використано підходи, що базуються на моделях соціальної та фізичної аналогій процесів обміну інформацією у соціальній мережі. Результати отримано для визначеного рівня взаємної довіри користувачів та заданого порогу сприйнятливості до реклами в осіб цільової аудиторії, а також на основі використання моделей дифузії інформації у соціальній групі.*

**Ключові слова:** реклама, процес розповсюдження, моделювання, модель нейроподібного обміну інформації.

### Вступ

Вважається, що вимірювання ефективності реклами є досить складною проблемою. Деякі вважають її нерозв'язною, інші пропонують як прості, так і складні рішення. Проте, абсолютно усі дотримуються думки, що вимірювати ефективність реклами потрібно. За означенням Россера Рівса, реклама є «мистецтвом впровадження унікальної торгової пропозиції в голови найбільшого числа людей за найменших витрат», що необхідно розуміти як спосіб мінімізації витрат на рекламу з метою запобігання банкрутству. З іншого боку, мінімізація витрат без вимірювання ефективності неможлива.

Головною проблемою визначення оптимального рекламного бюджету є визначення величини бюджету, що дозволив би одержати гарантовану віддачу від реклами. Будь-яке відхилення від оптимальності призводить до неефективності [1].

Розробка методик формування якісного рекламного бюджету зумовлює необхідність створення нових способів формалізації процесів у суспільстві з урахуванням особливостей сучасних потоків розповсюдження інформації. Дослідження та моделювання цих процесів базуються на використанні математичних структур та схем, які є подальшим розвитком традиційних статистичних підходів.

У цій роботі сформовано та досліджено процес розповсюдження реклами в межах деякої цільової аудиторії. Моделі описують процеси розповсюдження реклами на основі обміну інформацією, що відбувається під час комунікації між людьми. Для формалізації впливу інформаційних потоків пропонується використати різні моделі обміну інформації у соціальній мережі [2].

### Нейроподібна модель процесу розповсюдження реклами в межах цільової аудиторії

Розглянемо соціальну мережу  $S$ , що складається із заданої  $N$  кількості користувачів. Будемо вважати користувачів вузлами нейронної мережі, які обмінюються між собою повідомленнями (пакетами даних). Математичну модель функціонування обміну інформацією в рамках мережі будемо формувати на основі підходу [3], що використовується для аналізу процесів у нейронах і часто застосовується для дослідження задач з імпульсним впливом.

Кожна особа знайома або має можливість спілкуватися з певною кількістю  $n_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  інших людей з цієї аудиторії. Без обмеження загальності вважається можливим, що існують такі номери  $k = \overline{1, N}$  користувачів мережі, для яких  $n_k = N - 1$ . З іншого боку, зрозуміло, що, якщо дописувач мережі  $i$  знайомий з дописувачем  $j$ , то й  $j$  буде знайомий з  $i$ . Таку структуру можна подати графом, де кожна вершина графа представляє собою користувача, а ребро між двома вершинами означає те, що особи знайомі або спілкуються між собою. Цей граф задається симетричною матрицею

інцидентності розмірністю  $N \times N$   $R = \{r_{ij}\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$ , що складається з 0 та 1, де 0 у позиції  $(i, j)$  означає, що особа  $i$  не знайома з особою  $j$ , а 1 — що особа  $i$  знайома з особою  $j$ .

Кожну людину з цільової аудиторії характеризує також набір додаткових параметрів. По-перше, кожний неоднаково ставиться до побаченої/почутої реклами: в цій моделі кожна людина має свій коефіцієнт  $I_i$ ,  $I_i \in [0, 1]$ ,  $i = \overline{1, N}$ , що відображає її сприйнятливості до реклами. По-друге, кожен по-різному сприймає вплив з боку свого мережевого оточення. Визначимо вектор, що задає рівень довіри  $i$ -ї людини до кожного з її дописувачів, у вигляді  $T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iN})$ ,  $i = \overline{1, N}$ , де  $t_{ij} \in [0, 1]$ ,  $t_{ij} = 0$ , якщо відповідне  $r_{ij} = 0$ ,  $r_{ij}$  —  $j$ -й елемент  $i$ -го рядка матриці  $R$ ,  $t_{ii} = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Припустимо, що перед початком моделювання процесу розповсюдження реклами проведено певну рекламну кампанію. Дослідимо, яким чином буде змінюватися рівень розповсюдження реклами серед певної цільової аудиторії, застосовуючи описану вище модель.

Задамо певний поріг сприйнятливості до реклами  $L$ ,  $L \in [0, 1]$ . При цьому будемо вважати, що реклама ефективно подіяла на людину  $i$ , якщо її ставлення  $I_i \geq L$ . Введемо вектор  $H_0$ ,  $H_0 = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ , де  $h_i = 0$ , якщо  $I_i < L$  та  $h_i = 1$  при  $I_i \geq L$ . Цей вектор характеризує осіб з цільової аудиторії, на яких подіяла реклама до моменту початку спілкування.

Вважаємо, що у мережі відбувається обмін інформацією між користувачами. Сприйнятливості до реклами кожного учасника може з часом змінитись в залежності від його оточення. Зміну сприйнятливості з часом будемо описувати моделлю нейроноподібного елемента вигляду

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t). \quad (1)$$

Зміна ставлення кожної людини з цільової аудиторії спостерігається дискретно. Взявши без обмеження загальності інтервал дискретизації  $\Delta t = 1$ , отримуємо рівняння такого вигляду:

$$I_i(t+1) - I_i(t) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t) \quad (2)$$

або остаточно

$$I_i(t+1) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t). \quad (3)$$

Таким чином, на кожному послідовному кроці дискретизації перераховуються коефіцієнти ставлення до реклами кожної особи на основі середнього значення думки оточення людини з урахуванням рівня її довіри до кожного з певного оточення.

Як результат отримуємо новий набір значень  $I_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $t > 0$ , після чого обчислюємо новий вектор  $H(t)$  відповідно до порогу  $L$ .

Якщо на деякому кроці виконується співвідношення  $H(t) = H(t-1)$ ,  $t \geq 1$ , тобто реклама більше не вплинула на жодну особу з аудиторії, або, якщо вектор  $H(t) = (1, 1, \dots, 1)$ , тобто усі особи вже знаходяться під впливом реклами, то алгоритм зупиняється.

### Врахування негативного ставлення до реклами

Ускладнимо модель впливу та розповсюдження реклами в межах цільової аудиторії припущенням, що не всі люди позитивно ставляться до реклами, а їх відношення може змінюватись не лише від нейтральності до позитивності. Для відображення переходу до негативного ефекту в процесі розповсюдження реклами будемо використовувати такий підхід.

Аналогічно порогу сприйнятливості рекламі  $L$  введемо поріг рівня  $Z$ , що відповідає за негативне відношення до реклами. Якщо на певному кроці сприйнятливості  $i$ -ї особи до реклами  $I_i(t)$  стає меншою за  $Z$  ( $I_i(t) \leq Z$ ), то вважаємо, що дана особа починає негативно ставитися до реклами. Негативне відношення до реклами суттєво не змінює схему алгоритму моделювання. З тим самим інтервалом дискретизації  $\Delta t = 1$  на кожному кроці відбувається, як і раніше, зміна вектора

$H(t)$ ,  $t > 0$ , що характеризує вплив реклами на осіб з цільової аудиторії. Використовуючи поріг  $Z$ , можна спостерігати за зміною негативного ставлення до процесу розповсюдження реклами.

Таким чином, на кожній ітерації можна порахувати кількість осіб, що перейшли до позитивного ставлення, та кількість осіб, що стали негативно відноситися до реклами. Позначимо через  $E^+(t)$ ,  $t > 0$  — кількість осіб, для яких у проміжок часу  $[t-1, t]$  справедливі нерівності  $h_i(t) > h_i(t-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , а через  $E^-(t)$ ,  $t > 0$ , відповідно, кількість осіб, для яких  $h_i(t) < h_i(t-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

За допомогою величин  $E^+(t)$  та  $E^-(t)$ ,  $t > 0$  запишемо оцінку ефективності розповсюдження реклами, яка фактично є аналогом рентабельності

$$E(t) = 1 + \frac{E^+(t) - E^-(t)}{N}, \quad t > 0. \quad (4)$$

Ця оцінка дає можливість зробити висновки щодо ефективності рекламної кампанії у довільний момент часу  $t > 0$ ; визначити ефективність реклами за певний інтервал часу, як середню зважену оцінку, що базується на значеннях цього критерію в кожний момент часу з цього проміжку; та, порівнюючи між собою значення ефективності на різних інтервалах часу, зробити загальні висновки щодо розвитку та успішності рекламної кампанії.

З формули (4) зрозуміло, що усі значення показника належать проміжку  $[0, 2]$ . Величина  $E(t) = 1$  трактується як така, за якою ефективність реклами має нейтральний ефект (викликає рівну кількість позитивних та негативних відгуків) у цільовій аудиторії. За значень  $E(t) > (<) 1$  ефективність реклами характеризується відповідним позитивним (негативним) ефектом.

Необхідно також звернути увагу на залежність алгоритму від вибору порогових значень  $L$  та  $Z$ , а також від величин рівнів взаємної довіри, що подаються векторами  $T_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Відповідні дослідження можливі з використанням, наприклад, елементів теорії динамічного соціального впливу Латане [4].

### Гібридні математичні моделі процесу розповсюдження реклами

*Модель впливу реклами в межах соціальної групи заданого обсягу.*

Позначимо  $u(x, t): (x, t) \rightarrow [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$  — функцію рівня розповсюдження реклами в межах заданої соціальної групи обсягу  $x$ , що не перевищує наперед визначеної величини  $A$ ,  $0 \leq x \leq A$ .

Змоделюємо зміну впливу (концентрації) реклами за допомогою рівняння дифузії [5]. Цей процес аналогічний розповсюдженню деякої речовини протягом конкретного часового інтервалу  $t \in [0, T]$  і може бути описаний рівнянням

$$du/dt = -k(t) d^2u/dx^2 \quad (5)$$

з початковою умовою  $u(x, 0) = 0$  та крайовою умовою  $u(A, t) = 0$ , де  $k(t)$  — коефіцієнт, що характеризує вплив реклами (аналог коефіцієнта дифузії) і є пропорційним швидкості зміни рекламозалежної частини соціальної групи.

Склад групи розбивається на 3 підгрупи: на чутливих до реклами  $y_1$ , тих, що вже знаходяться під впливом реклами  $y_2$ , і байдужих до реклами  $y_3$ . На основі моделі Кермана–Маккендріка [6] запишемо систему диференціальних рівнянь, що описує процес розповсюдження рекламної інформації. Її розв'язки, відповідно, визначають кількості окремих груп:

$$\dot{y}_1 = -y_1 y_2; \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 - y_2; \quad \dot{y}_3 = y_2. \quad (6)$$

Відзначимо, що за такою постановкою величина  $A$  залежатиме від часу, при чому  $A = A(t) = y_1(t) + y_2(t)$ . Крім цього, можна вважати  $k(t) = \mu \cdot \dot{x}(t) \equiv \text{const}$ .

Шукаємо функцію  $u(x, t)$  у вигляді  $u(x, t) = X(x(t))$ . Тоді для будь-якого моменту часу  $t \in [0, T]$  отримуємо величину рівня впливу реклами у вигляді  $u(x, t) = \mu(1 - e^{-x(t)/\mu})$ ,  $0 \leq x(t) \leq y_1(t) + y_2(t)$ ,  $y_1(t), y_2(t)$  — компоненти розв'язку системи (6).

Цей розв'язок може бути узагальнений за умов припущення, що частина групи, яка має імунітет до реклами, може через деякий час його втратити. Частина групи стає при цьому чутливою

до реклами, збільшуючи групу  $y_1(t)$ , і процес періодично повторюється.

*Модель розповсюдження реклами за умов дифузії товарів.*

Як і у попередньому випадку, позначимо через  $u(x,t)$  функцію рівня розповсюдження реклами за умов наявності заданої кількості товарів  $x$ , яка не перевищує наперед визначеної величини  $A$ ,  $0 \leq x \leq A$ .

Процес розповсюдження реклами за умов зміни кількості товарів на ринку протягом конкретно заданого часового інтервалу  $t \in [0, T]$  може бути описаний рівнянням (5) з початковою умовою  $u(x,0) = 0$  та крайовою умовою  $u(A,t) = 1$ , в якому  $k(t)$  — коефіцієнт, що характеризує зміну впливу реклами з часом. Цей коефіцієнт вважаємо пропорційним швидкості зміни кількості товару.

Припустимо, що продаж товару проводиться у  $M$  торгових точках. Опишемо процес зміни товарного обсягу на основі математичної моделі нейрону [3].

Маємо

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(t), \quad x(0) = A, \quad (7)$$

де  $x_i(t)$  — сумарна кількість товару, що була продана  $i$ -ю торговою точкою до моменту часу  $t$ .

Таким чином, припускаючи, що  $k(t) = \gamma \dot{x}(t)$ , отримуємо гібридну модель вигляду (5), (7) для розрахунку рівня розповсюдження реклами за результатами даних про продаж товарів. Шукаючи функцію  $u(x,t)$  у вигляді  $u(x,t) = X(x(t))$ , визначаємо рівень реклами для кожного моменту часу  $t$  в межах можливого обсягу товарів  $0 \leq x \leq x(t)$ , поточне значення якого  $x(t)$  отримуємо з рівняння (7).

Проведено чисельні експерименти, які дозволили зробити висновок про адекватність отриманих на основі запропонованих підходів розрахунків результатам спостереження за реальними процесами зміни рекламного впливу. Наприклад, групі студентів з 20 осіб було запропоновано взяти участь у вивченні технологічних засобів Bluetix на основі хмарних технологій від фірми IBM. Динаміка спостережень за рівнем розповсюдженням інформованості здійснювалась протягом двох тижнів шляхом опитування студентів. У таблиці 1 представлені кількісні показники змодельованого рівня інформованості у групі ( $\mu = 2$ ), у таблиці 2 — кількісні показники рівня інформованості у групі ( $\mu = 0,2$ ). Відповідні графіки динаміки рівня розповсюдження інформованості в групі показано на рис. 1 та рис. 2.

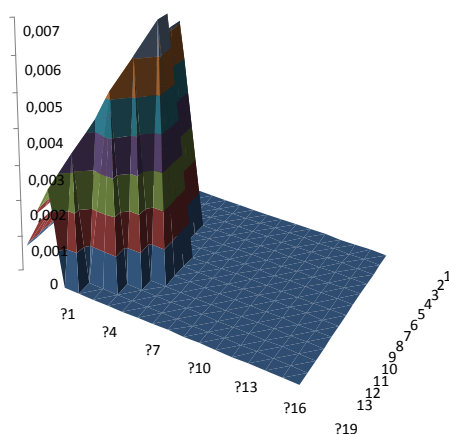
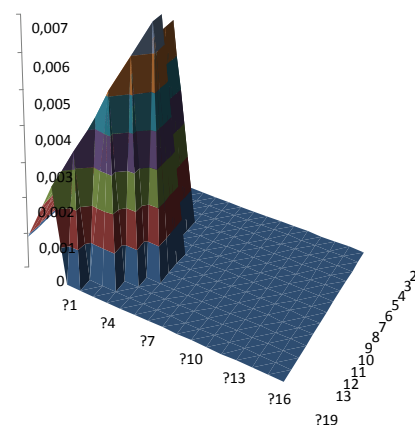
Таблиця 1

Числові показники рівня інформованості у групі для  $\mu = 2$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0,006084	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0,006084	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0,006084	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0,006084	0,006946	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0,006084	0,006946	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0,006084	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0,004353	0,005219	0	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0,003485	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000872	0,001744	0,002615	0	0	0	0	0	0	...	0

Числові показники рівня інформованості у групі для  $\mu = 0,2$ 

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0,006001	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0,006001	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0,006001	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0,006001	0,006839	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0,006001	0,006839	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0,006001	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0,004311	0,005159	0	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0,003457	0	0	0	0	0	...	0
0	0,000871	0,001737	0,0026	0	0	0	0	0	0	...	0

Рис. 1. Динамика рівня інформованості в групі для  $\mu = 2$ Рис. 2. Динамика рівня інформованості в групі для  $\mu = 0,2$ 

## Висновки

У роботі змодельовано та досліджено процес розповсюдження реклами на основі комунікації в межах заданої цільової аудиторії.

Запропоновані моделі формуються на основі методики формалізації процесів проникнення (розповсюдження) впливу реклами на задану цільову аудиторію. Використано підходи, що базуються на моделях соціальної та фізичної аналогій процесів обміну інформацією у соціальній мережі. Результати отримано для визначеного рівня взаємної довіри користувачів та заданого порогу сприйнятливості рекламі в осіб цільової аудиторії, а також на основі використання моделей дифузії інформації у соціальній групі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шведун В. А. Разработка методического обеспечения формирования совокупного рекламного бюджета предприятия // БизнесИнформ. — 2008. — № 9. — С. 60—68.
2. Івохін С. В. Про один підхід до моделювання розповсюдження реклами як процесу агрегації, обмеженої дифузії / С. В. Івохін, Ю. О. Науменко // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. — 2016. — № 2. — С. 98—101. — (Фіз.-мат. науки).
3. Jang J. S. Neuro-Fuzzy and soft computing / J. S. Jang, C. T. Sun, E. Mizutani. — N.Y. : Prentice Hall, 1997. — 176 p.

4. Latané B. The psychology of social impact / B. Latané // American Psychologist. — 1981. — V. 36. — P. 343—356.  
 5. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. — М. : Наука, 1969. — 288 с.  
 6. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. — М. : Мир, 1990. — 512 с.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 10.10.2017

**Івохін Євген Вікторович** — д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua .

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ;

**Навродський Володимир Олександрович** — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економіки, e-mail: navrodskiy@ukr.net .

Київський національний університет культури і мистецтв, Київ

**Ye. V. Ivohin<sup>1</sup>**  
**V. O. Navrodskiy<sup>2</sup>**

## Mathematical Models of the Advertising Distribution Process in Social Groups

<sup>1</sup>Taras Shevchenko Kyiv National University;

<sup>2</sup>Kyiv National University of Culture and Arts

*In this article a process of the advertisement spreading via communications within a given target audience and without means of mass media has been modeled and studied. There has been used a model that describes the process of communication within the group, so that more users will be interested in advertised product. The proposed models have been formed based on the method of formalizing the processes of penetration (spread) of the influence of advertising on a given target audience. Approaches based on models of social and physical analogies of information exchange processes in the social network have been used.*

**Keywords:** advertising distribution process, simulation, model of interneural exchange.

**Ivokhin Yevhen V.** — Dr. Sc. (Ph.-Math.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Decision Making Support, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua ;

**Navrodskiy Volodymyr O.** — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor, Assistant Professor of the Chair of Economics, e-mail: navrodskiy@ukr.net

**Е. В. Ивохин<sup>1</sup>**  
**В. А. Навродский<sup>2</sup>**

## Математические модели процесса распространения рекламы в социальной группе

<sup>1</sup>Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

<sup>2</sup>Киевский национальный университет культуры и искусств

*Смоделирован и исследован процесс распространения рекламы путем коммуникации в рамках заданной целевой аудитории. Используются подходы, базирующиеся на моделях социальной и физической аналогий процессов обмена информацией в социальной сети. Результаты получены для определенного уровня взаимного доверия пользователей и заданного порога восприимчивости к рекламе участников целевой аудитории, а также на основе использования моделей диффузии информации в социальной группе.*

**Ключевые слова:** реклама, процесс распространения, моделирование, модель нейроподобного обмена информации.

**Ивохин Евгений Викторович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и теории принятия решений, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua ;

**Навродский Владимир Александрович** — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры экономики, e-mail: navrodskiy@ukr.net