

**Методичні вказівки  
до виконання курсової роботи з дисципліни  
«Основи теорії невизначеності вимірювань»  
для студентів усіх освітніх програм  
і форм навчання спеціальності 152 – «Метрологія  
та інформаційно-вимірювальна техніка»**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Методичні вказівки**  
**до виконання курсової роботи з дисципліни**  
**«Основи теорії невизначеності вимірювань»**  
**для студентів усіх освітніх програм**  
**і форм навчання спеціальності 152 – «Метрологія та**  
**інформаційно-вимірювальна техніка»**

Вінниця  
ВНТУ  
2018

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30.05.2018 р.)

Рецензенти:

Р. Н. Кветний, доктор технічних наук, професор

Й. Й. Білинський, доктор технічних наук, професор

Ю. В. Булига, кандидат технічних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань» для студентів усіх освітніх програм і форм навчання спеціальності 152 – «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» / Укладачі : О. М. Васілевський, К. В. Овчинников, В. В. Присяжнюк. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 57 с.

Методичні вказівки містять загальні вимоги до написання та оформлення курсової роботи з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань» для студентів магістратури усіх освітніх програм і форм навчання спеціальності 152 – «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка». У методичних вказівках визначається мета, завдання, вимоги до структури, змісту і оформлення пояснювальної записки, а також необхідні теоретичні відомості та послідовність виконання курсової роботи, наводяться рекомендації щодо написання окремих розділів роботи із наведенням конкретних прикладів розрахунку орієнтовних завдань.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП.....  | 5  |
| 1 ТЕМА, МЕТА І ЗАВДАННЯ.....                                    | 7  |
| 2 ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ.....                                  | 8  |
| 3 ЗМІСТ, СТРУКТУРА ТА ОБСЯГ.....                                | 9  |
| 3.1 Вимоги до анотації.....                                     | 9  |
| 3.2 Вимоги до вступу.....                                       | 9  |
| 3.3 Вимоги до основної частини роботи.....                      | 10 |
| 3.4 Вимоги до висновків.....                                    | 14 |
| 4 ПЕРЕЛІК ОРІЄНТОВНИХ ЗАВДАНЬ НА КУРСОВУ РОБОТУ.....            | 15 |
| 5 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ ЗАВДАНЬ.....                              | 16 |
| 5.1 Приклад розв'язування завдання 1.....                       | 16 |
| 5.2 Приклад розв'язування завдання 2.....                       | 23 |
| 5.3 Приклад розв'язування завдання 3.....                       | 27 |
| 5.4 Приклад розв'язування завдання 4.....                       | 29 |
| 5.5 Приклад розв'язування завдання 5.....                       | 37 |
| 6 ПОРЯДОК ОРГАНІЗАЦІЇ ЗАХИСТУ<br>ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ.....    | 44 |
| РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....                                   | 45 |
| Додатки.....  | 47 |
| Додаток А (Довідковий) Зразок оформлення титульного аркуша..... | 48 |
| Додаток Б (Обов'язковий) Варіанти до першого завдання.....      | 49 |
| Додаток В (Обов'язковий) Варіанти до другого завдання.....      | 51 |
| Додаток Г (Обов'язковий) Варіанти до третього завдання.....     | 52 |
| Додаток Д (Обов'язковий) Варіанти до четвертого завдання.....   | 53 |
| Додаток Е (Обов'язковий) Варіанти до п'ятого завдання.....      | 55 |

## ВСТУП

Концепція невизначеності вимірювань є відносно новою в історії вимірювань, хоча аналіз похибок вже давно є окремою частиною науки про вимірювання – метрології. Нині міжнародними організаціями з метрології та стандартизації і науковою спільнотою визнано, що коли всі відомі або передбачувані компоненти похибок були оцінені та були введені відповідні поправки, все ще залишається невизначеність щодо правильності заявленого результату, тобто сумніву щодо того, наскільки добре результат вимірювання характеризує вимірювану величину.

Подібно до того, як практично універсальне використання Міжнародної системи одиниць (SI) привело до узгодженості з усіма науково-технічними вимірюваннями, світовий консенсус щодо оцінення та подання невизначеності вимірювань дозволив надати вагомості широкому спектру результатів вимірювань у науці, машинобудуванні, комерції, промисловості та регулюванні, які стало легко зрозуміти та правильно інтерпретувати. У епоху глобального ринку необхідно, щоб метод оцінення та подання невизначеності був однаковим у всьому світі, таким щоб результати вимірювань, виконувані в різних країнах, можна було легко порівняти.

Тому дисципліна «Основи теорії невизначеності вимірювань» розкриває методи оцінювання (опрацювання) результатів вимірювань, контролю, діагностування та способи подання компонентів невизначеності і опирається на такі дисципліни, які вивчають студенти під час навчання у закладі вищої освіти: вища математика, зокрема теорія ймовірності та математична статистика, метрологія, основи метрологічного забезпечення, основи теорії похибок, чисельні методи тощо. Саме тому навчальною програмою і передбачено виконання курсової роботи.

Основна мета методичних вказівок – надати студентам необхідну інформацію, що дозволить виконувати опрацювання результатів вимірювань, контролю та діагностування на основі наведених прикладів і методик розрахунку.

В процесі виконання курсової роботи студенти повинні максимально використати набуті теоретичні знання, виявити вміння застосовувати їх на практиці при розв'язанні завдань відповідно до заданих варіантів, а також продемонструвати високий рівень знань математичного апарата та прикладних математичних пакетів для опрацювання необхідних результатів на основі концепції невизначеності.

Пропоновані методичні вказівки містять необхідну інформацію, яка сприятиме самостійному та грамотному виконанню курсової роботи. У відповідних розділах подано зміст і методику виконання курсової роботи, завдання, порядок виконання та вимоги до оформлення курсової роботи. Використовуючи рекомендований методичний підхід, студент зможе успішно виконати задані відповідно до варіанта завдання.

Курсова робота виконується студентами самостійно під керівництвом викладача і для успішного її виконання важливим є вивчення відповідної навчальної та методичної літератури з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань».

## 1 ТЕМА, МЕТА І ЗАВДАННЯ

Курсова робота з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань» є важливою складовою частиною підготовки технічних фахівців усіх освітніх програм і форм навчання спеціальності 152 – «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка». Написання і захист курсової роботи є обов'язковим етапом вивчення навчальної програми дисципліни.

Метою виконання курсової роботи є поглиблення набутих теоретичних знань з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань»; формування практичних навичок опрацювання результатів вимірювань, контролю та діагностування на основі концепції невизначеності; застосування у процесі навчання набутого студентом науково-дослідницького потенціалу.

У процесі досягнення зазначеної мети вирішуються такі завдання:

- закріпити та поглибити знання з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань»;
- систематизувати методики оцінювання результатів вимірювань, оволодіти математичними пакетами прикладних програм;
- обґрунтувати вибір відповідних методів та підходів для подальшого вирішення необхідного завдання;
- за потреби побудувати необхідні характеристики зміни невизначеності;
- проаналізувати результати оцінювання, подати отримані результати та зробити відповідні висновки.

Виконання студентами курсової роботи сприяє поєднанню в цілісну систему знань і умінь в галузі коенцепції невизначеності вимірювань, що дозволяє їм сформулювати чіткі уявлення про методологію оцінювання і подання невизначеності результатів вимірювань та навчитись використовувати її на практиці.

Керівник курсової роботи надає допомогу в уточненні змісту, складанні завдання для виконання курсової роботи. Керівник також сприяє процесу збирання та отримання необхідного матеріалу для написання курсової роботи, рекомендує основну та додаткову літературу, проводить регулярні консультації; розробляє календарний графік виконання етапів роботи та слідкує за його дотриманням, перевіряє роботу, робить відповідні зауваження і вирішує питання про можливість допуску до захисту.

## 2 ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ

На початку семестру студент отримує індивідуальне завдання на курсову роботу, оформлене відповідно до вимог, що висуваються до такого роду документів. Як правило, індивідуальне завдання являє собою аркуш паперу формату А4, на якому в стислій формі подаються завдання, вихідні дані для виконання роботи у вигляді варіантів та наводиться орієнтовний зміст роботи. Індивідуальні завдання для студентів затверджуються завідувачем кафедри на початку семестру. При отриманні індивідуального завдання у відповідній графі бланка студент ставить свій підпис. Свій підпис у відповідній графі ставить і керівник курсової роботи.

Після отримання індивідуального завдання студент розробляє план роботи, який узгоджує з керівником. На базі розробленого плану формується зміст роботи, перелік розділів та додатків до пояснювальної записки.

Після того, як буде сформовано зміст роботи, студент починає виконувати роботу та формувати пояснювальну записку відповідно до розробленого змісту.

Написання курсової роботи передбачає вивчення літературних джерел і підбір ілюстративного матеріалу. Насамперед доцільно звертатися до навчальних посібників, які в системному порядку викладають основний зміст дисципліни. Інформаційною базою для виконання курсової роботи є наукова література за відповідною тематикою досліджень; підручники і навчальні посібники, які в системному порядку викладають основні проблемні і актуальні питання концепції невизначеності.

Особливу увагу потрібно приділити вивченню змісту основних теоретичних і практичних способів оцінювання результатів вимірювань. При вивченні монографій, фахових статей, іншої спеціальної літератури з питань, що безпосередньо відносяться до теми курсової роботи, необхідно скласти конспект, викладаючи зміст своїми словами. Такий підхід дозволить забезпечити правильне розуміння вивченого матеріалу, а також дасть змогу самостійно викласти зміст курсової роботи. Як ілюстративний матеріал потрібно підібрати заповнені аналітичні таблиці, графіки, рисунки, алгоритми вирішення завдань тощо.



### 3 ЗМІСТ, СТРУКТУРА ТА ОБСЯГ

План курсової роботи студент розробляє самостійно на основі індивідуального завдання, методичних рекомендацій кафедри після огляду та опрацювання переліку рекомендованої літератури.

Незалежно від того, яким буде план виконання курсової роботи, пояснювальна записка до курсової роботи має містити такі структурні елементи:

- титульний аркуш (додаток А);
- індивідуальне завдання;
- анотація;
- зміст;
- вступ;
- основна частина;
- висновки;
- перелік використаної літератури;
- додатки.

#### 3.1 Вимоги до анотації

В анотації наводиться коротка характеристика основного змісту курсової роботи та одержаних результатів дослідження, при цьому використовуються переважно прості синтаксичні конструкції, характерні стилю ділових документів, а також загальноприйнята термінологія.

Анотація подається українською та іноземною мовами. Обсяг анотації – 3–4 речення, але не більше 1/3 сторінки для анотації однією мовою. Анотація розташовується на одній окремій сторінці після індивідуального завдання на курсову роботу.

#### 3.2 Вимоги до вступу

Вступ до курсової роботи є досить відповідальною частиною, в якій коротко викладають оцінку сучасного стану досліджень, відзначаючи практично розв'язані або ж нерозв'язані задачі, наукові підходи, що існують у науковому світі, провідних вчених і фахівців, світові тенденції розв'язання поставлених задач та обов'язково обґрунтування доцільності проведення наукових досліджень.

У вступі коротко розкривається актуальність теми, чітко формулюється мета дослідження і завдання, які треба розглянути, щоб досягти поставленої у курсовій роботі мети.

У вступній частині обов'язково необхідно:

- розкрити актуальність теми курсової роботи;

- розкрити ступінь розробленості теми курсової роботи у наукових працях вітчизняних і закордонних учених;
- чітко сформулювати мету та завдання дослідження;
- описати основні методи дослідження.

Опис актуальності теми курсової роботи має бути небагатослівним, оскільки цьому передувала характеристика сучасного стану розвитку досліджень, що стосуються курсової роботи.

Метою написання курсової роботи, як правило, є «розробка методики опрацювання результатів вимірювань ...».

Завдання курсової роботи, сформульовані у вступі, обов'язково формуються за розділами роботи і мають відповідати задачам, поставленим науковим керівником в індивідуальному завданні.

Відповідно до мети дослідження ставляться такі завдання:

- дослідити ...;
- проаналізувати ...;
- оцінити ...;
- побудувати ...;
- перерахувати ...;
- подати ... .

### 3.3 Вимоги до основної частини роботи

Основна частина роботи має складатися з огляду та алізу існуючих методів вирішення поставлених в індивідуальному завданні задач, як правило, це перший розділ пояснювальної записки, а також з результатів розрахунку (виконання) заданих завдань – це другий розділ роботи. Розділи мають складатися з підрозділів, в яких висвітлюється відповідний (необхідний) матеріал. Оформлювати пояснювальну записку до курсової роботи, її розділи, підрозділи, текст, формули, рисунки, додатки, а також перелік використаної літератури потрібно відповідно до затвердженого Положення про курсове проектування у Вінницькому національному технічному університеті.

Пояснювальна записка до курсової роботи виконується згідно з ДСТУ 3008:2015. Мова курсової роботи державна, стиль науковий, чіткий, без орфографічних і синтаксичних помилок; послідовність логічна.

Текст курсової роботи друкується на комп'ютері з одного боку стандартного аркуша одностороннього паперу формату А4 (210×297 мм). Гарнітура Times New Roman, розмір шрифту 14 пунктів, інтервал 1,5 (≈ 28–30 рядків на сторінку).

При написанні дотримуються таких розмірів: верхнє, ліве і нижнє поля – не менше 20 мм, праве – не менше 10 мм. Абзацний відступ має бути однаковим впродовж усього тексту і дорівнювати п'яти знакам.

Під час виконання курсової роботи необхідно дотримуватись рівномірної щільності, контрастності й чіткості зображення. Всі лінії, літери, цифри і знаки мають бути чіткими та однаково чорними впродовж усієї роботи.

Номери сторінок потрібно проставляти арабськими цифрами у правому верхньому куті аркуша без крапки в кінці, дотримуючись наскрізної нумерації впродовж усього тексту роботи. Титульний аркуш враховують у загальній нумерації сторінок роботи, проте номер сторінки на титульному аркуші не проставляють.

Заголовки структурних частин (розділів) курсової роботи пишуть великими літерами симетрично до тексту, крапка в кінці заголовку не ставиться. Переноси частини слів в заголовку не допускаються, на інший рядок слово переноситься повністю. Якщо заголовок складається з двох речень, то вони розділяються крапкою. Кожний наступний розділ роботи починають з нової сторінки. Розділи нумеруються арабськими цифрами в межах всієї курсової роботи, проте розділам «ЗМІСТ», «ВСТУП», «ВИСНОВКИ», «ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ» номери не присвоюють. Крапка після цифри не проставляється. Відстань між заголовком і подальшим або попереднім текстом має бути не менше ніж два міжрядкових інтервали.

Заголовки підрозділів (підзаголовки) пишуться малими літерами окрім першої і розміщуються з абзацу. Переноси частини слів в підзаголовку не допускаються, на інший рядок слово переноситься повністю. Якщо підзаголовок складається з двох речень, то вони розділяються крапкою. Не допускається розміщувати назву підрозділу, а також пункту й підпункту в нижній частині сторінки, якщо після неї розміщено тільки один рядок тексту. Підрозділи нумерують арабськими цифрами в межах розділу («1.1 Перший підрозділ першого розділу», «2.3 Третій підрозділ другого розділу»), крапку після останньої цифри не проставляють.

Формули, що входять до курсової роботи, нумерують в межах розділу. Номер формули складається з номера розділу та порядкового номера формули, розділених крапкою. Номер формули розташовують з правого боку на рівні формули в круглих дужках. У багаторядкових формулах або рівняннях їхній номер проставляється на рівні останнього рядка. Посилання в тексті на номер формули подають в дужках, наприклад, «... за формулою (1.1)».

Пояснення символів та числових коефіцієнтів наводять під формулою. Пояснення кожного символу подається з нового рядка в тій послідовності, в якій символи зустрічаються у формулі. Пояснення

познак потрібно подавати без абзацного відступу з нового рядка, починаючи зі слова «де» без двокрапки. Познаки, яким встановлюють пояснення, рекомендовано вирівнювати у вертикальному напрямку.

Формули, що записані одна за одною та не розділені текстом, розділяються комою. Рівняння і формули необхідно виділяти з тексту в окремий рядок. Найвище та найнижче розташування запису формул(и) та/чи рівняння(-нь) має бути на відстані не менше ніж один рядок від попереднього й наступного тексту.

Графічні матеріали і таблиці розміщуються в тексті пояснювальної записки до курсової роботи або виносяться в додатки.

Усі графічні матеріали (ескізи, діаграми, графіки, схеми, фотографії, рисунки, кресленики тощо) повинні мати однаковий підпис «Рисунок». Рисунок подають одразу після тексту, де вперше посилаються на нього, або якнайближче до нього на наступній сторінці, а за потреби – в додатках до звіту.

Рисунки нумерують наскрізно арабськими цифрами, крім рисунків в додатках. Дозволено рисунки нумерувати в межах кожного розділу. У такому разі номер рисунка складається з номера розділу та порядкового номера рисунка, розділених крапкою, а назва рисунка подається після номеру і відділяється від нього знаком «тире», наприклад, «Рисунок 1.1 – Схематичне зображення процесу переробки». Номер рисунка додатка складається із позначки додатка та порядкового номера рисунка в додатку, відокремлених крапкою. Наприклад, «Рисунок В.1 – » Назва рисунка має відображати його зміст, бути конкретною та стислою. Якщо з тексту зрозуміло зміст рисунка, його назву можна не наводити. За потреби пояснювальні дані до рисунка подають безпосередньо після графічного матеріалу перед назвою рисунка. Назву рисунка друкують з великої літери та розміщують під ним посередині рядка.

Рисунок виконують на одній сторінці аркуша. Якщо він не вміщується на одній сторінці, його можна переносити на наступні сторінки. У такому разі назву рисунка зазначають лише на першій сторінці, пояснювальні дані – на тих сторінках, яких вони стосуються, і під ними друкують: «Рисунок \_\_\_\_, аркуш \_\_\_\_».

Цифрові дані потрібно оформлювати як таблицю. Горизонтальні та вертикальні лінії, що розмежовують рядки таблиці, можна не наводити, якщо це не ускладнює користування таблицею.

Таблиці нумерують наскрізно арабськими цифрами, крім таблиць у додатках. Дозволено таблиці нумерувати в межах розділу. Тоді її номер складається з номера розділу та порядкового номера таблиці,

відокремлених крапкою. Наприклад, «Таблиця 2.1 – ». Номер таблиці додатка складається з позначення додатка та порядкового номера таблиці в додатку, відокремлених крапкою. Наприклад, «Таблиця В.3 – ». Назва таблиці має відображати її зміст, бути конкретною та стислою. Якщо з тексту зрозуміло зміст таблиці, її назву можна не наводити. Назву таблиці друкують з великої літери і розміщують над таблицею з абзацного відступу.

У разі перенесення частини таблиці на інший аркуш (сторінку) слово «Таблиця» та її номер вказують лише один раз – над першою частиною таблиці. Над іншими частинами таблиці з абзацного відступу друкують «Продовження таблиці \_\_\_» або «Кінець таблиці \_\_\_» без повторення її назви.

Ілюстративний матеріал може бути оформлений у вигляді додатків. Додатки являють собою окремі розділи пояснювальної записки до курсової роботи, що розташовуються після переліку посилань. Як і будь-який розділ додатки мають відобразитись в змісті пояснювальної записки і мати наскрізну нумерацію сторінок.

Щоб уникнути переобтяження викладу тексту основної частини, у структурному елементі «Додатки» наводять відомості, які доповнюють та унаочнюють роботу.

Додатки розміщують у порядку посилання їх у тексті.

На відміну від звичайних розділів заголовків додатку записують маленькими літерами окрім першої симетрично до тексту сторінки. Над заголовком, але посередині рядка, друкують слово «ДОДАТОК» і відповідну велику літеру української абетки, починаючи з А, за винятком літер Г, Є, З, І, Ї, Й, О, Ч, Ь, яка позначає додаток. наприклад, «Додаток А». Заголовок додатку розташовують симетрично відносно тексту окремим рядком. Текст кожного додатка починають з наступної сторінки.

Рисунки, таблиці та формули, розміщені в додатках, нумерують у межах кожного додатка, наприклад: «Рисунок Д.1.2» (другий рисунок першого розділу додатка Д).

Список літератури має містити перелік літературних джерел, на які повинні бути обов'язкові посилання в тексті пояснювальної записки. Література в загальний список записується в порядку посилання на неї в тексті.

Оформлена відповідно до сформульованих вимог та повністю укомплектована курсова робота має бути переплетена або скріплена.

На першій (титульній) сторінці студент повинен поставити свій підпис та дату остаточного завершення роботи.

### 3.4 Вимоги до висновків

Структурний елемент «Висновки» розміщують після викладення суті роботи, починаючи з нової сторінки.

Висновки є заключною частиною, підсумком виконаних завдань, які поставлені в індивідуальному завданні, із зазначенням отриманих результатів.

В тексті пояснювальної записки бажано подавати висновки до кожного розділу або підрозділу.

## 4 ПЕРЕЛІК ОРІЄНТОВНИХ ЗАВДАНЬ НА КУРСОВУ РОБОТУ

**Завдання 1.** Виконайте оцінювання комбінованої та розширеної невизначеностей вимірювань величини  $X$  (табл. Б.1), що пов'язана з вихідною величиною  $Y$  функціональними залежностями, які наведені в таблиці Б.2 додатка Б (варіанти завдань виберіть за порядковим номером у списку). Впливні коефіцієнти  $k$  та  $b$  мають такі межі невилучених залишків систематичної похибки:  $\theta_k=0,15$  в припущенні про трикутний закон розподілу, а  $U_b=0,25$  в припущенні про нормальний закон розподілу з ймовірністю  $P$ , яка задана в таблиці Б.1 додатку Б.

**Завдання 2.** За допомогою відомих залежностей виконайте перерахунок характеристик похибок у характеристики невизначеності як для одноразових, так і для багаторазових вимірювань. Дані про характеристики похибок наведені в таблиці В.1 додатка В.

**Завдання 3.** Проведено вимірювання за допомогою вольтметра, що має верхню межу вимірювання  $U_k$  (табл. Г.1) і клас точності  $c/d$ , що відповідає значенню, яке зазначене в таблиці Г.1 додатка Г. В результаті вимірювання отримано показ вольтметра  $U$  (табл. Г.1). Вимірювання здійснено при температурі навколишнього середовища  $\Theta$  (табл. Г.1) та дії магнітного поля напруженістю  $H = 400$  А/м. Відомо, що температурна похибка не перевищує основну на кожних  $10$  °С відхилення температури від нормальних умов  $20$  °С, а магнітна похибка становить половину основної інструментальної похибки приладу за напруженості зовнішнього поля до  $400$  А/м. Оцініть невизначеність результату вимірювання напруги.

**Завдання 4.** Сформуйте систему нормальних рівнянь за методом найменших квадратів для результатів сукупних вимірювань  $x_i$ . Оцініть невизначеність результатів вимірювань та запишіть (подайте) результати вимірювань.

Результати сукупних вимірювань беруться з таблиці Д.1 додатка Д відповідно до виданого варіанта.

**Завдання 5.** На основі заданого диференціального рівняння (відповідно до виданого варіанта – додаток Е), що описує динамічний режим роботи вимірювального перетворювача фізичної величини та моделі заданого вхідного сигналу оцініть невизначеність динамічного вимірювання. Всі впливні коефіцієнти передатної функції вимірювального перетворювача і зображення вхідного сигналу при побудові характеристики зміни динамічної невизначеності вважати такими, що дорівнюють 1.

## 5 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ ЗАВДАНЬ

### 5.1 Приклад розв'язування завдання 1

Оцінювання невизначеності за типом А. Експериментальну дисперсію, яка характеризує складову невизначеності, отриману в результаті оцінювання за типом А, знаходять із рядів повторних спостережень, і вона є статистичною оцінкою дисперсії. Експериментальне стандартне відхилення отримують як додатний квадратний корінь з дисперсії, позначають як  $u_A$  і для зручності називають стандартною невизначеністю типу А [1 – 4].

Оцінення компонентів стандартної невизначеності за типом А оснований на розподілах частоті. Тому для оцінювання стандартної невизначеності за типом А необхідно провести  $n$  незалежних спостережень вимірюваної величини  $q$  в умовах повторюваності.

У більшості випадків найкращою доступною оцінкою математичного сподівання чи очікуваного значення  $\mu_q$  величини  $q$ , що змінюється випадковим чином, є середнє арифметичне або середнє значення  $\bar{q}$  із  $n$  спостережень

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k. \quad (5.1)$$

Експериментальне стандартне відхилення, що характеризує змінність значень  $q_k$ , або, точніше, їхню дисперсію  $\sigma^2$  відносно середнього значення  $\bar{q}$  розраховують за формулою [1, 5, 6]

$$u_A(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}}. \quad (5.2)$$

Оскільки за результат багаторазових вимірювань беруть середнє значення  $\bar{q}$ , то важливо оцінити його дисперсію.

Найкраща оцінка  $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$  дисперсії середнього значення  $u_A^2(\bar{q})$  виражається як

$$u_A^2(\bar{q}) = \frac{u_A^2(q_k)}{n}. \quad (5.3)$$

Експериментальна дисперсія середнього  $u_A^2(\bar{q})$  і експериментальне стандартне відхилення середнього значення  $u_A(\bar{q})$ , що дорівнює



додатному квадратному кореню з оцінки дисперсії  $u_A^2(\bar{q})$ , кількісно визначають, наскільки добре  $\bar{q}$  оцінює  $\mu_k$  величини  $q$ .

З урахуванням виразів (5.2) та (5.3) експериментальне стандартне відхилення середнього значення  $u_A(\bar{q})$  розраховується за формулою [1-10]

$$u_A(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n(n-1)}}. \quad (5.4)$$

Тому для оцінювання стандартної невизначеності типу А, відповідно до експериментальних даних 20-го варіанта (табл. Б.1), розрахуємо середньоарифметичне значення результатів спостережень за формулою (5.1)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{183,66}{9} \approx 20,41.$$

Відповідно до формули (5.4) стандартну невизначеність типу А розрахуємо за виразом

$$u_A(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 20,41)^2}{9(9-1)}} = 0,015.$$

Для оцінювання невизначеності за типом В вхідної величини  $X_i$ , яка не була отримана в результаті повторних спостережень, пов'язані з ними оцінена дисперсія  $u^2(x_i)$  або стандартна невизначеність  $u(x_i)$  визначаються на базі наукового судження, що базується на всій доступній інформації про можливу змінність  $X_i$ . Тобто, стандартну невизначеність типу В одержують з передбачуваної функції щільності вірогідності, основаної на ступені впевненості в тому, що подія обов'язково відбудеться (ця вірогідність часто називається суб'єктивною вірогідністю).

Фонд інформації може містити [1, 2, 6, 7]:

- дані про вигляд розподілу ймовірностей;
- невизначеності констант і довідкових даних;
- специфікацію виробника, дані, що наводяться у свідченнях про повірку, калібрування чи в інших сертифікатах;
- дані, отримані в результаті досвіду, або загальні знання про поведінку і властивості відповідних матеріалів та засобів вимірювальної техніки (ЗВТ);
- дані попередніх вимірювань.

Правильне використання фонду доступної інформації для оцінювання стандартної невизначеності за типом В потребує інтуїції, основаної на досвіді та загальних знаннях, і є майстерністю, яка приходить з практикою.

Якщо оцінка  $x_i$  береться зі специфікації виробника, свідоцтва про повірку, довідника або іншого джерела та її невизначеність подається як деяке кратне стандартного відхилення, то стандартну невизначеність  $u(x_i)$  можна взяти такою, що дорівнює зазначеному значенню, поділеному на множник, і оцінена дисперсія  $u^2(x_i)$  буде дорівнювати квадрату цієї частки.

Складові стандартної невизначеності типу В, як правило, визначають на основі інформації про верхні і нижні границі  $[\alpha_-; \alpha_+]$  передбачуваного (априорно визначеного) закону розподілу чи через інтервал  $U$ , що має заданий довірчий рівень  $p$ .

Для визначення стандартної невизначеності типу В потрібно взяти додатний квадратний корінь з добутку довірчого рівня кожного значення та квадрата відхилення цього значення і всі добутки такого виду додати. Таким чином, загальний вигляд формули для обчислення стандартної невизначеності типу В за дискретних даних має вигляд

$$u_B(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( x_i - \sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i} . \quad (5.5)$$

Для неперервної вхідної величини  $X$  стандартна невизначеність (непевність) типу В обчислюється за формулою [1, 5]

$$u_B(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( x - \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \right)^2 p(x)dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx} . \quad (5.6)$$

Якщо для значення величини  $X_i$  можна оцінити верхню та нижню границю  $[\alpha_-; \alpha_+]$ , то стандартні невизначеності типу В, в припущенні про можливий вигляд закону розподілу, можна визначити за формулами [1 – 4]:

а) для трикутного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{24}} ; \quad (5.7)$$

б) для трапецеїдального закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{[\alpha_+ - \alpha_-] \sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{24}} , \quad (5.8)$$

де  $\beta$  – параметр, який визначається таким відношенням

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (5.9)$$

де  $\lambda_1 = \frac{(\alpha_{1+} - \alpha_{1-}) - (\alpha_{2+} - \alpha_{2-})}{2},$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2},$$

$$\alpha_+ = \alpha_{1+} + \alpha_{2+},$$

$$\alpha_- = \alpha_{1-} + \alpha_{2-}.$$

При зміні  $\beta$  від 0 до 1 трапецеїдальний розподіл змінюється від трикутного до рівномірного;

в) для експоненціального закону розподілу

$$u_B(X_i) = \sqrt{\frac{(\alpha_+ - x)(x - \alpha_-) - (\alpha_+ - 2x + \alpha_-)}{\lambda}}, \quad (5.10)$$

де  $x$  – очікуване значення;

$\lambda$  – параметр розподілу;

г) для арксинусного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{8}}; \quad (5.11)$$

д) для рівномірного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{12}}. \quad (5.12)$$

Для заданих інтервалів  $U_p$  з відомим рівнем довіри  $p$ , в припущенні нормального закону розподілу, невизначеність типу В визначається за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{U_p}{k_p}, \quad (5.13)$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу дорівнює 1,64; 1,96; 2,58 і 3 для довірчих рівнів 0,9; 0,95; 0,99 і 0,9973 [1 – 4, 7].

Отже, невизначеність типу В, що обумовлена наявністю невилучених залишків систематичної похибки коефіцієнта  $k$ , в припущенні про трикутний закон розподілу похибки, розрахуємо за формулою (5.7)

$$u_{Bb} = \frac{U_b}{\sqrt{24}} = \frac{0,15}{4,9} \approx 0,03.$$

Невизначеність типу В, що обумовлена наявністю невилучених залишків систематичної похибки коефіцієнта  $b$ , в припущенні про нормальний закон розподілу похибки, розраховуємо за формулою

$$u_{Bb} = \frac{U_b}{k_p} = \frac{0,25}{1,96} \approx 0,13.$$

Стандартна невизначеність оцінки вимірюваної величини  $Y$  і, отже, результату вимірювання, утворюється шляхом відповідного підсумовування стандартних невизначеностей вхідних оцінок  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Така стандартна невизначеність оцінки  $Y$  позначається як  $u_c(y)$  і називається комбінованою.

Кожну вхідну оцінку  $x_i$  і пов'язану з нею стандартну невизначеність  $u_c(x_i)$  одержують з розподілу можливих значень вхідної величини  $X_i$ . Цей розподіл вірогідності, як уже було сказано, може бути оснований на рядах спостережень  $X_{i,k}$  величин  $X_i$  або він може бути апіорним розподілом.

Результати вимірювань вважаються некорельованими, коли всі вхідні величини є незалежними.

Комбінована невизначеність  $u_c(y)$  є додатним квадратним коренем із комбінованої дисперсії  $u_c^2(y)$ , яка розраховується за формулою [1 – 5]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \quad (5.14)$$

де  $f$  – функціональна залежність між вимірюваною та вихідною величинами;

$u(x_i)$  – стандартна невизначеність, оцінена за типом А або за типом В, як було описано раніше.

Комбінована невизначеність  $u_c(y)$  є оціненим стандартним відхиленням і характеризує розкид значень, які можуть бути з достатньою підставою приписані вимірюваній величині  $Y$ .

Таким чином, комбіновану невизначеність типу В з урахуванням рівняння перетворення, що задається відповідно до варіанта, наприклад,  $Y = Xb^2 / (k^3 + \sqrt{X})$  розраховуємо за формулою (5.14)

$$u_{Bc} = \sqrt{\left( \frac{\partial Y}{\partial k} \right)^2 u_{Bk}^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial b} \right)^2 u_{Bb}^2} = \sqrt{\left( \frac{3Xb^2k^2}{(k^3 + \sqrt{X})^2} \right)^2 0,03^2 + \left( \frac{2bX}{k^3 + \sqrt{X}} \right)^2 0,13^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{0,0009 \left( \frac{20,41 \cdot 3,22^2 \cdot 5,5^2}{5,5^3 + \sqrt{20,41}} \right)^2 + 0,0196 \left( \frac{2 \cdot 3,22 \cdot 20,41}{5,5^3 + \sqrt{20,41}} \right)^2} = \\
&= \sqrt{30,51 + 0,28} = 5,548.
\end{aligned}$$

Комбіновану невизначеність результату вимірювання розрахуємо за формулою

$$u_c = \sqrt{(u_A(\bar{X}))^2 + u_{Bc}^2} = \sqrt{0,015^2 + 5,548^2} = 5,55.$$

Додаткова міра невизначеності, що відповідає інтервальній оцінці невизначеності, називається **розширеною невизначеністю** і позначається символом  $U$ . Розширену невизначеність одержують шляхом множення комбінованої невизначеності  $u_c(y)$  на коефіцієнт охоплення  $k$  [1 – 4, 7]

$$U = k \cdot u_c(y). \quad (5.15)$$

Результат вимірювання записується у вигляді  $Y = y \pm U$ ; це означає, що найкращою оцінкою значення, яка приписується величині  $Y$ , є  $y$ , і що інтервал від  $y - U$  до  $y + U$  містить велику частину розподілу значень, які можна з достатньою підставою приписати вимірюваній величині  $Y$ . Такий інтервал також можна подати у вигляді:  $y - U \leq Y \leq y + U$  [9, 10].

Терміни «довірчий інтервал» і «довірчий рівень» мають в статистиці спеціальні визначення і застосовуються до інтервалу, що визначається  $U$ , лише у тому випадку, коли виконані певні умови, враховуючи умову, що всі складові невизначеності, які входять до  $u_c(y)$ , були отримані з оцінювання за типом А. У теорії невизначеності, при розгляді розширеної невизначеності  $U$  як інтервалу в околі результату вимірювання, який містить велику частину розподілу вірогідності  $p$ , що характеризується результатом вимірювання і його комбінованою невизначеністю, ця вірогідність  $p$  є вірогідністю охоплення або довірчим рівнем для цього інтервалу [9, 10].

Значення коефіцієнта охоплення  $k$  вибирається на основі рівня довіри, що потрібен інтервалу від  $y - U$  до  $y + U$ . Як правило, коефіцієнт охоплення  $k$  знаходиться в діапазоні від 2 до 3. Проте в особливих випадках  $k$  може виходити за межі цього діапазону. Багатий досвід і повне знання способів застосування результату вимірювання може прискорити вибір потрібного значення коефіцієнта охоплення  $k$ .

В ідеальному випадку хотілося б мати можливість вибрати конкретне значення коефіцієнта охоплення  $k$ , що забезпечувало б інтервал  $Y = y \pm U = y \pm k u_c(y)$ , відповідало обраному рівню довіри, такому як 95 або 99%. Також для заданого значення  $k$  хотілося б мати можливість чітко зазначити

рівень довіри, пов'язаний із цим інтервалом. Проте це нелегко здійснити на практиці, оскільки це потребує повного знання розподілу ймовірностей, що характеризуються результатом вимірювання  $y$  і його комбінованою невизначеністю  $u_c(y)$ . Хоча ці параметри мають велику значимість, проте вони недостатні для того, щоб встановити інтервали, які мають точно відомі рівні довіри.

Якщо вимірювана величина  $Y$  є єдиною нормально розподіленою величиною  $X$ ,  $Y=X$ ; і якщо як оцінка  $X$  береться середнє арифметичне  $\bar{X}$  від  $n$  незалежних спостережень  $X_k$  величини з експериментальним стандартним відхиленням середнього  $s(\bar{X})$ , то найкращою оцінкою  $Y$  є  $y = \bar{X}$  і експериментальним стандартним відхиленням цієї оцінки є  $u_c(y) = s(\bar{X})$ , то розширена невизначеність  $U$ , яка визначає інтервал від  $y-U$  до  $y+U$ , що зручно записувати як  $Y=y \pm U$ , дорівнюватиме

$$U = k \cdot u_c(y) = t_p(v) \cdot u_c(y), \quad (5.16)$$

де  $t_p(v)$  – коефіцієнт з розподілу Стюдента для ймовірності охоплення  $p$  і числа ступенів вільності  $v = n-1$  [10 – 14].

Число ступенів вільності  $v$  дорівнює  $n-1$  для єдиної величини, оціненої середнім арифметичним із  $n$  незалежних спостережень.

У міру того, як  $v \rightarrow \infty$ ,  $t$ -розподіл наближається до нормального і наближені значення коефіцієнта Стюдента можна розрахувати за формулою

$$t_p(v) \approx k (1+2/v)^{1/2}, \quad (5.17)$$

де  $k$  – коефіцієнт охоплення, необхідний для одержання інтервалу з рівнем довіри  $p$  для нормально розподілу.

Для того, щоб одержати точніше наближення для оцінки розширеної невизначеності, необхідно скористатися  $t$ -розподілом. Але в загальному випадку  $t$ -розподіл не буде описувати  $(y-Y)/u_c(y)$ , якщо  $u_c^2(y)$  є сумою двох або більше оцінених компонентів дисперсії  $u_i(y) = c_i^2 \cdot u^2(x_i)$ , навіть якщо кожне  $x_i$  – оцінка нормально розподіленої вхідної величини  $X_i$ . Проте розподіл цієї змінної може бути апроксимований  $t$ -розподілом при числі ефективних ступенів вільності  $v_{\text{eff}}$ , отриманому з формули Велча-Саттерсвейта [14]

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}. \quad (5.18)$$

Розширену невизначеність вимірювання при довірчій ймовірності  $P=0,95$  розрахуємо за формулою (5.16) з урахуванням формули (5.18), відповідно до якої ефективне число ступенів вільності становитиме

$$v_{\text{eff}} = (n-1) \frac{u_c^4}{u_A^4} = 8 \frac{5,55^4}{0,015^4} = 149932880000.$$

Оскільки  $v_{\text{eff}} \gg 30$ , то коефіцієнт охоплення  $k_p(v_{\text{eff}})$  при ймовірності 0,95 береться 1,96. Враховуючи це, розширена невизначеність результату вимірювання буде дорівнювати

$$U = k_p(v_{\text{eff}}) u_c = 1,96 \cdot 5,55 = 10,88.$$

Отже, результат вимірювання подамо у вигляді  $Y = Xb^2 / (k^3 + \sqrt{X})$

$$\bar{Y} = \frac{\bar{X}b^2}{k^3 + \sqrt{\bar{X}}} = \frac{20,41 \cdot 3,22^2}{5,5^3 + \sqrt{20,41}} = 1,24;$$

$$Y = 1,24 \pm 10,88, \text{ за } p=0,95.$$

## 5.2 Приклад розв'язування завдання 2

При зіставленні результатів вимірювань і оцінок їх достовірностей, які здійснювались різними способами, виникає задача перерахунку характеристик похибок в характеристики невизначеності та навпаки. Тому розглянемо методику перерахунку і мінімальний набір параметрів, що необхідні для здійснення такого перерахунку.

Вихідними даними для перерахунку характеристик похибки в характеристики невизначеності є: довірчі межі загальної похибки вимірювання  $\Delta_p$ ; довірча ймовірність  $P$ ; відношення  $\gamma = \Theta(p)/S_\Sigma$  довірчих меж невилученої систематичної похибки  $\Theta(p)$  до середньоквадратичної випадкової похибки  $S_\Sigma$ ; кількість повторюваних вимірювань  $n$ ; кількість невилучених підсумовуваних систематичних похибок  $m$  [1, 4].

Для перерахунку довірчих меж похибки прямих одноразових вимірювань, відомих із ймовірністю 0,95 або 0,99 у розширену невизначеність з рівнем довіри 0,95 необхідно скористатися такими виразами [4, 8]:

- для похибки із ймовірністю  $P=0,95$ :

$$U_{0,95} = \begin{cases} \Delta_{0,95} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } \gamma < 0,8, \\ \frac{2\Delta_{0,95}}{K[\gamma+2]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ 2\Delta_{0,95} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3,63}}, & \text{при } \gamma > 8, \end{cases} \quad (5.19)$$

- для похибки із ймовірністю  $P=0,99$  [14]:

$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,99}}{1,3} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}}, & \text{при } \gamma < 0,8, \\ \frac{2\Delta_{0,99}}{K[\gamma+2,6]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \frac{2\Delta_{0,99}}{d} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3d^2}}, & \text{при } \gamma > 8, \end{cases} \quad (5.20)$$

де  $d$  – корегувальний коефіцієнт, який для  $P=0,99$  дорівнює 1,2 при  $m=2$ ; 1,3 – при  $m=3$ ; 1,4 – при  $m=4$ ; 1,45 – при  $m>4$ ;

$K$  – коефіцієнт, значення якого для  $P$  і  $\gamma$  наведено в табл. 1 [4].

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнта  $K$  для різних  $P$  і  $\gamma$

| $\gamma$   | 0,8  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $K_{0,95}$ | 0,76 | 0,74 | 0,71 | 0,73 | 0,76 | 0,78 | 0,79 | 0,80 | 0,81 |
| $K_{0,99}$ | 0,84 | 0,82 | 0,80 | 0,81 | 0,82 | 0,83 | 0,83 | 0,84 | 0,85 |

При перерахунку довірчих меж похибки прямих багаторазових вимірювань, відомих з вірогідністю 0,95 або 0,99; у розширену невизначеність з рівнем довіри 0,95 необхідно використати такі формули [4, 8]:

- для похибки із ймовірністю  $P=0,95$ :

$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{t_{0,95}(n-1)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } \gamma < 0,8, \\ \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{K[\gamma + t_{0,95}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}}) \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3,63}}, & \text{при } \gamma > 8, \end{cases} \quad (5.21)$$

- для похибки із ймовірністю  $P=0,99$  [14]:



$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,99} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{t_{0,99}(n-1)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}}, & \text{при } \gamma < 0,8, \\ \frac{\Delta_{0,99} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{K[\gamma + t_{0,99}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \Delta_{0,99} t_{0,95}(v_{\text{eff}}) \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{5,88}}, & \text{при } \gamma > 8, \end{cases} \quad (5.22)$$

де  $t_{0,95}(v_{\text{eff}}), t_p(n-1)$  – коефіцієнти Стюдента відповідно для ймовірності  $p$ , кількості ступенів вільності  $(n-1)$  і ефективної кількості ступенів вільності  $v_{\text{eff}}$ , яка визначається за формулою [1, 4, 8]

$$v_{\text{eff}} = (n-1) \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{3d^2} \right]^2. \quad (5.23)$$

Відповідно до міжнародних нормативних документів при поданні результату вимірювання як міра невизначеності може бути вказана розширена або комбінована стандартна невизначеність.

При поданні результату вимірювання розширеною невизначеністю вказуються такі характеристики:

- результат вимірювання  $u$ ;
- розширена невизначеність  $U_p$ ;
- коефіцієнт охоплення  $k$ ;
- рівень довіри  $p$ ;
- кількість стандартних невизначеностей типу В (для  $p=0,99$ ) [4].

Додатково до перерахованих характеристик для розрахунку похибок багаторазових вимірювань потрібно знати:

- кількість спостережень  $n$ ;
- ефективну кількість ступенів вільності  $v_{\text{eff}}$ .

При цьому можна отримати [1, 4]:

- оцінку середньоквадратичного відхилення, що характеризує сумарну похибку

$$S_{\Sigma} = \frac{U_p}{k} = u_s; \quad (5.24)$$

- оцінку середньоквадратичного відхилення (СКВ) випадкової похибки

$$S = u_A = S_{\Sigma} \sqrt[4]{\frac{n-1}{v_{\text{eff}}}}; \quad (5.25)$$

- оцінку СКВ, що характеризує невилучену систематичну похибку

$$S_{\Theta} = u_B = \sqrt{S_{\Sigma}^2 - S^2}; \quad (5.26)$$

- оцінку довірчих меж невилученої систематичної похибки

$$\Theta(P) = kS_{\Theta} \sqrt{3}; \quad (5.27)$$

- оцінку довірчих меж похибки

$$\Delta_P = \frac{t_p(n-1)S + \Theta(P)}{S + S_{\Theta}} S_{\Sigma}. \quad (5.28)$$

За відсутності ефективної кількості ступенів вільності її можна отримати через значення коефіцієнта охоплення  $k$  з таблиці розподілу Стьюдента.

Розглянемо варіант, в якому значення  $\gamma = 3$ , тобто знаходиться в межах від 0,8 до 8, а значення  $\Delta_{0,95} = 32,7$  і  $\Delta_{0,99} = 28,1$ , тоді на основі другого рівняння системи рівнянь (19) та (20) виконаємо перерахунок характеристик похибок одноразових вимірювань з ймовірностями 0,95 та 0,99 у характеристики невизначеності за виразами:

- для похибки з ймовірністю 0,95 та коефіцієнта  $K$ , взятого з табл. 5.1 відповідно до варіанта

$$U_{0,95} = \frac{2\Delta_{0,95}}{K[\gamma+2]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}} = \frac{2 \cdot 32,7}{0,73[3+2]} \sqrt{1 + \frac{3^2}{3,63}} = 32,2;$$

- для похибки з ймовірністю 0,99 та коефіцієнта  $K$ , взятого з табл. 5.1 відповідно до варіанта

$$U_{0,95} = \frac{2\Delta_{0,99}}{K[\gamma+2,6]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}} = \frac{2 \cdot 28,1}{0,81[3+2,6]} \sqrt{1 + \frac{3^2}{3 \cdot 1,4^2}} = 19,71.$$

Враховуючи те, що  $\gamma = 3$ , тобто знаходиться в межах від 0,8 до 8, на основі другого рівняння системи рівнянь (5.21) та (5.22) виконаємо перерахунок характеристик похибок багаторазових вимірювань з ймовірностями 0,95 та 0,99 у характеристики невизначеності за виразами:

- для похибки з ймовірністю 0,95 та коефіцієнта  $K$ , взятого з табл. 5.1 відповідно до варіанта

$$U_{0,95} = \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{\text{eff}})}{K[\gamma + t_{0,95}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}} = \frac{32,7 \cdot 1,96}{0,73[3+2,1]} \sqrt{1 + \frac{3^2}{3,63}} = 19,77,$$

$$\text{де } v_{\text{eff}} = (n-1) \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{3d^2} \right]^2 = (19-1) \left( 1 + \frac{3^2}{3 \cdot 1,4^2} \right)^2 = 115, \quad t_{0,95}(115) = 1,96;$$

- для похибки з ймовірністю 0,99 та коефіцієнта К, взятого з табл. 5.1 відповідно до варіанта

$$U_{0,95} = \frac{\Delta_{0,99} t_{0,99}(v_{\text{eff}})}{K [\gamma + t_{0,99}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}} = \frac{28,1 \cdot 1,96}{0,81 [3 + 2,1]} \sqrt{1 + \frac{3^2}{5,88}} = 21,21.$$

Отже, при перерахунку довірчих меж характеристик похибок при різних ймовірностях  $\Delta_{0,95} = 32,7$  та  $\Delta_{0,99} = 28,1$  отримано такі значення характеристик розширених невизначеностей:

- для одноразових вимірювань  $U_{0,95} = 32,2$  для ймовірності 0,95 та  $U_{0,99} = 19,71$  для ймовірності 0,99;
- для багаторазових вимірювань  $U_{0,95} = 19,77$  для ймовірності 0,95 та  $U_{0,99} = 21,21$  для ймовірності 0,99.

### 5.3 Приклад розв'язування завдання 3

Прямі одноразові вимірювання виконують один раз, і значення фізичної величини визначають за показами ЗВТ, призначеного для вимірювання цієї величини. Однак в деяких випадках прямі одноразові вимірювання повторюють декілька разів. Надлишкові вимірювання виконують для захисту від збоїв апаратури, анормальних результатів тощо, а кінцевий результат визначають за одним вимірюванням, яке вибирають з ряду проведених вимірювань. Оцінкою значення вимірюваної величини  $Y$  є безпосередньо показ ЗВТ. Тому опрацювання даних у цьому випадку полягає в аналізі складових невизначеностей вимірювання, вилученні систематичних складових невизначеностей, оціненні невилучених залишків систематичних складових невизначеностей та підсумовуванні складових невизначеностей.

Таким чином, для оцінення результату прямого вимірювання з одноразовим спостереженням використовують способи оцінювання невизначеностей типу В. Підсумовують усі складові невизначеності, що оцінені за типом В та визначають комбіновану невизначеність. У випадках коли потрібно подати інтервальну оцінку невизначеності додатково визначають розширену навизначеність.

Розглянемо приклад розв'язання завдання 3, нехай проведено вимірювання за допомогою вольтметра, що має верхню межу вимірювання  $V_k = 1000$  В і клас точності 0,1/0,01. В результаті вимірювання отримано показ вольтметра  $V = 500,2$  В. Вимірювання здійснено при температурі нав-колишнього середовища та дії магнітного поля напруженістю  $H =$

400 А/м. Відомо, що температурна похибка не перевищує основну на кожних 10 °С відхилення температури від нормальних умов 20 °С, а магнітна похибка становить половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього поля до 400 А/м. Необхідно оцінити невизначеність результату вимірювання напруги [1, 3].

Невизначеність результату вимірювання складається з основної інструментальної невизначеності, яка визначається за класом точності вольтметра, та додаткових невизначеностей, зумовлених відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної та наявністю зовнішнього магнітного поля.

1. Оскільки клас точності приладу нормовано параметрами  $c$  (сума приведеної адитивної та відносної мультиплікативної похибок) та  $d$  (приведена адитивна похибка), а саме 0,1/0,01, то формула для розрахунку класу точності має вигляд

$$\gamma = \pm \left[ c + d \left( \frac{V_k}{V} - 1 \right) \right] = \pm \left[ 0,1 + 0,01 \left( \frac{1000}{500,2} - 1 \right) \right] = \pm 0,11.$$

Основна інструментальна невизначеність вимірювання напруги (невизначеність типу В) в цьому випадку розраховується за формулою

$$u_B = \frac{\gamma U_H}{100\% \sqrt{12}},$$

$$u_{ЗВТ} = \frac{V \gamma}{100\% \sqrt{3}} = 500,2 \frac{0,11}{1,73 \times 100} \gg 0,32 \text{ В.}$$

2. Оскільки нормальна температура навколишнього середовища складає 20 °С, а значення температури навколишнього середовища при якому проводилось вимірювання складало  $t = 26$  °С, то додаткова невизначеність, що зумовлена відхиленням температури, буде дорівнювати

$$u_t = \frac{26 - 20}{10} u_{ЗВТ} = 0,6 u_{ЗВТ} \approx 0,19 \text{ В.}$$

3. Додаткова невизначеність, що зумовлена впливом напруженості зовнішнього магнітного поля  $H=400$  А/м, буде дорівнювати

$$u_H = \frac{1}{2} u_{ЗВТ} = 0,16 \text{ В.}$$

4. Комбінована невизначеність вимірювання напруги буде дорівнювати

$$u_c = \sqrt{u_{звт}^2 + u_t^2 + u_H^2} = 0,41 \text{ В.}$$

Задавшись довірчим рівнем  $p = 0,95$  (з урахуванням припущення про нормальний закон розподілу результату вимірювання  $k_p = 1,96$ ), знаходимо розширену невизначеність

$$U = k_p u_c = 1,96 \cdot 0,41 = 0,8 \text{ В.}$$

Отже, запишемо результат вимірювання у вигляді

$$V = 500,2 \pm 0,8 \text{ В, при } p = 0,95$$

або

$$499,4 \leq 500,2 \leq 501 \text{ В, } p = 0,95.$$

Отже, при оцінюванні результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням можуть траплятися різні випадки, що залежать від кількості складових невизначеностей. Це може бути лише одна основна невизначеність або декілька складових невизначеностей. Невилучені складові стандартних невизначеностей, що залишаються після введення поправок, підсумовуються.

#### 5.4 Приклад розв'язування завдання 4

Сукупні та сумісні вимірювання двох або більше різнорідних величин виконують для того, щоб знайти залежність між ними. Вони основані на відомих рівняннях, що відображають зв'язки між властивостями об'єктів.

При сумісних вимірюваннях невідомі величини, що підлягають безпосередньому вимірюванню, визначаються за результатами вимірювання інших величин, які функціонально пов'язані з ними

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m, A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, Z_1, Z_2, \dots, Z_m). \quad (5.29)$$

На практиці, як правило, визначають залежність  $Y$  від одного аргумента, наприклад, вимірюється параметр  $X$ :  $Y = f(X)$ .

Найбільшого поширення при опрацюванні сумісних вимірювань набув метод найменших квадратів (МНК). Суть його полягає в такому.

При проведенні  $n$  вимірювань величини  $x_k$  і подальшому підставленні її в залежність (5.29) отримуємо систему з  $n$  рівняннями

$$Y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_m, A_1, A_2, A_3, \dots, A_m). \quad (5.30)$$

В цю систему вимірювані величини входять з похибками. Припустимо, що отримано систему лінійних рівнянь  $a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k = 0$ , де  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , а  $x_1, x_2, x_3$  – невідомі сумісно вимірювані величини. Оскільки під час вимірювань завжди існують похибки, то праві частини лінійних рівнянь не будуть дорівнювати нулю. Якщо до правої частини додати деякий доданок  $\delta_k$ , який називають нев’язкою (кінцевою похибкою умовних рівнянь), то отримаємо таку систему лінійних рівнянь

$$\delta_k = a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k. \quad (5.31)$$

Задача зводиться до визначення таких значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які б при підставленні їх в систему з  $n$  умовних рівнянь [1, 14]

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 - y_1 &= \delta_1; \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 - y_2 &= \delta_2; \\ &\dots\dots\dots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 - y_n &= \delta_n, \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

забезпечували мінімальне значення суми квадратів відхилень (нев’язок) експериментальних значень від розрахункових, тобто

$$\sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k)^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2 = Q = \min. \quad (5.33)$$

Під час вимірювань з однаковою ймовірністю необхідною умовою мінімуму суми (5.33) є рівність нулю частинних похідних функцій (5.34)

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_m} = 0. \quad (5.34)$$

Умови мінімуму відповідно до принципу Лежандра для системи рівнянь мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k) a_k = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k) b_k = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial x_3} &= 2 \sum_{k=1}^n (a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 - y_k) c_k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

В результаті із сукупності рівнянь, отриманих з умови мінімуму, маємо систему з  $m$  рівнянь, які називаються нормальними і коефіцієнти яких залежать від коефіцієнтів усіх  $n$  умовних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} [aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 - [ay] &= 0; \\ [ab]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 - [by] &= 0; \\ [ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 - [cy] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

де

$$\left. \begin{aligned} [aa] &= a_1a_1 + a_2a_2 + \dots + a_na_n; \\ [ab] &= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n; \\ [ac] &= a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Знаючи значення постійних коефіцієнтів нормальної системи рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих  $m$ , можна відомими способами розв'язання лінійних рівнянь визначити результати сумісних вимірювань, які будуть максимально наближені до своїх дійсних значень.

Для розв'язання системи лінійних нормальних рівнянь, як правило, використовують такі три способи: визначників, послідовного виключення невідомих (спосіб Гаусса) і матричний. За кількості нормальних рівнянь менше чотирьох середні значення сумісно вимірюваних величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , як правило, розраховують за допомогою визначників:

$$\bar{x}_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \quad \bar{x}_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \quad \dots, \quad \bar{x}_m = \frac{D_{xm}}{D}, \quad (5.38)$$

де головний визначник  $D$  при  $m = 3$  дорівнює

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}, \quad (5.39)$$

а визначники  $D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}$  розраховуються з головного визначника  $D$  шляхом заміни стовпця з коефіцієнтами при невідомому  $x_m$  на стовпець з вільними членами:

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} [ay] & [ab] & [ac] \\ [by] & [bb] & [bc] \\ [cy] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}; \quad (5.40)$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} [aa] & [ay] & [ac] \\ [ba] & [by] & [bc] \\ [ca] & [cy] & [cc] \end{vmatrix}; \quad (5.41)$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ay] \\ [ba] & [bb] & [by] \\ [ca] & [cb] & [cy] \end{vmatrix}. \quad (5.42)$$

Невизначеність величин  $\bar{x}_m$ , знайдених як результат сумісних вимірювань, виражається такими формулами [1, 4, 14]:

$$u(\bar{x}_1) = \sqrt{\frac{A_{11} \sum_{k=1}^n \delta_k^2}{D (n-m)}}; \quad (5.43)$$

$$u(\bar{x}_2) = \sqrt{\frac{A_{22} \sum_{k=1}^n \delta_k^2}{D (n-m)}}; \quad (5.44)$$

$$u(\bar{x}_3) = \sqrt{\frac{A_{33} \sum_{k=1}^n \delta_k^2}{D (n-m)}}; \quad (5.45)$$

де  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{33}$  – алгебраїчні доповнення (ад'юнкти) елементів діагоналі головного визначника  $D$ , які отримуються шляхом викреслення з матриці визначника  $n$ -го стовпця і  $m$ -го рядка, відповідних вимірюваній величині, що оцінюється, з наступним домноженням на  $(-1)^{k+1}$ . Тобто, для розрахунку ад'юнкта  $A_{11}$ , викреслюється перший стовпець та перший рядок і розв'язується такий визначник

$$A_{11} = \begin{vmatrix} [bb] & [bc] \\ [cb] & [cc] \end{vmatrix}.$$

Для визначення ад'юнкта  $A_{22}$ , викреслюється другий стовпець та другий рядок і розв'язується визначник

$$A_{22} = \begin{vmatrix} [aa] & [ac] \\ [ca] & [cc] \end{vmatrix}.$$



Для визначення ад'юнкта  $A_{33}$ , викреслюється третій стовпець та третій рядок і розв'язується визначник

$$A_{33} = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ba] & [bb] \end{vmatrix}.$$

Розширена невизначеність знаходження величин сумісних вимірювань  $\bar{x}_m$  обчислюється за формулою [12–15]

$$U(\bar{x}_m) = k_p u(\bar{x}_m), \quad (5.46)$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення, який знаходиться з розподілу Стюдента з числом ступенів вільності  $n - m$  і заданим довірчим рівнем  $p$ .

При збільшенні числа  $m$  об'єм виконаної роботи швидко зростає, і тому, на практиці, зазвичай, обмежуються поліномом не вище 3-го ступеня.

При обґрунтуванні МНК в математичній статистиці передбачається, що результати вимірювань задовольняють такі умови:

- значення аргументів відомі точно;
- результати вимірювань містять лише випадкові похибки, які незалежні, мають нульове середнє значення і однакові дисперсії;
- похибки вимірюваних величин розподілені за нормальним законом.

За таких умов МНК дає незміщені оцінки невідомих величин, що розраховуються. Але на практиці перераховані умови виконуються не завжди, оскільки крім випадкових складових похибок можуть бути і невиключені систематичні складові невизначеностей.

Довірчі межі для істинних значень вимірюваних величин визначають за розподілом Стюдента при числі ступенів вільності  $n-m$  або за нормальним розподілом, якщо результати вимірювань можна вважати нормальними.

Розглянемо випадок, в якому маємо таку систему рівнянь сукупних вимірювань

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = y_1, \\ A_{21}0 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}0 = y_2, \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}0 + A_{34}0 = y_3, \\ A_{41}0 + A_{42}0 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4 = y_4, \\ A_{51}x_1 + A_{52}x_2 + A_{53}x_3 + A_{54}0 = y_5, \\ A_{61}x_1 + A_{62}0 + A_{63}x_3 + A_{64}x_4 = y_6, \\ A_{71}0 + A_{72}x_2 + A_{73}x_3 + A_{74}x_4 = y_7, \\ A_{81}0 + A_{82}x_2 + A_{83}0 + A_{84}x_4 = y_8, \\ A_{91}x_1 + A_{92}0 + A_{93}x_3 + A_{94}0 = y_9. \end{cases}$$

Для наочності розв'язання цього завдання використаємо значення для 32-го варіанта з табл. Д.1 додатка Д.

Відповідно до рекомендованої вище методики складемо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3 + B_{14}x_4 = c_1; \\ B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + B_{23}x_3 + B_{24}x_4 = c_2; \\ B_{31}x_1 + B_{32}x_2 + B_{33}x_3 + B_{34}x_4 = c_3; \\ B_{41}x_1 + B_{42}x_2 + B_{43}x_3 + B_{44}x_4 = c_4; \end{cases}$$

де коефіцієнти

$$B_{11} = \sum_{j=1}^9 A_{j1}^2 = 5,$$

$$B_{22} = \sum_{j=1}^9 A_{j2}^2 = 6,$$

$$B_{33} = \sum_{j=1}^9 A_{j3}^2 = 7,$$

$$B_{44} = \sum_{j=1}^9 A_{j4}^2 = 5,$$

$$B_{12} = B_{21} = \sum_{j=1}^9 A_{j1} \cdot A_{j2} = 3,$$

$$B_{13} = B_{31} = \sum_{j=1}^9 A_{j1} \cdot A_{j3} = 4,$$

$$B_{14} = B_{41} = \sum_{j=1}^9 A_{j1} \cdot A_{j4} = 2,$$

$$B_{24} = B_{42} = \sum_{j=1}^9 A_{j4} \cdot A_{j2} = 3,$$

$$B_{23} = B_{32} = \sum_{j=1}^9 A_{j3} \cdot A_{j2} = 4,$$

$$B_{34} = B_{43} = \sum_{j=1}^9 A_{j3} \cdot A_{j4} = 4,$$

$$c_1 = \sum_{j=1}^9 A_{j1} y_j = 14,13+7,17+10,13+12,26+8,15=51,84,$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^9 A_{j2} y_j = 14,13+5,14+7,17+10,13+12,19+6,17 = 54,93,$$

$$c_3 = \sum_{j=1}^9 A_{j3} y_j = 14,13+5,14+7,15+10,13+12,26+12,19+8,15 = 69,15,$$

$$c_4 = \sum_{j=1}^9 A_{j4} y_j = 14,13+7,15+12,26+6,17+12,19 = 51,9.$$

З врахуванням значення цих коефіцієнтів система нормальних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 51,84; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 54,93; \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 69,15; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 51,9. \end{cases}$$

Головний визначник цієї системи визначається за виразом (5.39) –  $D = 168$ .

Оцінювання вимірюваних величин здійснюється за виразами:

$$\bar{x}_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad \bar{x}_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad \dots, \quad \bar{x}_m = \frac{D_{x_m}}{D},$$

Визначники  $D_{x_1}$ ,  $D_{x_2}$ ,  $D_{x_3}$ ,  $D_{x_4}$  визначаються з головного визначника  $D$  шляхом заміни стовпця з коефіцієнтами при невідомому  $x_m$  на стовпець з вільними членами  $s_j$  аналогічно виразам (5.40) – (5.42). Підставляючи відповідні значення у вищенаведену систему рівнянь, отримаємо:

$$D_{x_1} = 730,83; \quad D_{x_2} = 415,53; \quad D_{x_3} = 585; \quad D_{x_4} = 734,19.$$

Найімовірніші значення невідомих дорівнюють:

$$x_1 = 730,83/168 = 4,35;$$

$$x_2 = 415,53/168 = 2,47;$$

$$x_3 = 585/168 = 3,48;$$

$$x_4 = 734,19/168 = 4,37.$$

Підставляємо значення найімовірніших значень до умовних рівнянь:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,35 + 2,47 + 3,48 + 4,37 = 14,67;$$

$$x_2 + x_3 = 2,47 + 3,48 = 5,95;$$

$$x_1 + x_2 = 4,35 + 4,37 = 8,72;$$

$$x_3 + x_4 = 3,48 + 4,37 = 7,85;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,35 + 2,47 + 3,48 = 10,3;$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 4,35 + 3,48 + 4,37 = 12,2;$$

$$x_2 + x_4 + x_3 = 2,47 + 4,37 + 3,48 = 10,32;$$

$$x_2 + x_4 = 2,47 + 4,37 = 6,84;$$

$$x_3 + x_1 = 3,48 + 4,35 = 7,83.$$

Знаходимо нев'язки

$$v_1 = 14,13 - 14,67 = -0,54;$$

$$v_2 = 5,14 - 5,95 = -0,81;$$

$$v_3 = 7,17 - 8,72 = -1,55;$$

$$v_4 = 7,15 - 7,85 = -0,7;$$

$$v_5 = 10,13 - 10,3 = -0,17;$$

$$v_6 = 12,26 - 12,2 = 0,06;$$

$$v_7 = 12,19 - 10,32 = 1,87;$$

$$v_8 = 6,17 - 6,84 = -0,67;$$

$$v_9 = 8,15 - 7,83 = 0,32.$$

Розраховуємо невизначеності вимірюваних величин за виразом

$$u_{x_1} = \sqrt{\frac{S_{11}}{D} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m v_j^2}{m-n}},$$

і аналогічно для інших вимірюваних значень знаходимо невизначеності  $u_{x_2}$ ,  $u_{x_3}$ ,  $u_{x_4}$ . Але перед цим потрібно розрахувати значення ад'юнктів

$$S_{11}=67, S_{22}=51, S_{33} = 72, S_{44} = 67.$$

Таким чином, отримаємо значення невизначеностей сукупних вимірювань

$$u_{x_1} = 0,79;$$

$$u_{x_2} = 0,69;$$

$$u_{x_3} = 0,82;$$

$$u_{x_4} = 0,79.$$

Для  $m-n=5$  та ймовірності  $P=0,95$  коефіцієнт Стьюдента дорівнює  $t_p = 2,57$ . Враховуючи це, значення розширених невизначеностей сукупних вимірювань становлять:

$$U_1 = \pm 2,57 \cdot 0,79 = \pm 2,03;$$

$$U_2 = \pm 2,57 \cdot 0,69 = \pm 1,77;$$

$$U_3 = \pm 2,57 \cdot 0,82 = \pm 2,11;$$

$$U_4 = \pm 2,57 \cdot 0,79 = \pm 2,03.$$

Отже, результати сукупного вимірювання запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4,35 \pm 2,03, P = 0,95; \\
 x_2 &= 2,47 \pm 1,77, P = 0,95; \\
 x_3 &= 3,48 \pm 2,11, P = 0,95; \\
 x_4 &= 4,37 \pm 2,03, P = 0,95.
 \end{aligned}$$

## 5.5 Приклад розв'язування завдання 5

При складанні звіту щодо результатів динамічних вимірювань необхідно подати кількісне значення якості експерименту так, щоб можна було правильно оцінити його надійність [1, 15 – 24]. Без такого значення результати динамічних вимірювань не можна порівняти ні між собою, ні з аналогічними результатами, виконаними провідними лабораторіями світу. Під час виконання динамічних вимірювань фізичних величин завжди виникає перехідний режим роботи засобів вимірювання, при якому сигнал на його виході суттєво змінюється в часі [15, 17]. Ця обставина пояснюється інерційними властивостями засобів вимірювання, оскільки вони складаються, в загальному випадку, з набору різних мас і пружин, ємностей і індуктивностей або інших інерційних елементів, які зумовлюють появу невизначеностей в динамічних режимах роботи [1, 15, 24]. Крім того, в цифрових засобах вимірювання спостерігається запізнення сигналу, обумовлене кінцевим часом його перетворення на цифровий код. Це призводить до того, що рівняння перетворення засобів вимірювання, яке відображає його статику, в динамічному режимі є неприйнятним. В такому випадку переходять до диференціальних рівнянь, які описують динамічний взаємозв'язок вихідної  $y(t)$  і вхідної  $x(t)$  величин засобів вимірювання. При складанні диференціальних рівнянь у праву частину записують вхідні сигнали, тобто причину, що привела засоби вимірювання у дію, а в ліву частину диференціального рівняння – вихідний сигнал (реакцію засобу вимірювання) [23, 24]

$$\sum_{i=0}^n a_i y^i(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^k(t), \quad (5.47)$$

де  $x(t)$ ,  $y(t)$  – відповідно вхідна та вихідна величини;

$i$ ,  $k$  – порядок похідних;

$a$ ,  $b$  – коефіцієнти, що характеризують властивості засобу вимірювання.

Для подання диференціального рівняння в частотній області, символ диференціювання за координатою часу  $\frac{d}{dt}$  замінимо на  $j\omega$ , і тоді рівняння

(5.47) набуває вигляду

$$\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = S_0 \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + 1}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + 1}$$

або

$$y(j\omega) = S(j\omega)x(j\omega), \quad (5.48)$$

де  $y(j\omega)$ ,  $x(j\omega)$  – відповідно спектральні функції вихідного та вхідного вимірюваного сигналу;

$S_0 = b_0/a_0$  – статична чутливість, тобто чутливість до постійної вхідної величини (при  $j\omega=0$ );

$S(j\omega)$  – передатна функція засобу вимірювання або операторна чутливість.

Найхарактернішими для засобів вимірювання є динамічні характеристики, які описуються диференціальними рівняннями першого і другого порядків, а в окремих випадках – третього та вищих порядків [1, 24].

Інформація про динамічні характеристики має міститися в нормативно-технічних документах на засоби вимірювання, якщо ж така інформація відсутня, то її можна отримати на основі апріорних даних про засоби вимірювання.

Динамічною невизначеністю вимірювань називається складова невизначеності вимірювання, яка обумовлена реакцією засобу вимірювання на частоту (швидкість) вимірювання вхідної величини (вхідного сигналу), що залежить від динамічних властивостей засобу вимірювання і частотного спектра вхідного сигналу [1, 24].

Якщо рівняння перетворення засобу вимірювання, що працює в динамічному режимі, можна подати у вигляді

$$Y = K_C X, \quad (5.49)$$

де  $X$  – значення фізичної величини, що вимірюється (вхідний сигнал);

$K_C$  – коефіцієнт перетворення засобу вимірювальної техніки (ЗВТ);

$Y$  – результат вимірювання (вихідний сигнал),

то математичне сподівання вхідного сигналу буде дорівнювати  $M[X]$ , а математичне сподівання вихідного сигналу буде дорівнювати

$$M[Y] = K_C M[X], \quad (5.50)$$

де  $M[Y]$  і  $M[X]$  – відповідно математичні сподівання вихідного і вхідного сигналів ЗВТ.

Спектральна щільність вхідного сигналу  $X(t)$  має вигляд [24]

$$H_X(\omega) = \lim(2T)^{-1} |X(j\omega)|^2 \text{ при } T \rightarrow \infty, \quad (5.51)$$

де  $X(j\omega)$  – зображення Фур'є, що отримується шляхом заміни в операторному зображенні сигналу  $X(s)$  значення  $s$  на  $j\omega$ ;

$T$  – час спостереження;

$\omega = 2\pi f$ .

Вираз для спектральної щільності вихідного сигналу може бути записаний таким чином

$$H_Y(\omega) = \lim(2T)^{-1} |Y(j\omega)|^2 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (5.52)$$

Відношення зображень вихідної і вхідної величин утворює вираз для передатної функції ЗВТ [24]

$$K_C(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m B_k s^k}{\sum_{q=0}^n A_q s^q}, \quad (5.53)$$

де  $Y(s)$ ,  $X(s)$  – операторні зображення вихідного  $Y(t)$  і вхідного  $X(t)$  сигналів, відповідно;

$k$ ,  $q$  – порядок похідних від  $Y$  і  $X$ , відповідно;

$A_q$ ,  $B_k$  – коефіцієнти диференціального рівняння.

Таким чином можна записати, що [24]

$$H_Y(\omega) = |K_C(j\omega)|^2 H_X(\omega), \quad (5.54)$$

де  $K_C(j\omega)$  – частотна характеристика ЗВТ.

Непевність (невизначеність) вихідного сигналу при динамічних вимірюваннях можна оцінити як квадратний корінь з інтеграла від спектральної щільності вихідного сигналу на всіх частотах [23, 24]

$$u_D(\omega) = \pi^{-1/2} \left( \int_0^{\pi F_s} |K_C(j\omega)|^2 H_X(\omega) d\omega \right)^{1/2} = \pi^{-1/2} \left( (2T)^{-1} \int_0^{\pi F_s} |K_C(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}, \quad (5.55)$$

де  $|K_C(j\omega)|$  – модуль частотної характеристики ЗВТ, що можна використати як математичну модель ЗВТ під час динамічних вимірювань для оцінювання динамічної непевності;

$F_s$  – частота дискретизації.

Модуль частотної характеристики ЗВТ визначається за формулою

$$|K_c(j\omega)| = (a^2(\omega) + b^2(\omega))^{1/2}, \quad (5.56)$$

де  $a(\omega)$ ,  $b(\omega)$  – дійсна і уявна частини частотної характеристики ЗВТ  $K_c(j\omega)$ , відповідно [23, 24].

Спектральна функція вхідного сигналу  $X(j\omega)$  пов'язана зі своєю часовою функцією  $X(t)$  виразом Лапласа

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} X(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (5.57)$$

де  $\omega$  – циклічна частота.

При скінченному інтервалі часу знак нескінченності може бути замінений на сумарний час спостереження  $T$  [23].

Для подання непевності динамічних вимірювань в часовій області  $u_D(t)$  необхідно виконати зворотну трансформацію Фур'є за виразом

$$u_D(t) = \pi^{-1/2} \int_0^{\pi F_s} u_D(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \pi^{-1/2} \left[ \int_0^{\pi F_s} u_D(\omega) \cos(\omega t) d\omega + j \int_0^{\pi F_s} u_D(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right]. \quad (5.58)$$

Оскільки вираз (5.58) складається з дійсної та уявної частин, і при оцінюванні непевності нас цікавить амплітудне значення динамічної непевності, то вираз (5.58) можна записати у вигляді модуля

$$|u_D(t)| = \left[ \left( \int_0^{\pi F_s} \pi^{-1/2} u_D(\omega) \cos(\omega t) d\omega \right)^2 + \left( \int_0^{\pi F_s} \pi^{-1/2} u_D(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.59)$$

Таким чином, амплітудне значення невизначеності, що вноситься за рахунок інерційних властивостей використовуваного під час динамічних вимірювань ЗВТ, можна оцінити нестатистичним методом в часовій області на основі модельного рівняння спектральної функції вхідного сигналу і частотної характеристики використовуваного ЗВТ за рівнянням (5.59).

Нехай з індивідуального завдання відомо, що диференціальне рівняння, яким описується динамічний взаємозв'язок вихідного і вхідного сигналів, описується таким диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{dU(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k U(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \Theta(t),$$



де  $\Theta(t) = at^2$  – модель вхідного сигналу.

Оскільки для оцінювання динамічної невизначеності необхідно мати модуль частотної характеристики використовуюваного вимірювального перетворювача, то виконаємо заміну похідної  $d/dt$  на оператор  $s$  та запишемо диференціальне рівняння в операторному вигляді

$$(s^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)s + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)U(s) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k * \Theta(s).$$

Для отримання передатної функції запишемо вираз операторної чутливості

$$H(s) = \frac{U(s)}{\Theta(s)} = \frac{\beta_1 \beta_3 \alpha_k}{(s^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)s + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)}.$$

Для отримання частотної характеристики ЗВТ виконаємо заміну оператора  $s$  на  $j\omega$  та отримаємо такий вираз

$$H(j\omega) = \frac{\beta_1 \beta_3 \alpha_k}{(-\omega^2 + j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)}.$$

Оскільки для оцінювання динамічної невизначеності також потрібно мати модель модуля частотної характеристики ЗВТ, то виконаємо відокремлення дійсної та уявної частин частотної характеристики ЗВТ шляхом множення чисельника і знаменника на знаменник з протилежним знаком при уявній частині, в результаті отримаємо

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\beta_1 \beta_3 \alpha_k (-\omega^2 - j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)}{(-\omega^2 + j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)(-\omega^2 - j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)} = \\ &= \frac{-\beta_1 \beta_3 \alpha_k \omega^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \alpha_k^2}{(-\omega^2 + j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)(-\omega^2 - j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega + \beta_1 \beta_3 \alpha_k)} + \\ &+ \frac{-j(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)\omega \beta_1 \beta_3 \alpha_k}{\omega^4 - \omega^2 \beta_1 \beta_3 \alpha_k + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)^2 \omega^2 - \beta_1 \beta_3 \alpha_k \omega^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \alpha_k^2}. \end{aligned}$$

Отримавши дійсну та уявну частини частотної характеристики ЗВТ, модуль частотної характеристики визначаємо за виразом

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \left[ \frac{(-\beta_1 \beta_3 \alpha_k \omega^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \alpha_k^2)^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)^2 \omega^2 (\beta_1 \beta_3 \alpha_k)^2}{(\omega^4 - \omega^2 \beta_1 \beta_3 \alpha_k + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k)^2 \omega^2 - \beta_1 \beta_3 \alpha_k \omega^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \alpha_k^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки модель вхідного сигналу задана виразом  $\Theta(t) = at^2$ , то для оцінки динамічної невизначеності в частотній області необхідно знайти зображення за Лапласом, яке для цього виразу матиме вигляд

$$\Theta(s) = \frac{2a}{s^3}.$$

Перейшовши до частотної області моделі вхідного сигналу, отримаємо

$$\Theta(j\omega) = \frac{2a}{-j\omega^3} = \frac{2ja\omega^3}{\omega^6} = \frac{2ja}{\omega^3}.$$

Модуль частотної характеристики вхідного сигналу знайдемо шляхом виділення дійсної та уявної частин

$$|\Theta(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2a}{\omega^3}\right)^2} = \frac{2a}{\omega^3}.$$

Підставляючи отримані вирази квадрата модуля спектральної функції вхідного сигналу  $|\Theta(j\omega)|$  та квадрата модуля частотної характеристики засобу вимірювання  $|H(j\omega)|$  у формулу для оцінювання динамічної невизначеності (58), отримуємо вираз, яким описується динамічна невизначеність ЗВТ в частотній області

$$u_D(\omega) = \pi^{-1/2} \left[ \int_0^{\pi F_s} \frac{\left[ (-\beta_1\beta_3\alpha_k\omega^2 + \beta_1^2\beta_3^2\alpha_k^2)^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\alpha_k)^2 \omega^2 (\beta_1\beta_3\alpha_k)^2 \right] 4a^2}{\left[ (\omega^4 - \omega^2\beta_1\beta_3\alpha_k + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\alpha_k)^2 \omega^2 - \beta_1\beta_3\alpha_k\omega^2 + \beta_1^2\beta_3^2\alpha_k^2)^2 \right] \omega^6} d\omega \right]^{1/2}.$$

Для подання невизначеності динамічних вимірювань в часовій області  $u_D(t)$  необхідно виконати обернену трансформацію Фур'є за виразом

$$|u_D(t)| = \left[ \left( \int_0^{\pi F_s} \pi^{-1/2} u_D(\omega) \cos(\omega t) d\omega \right)^2 + \left( \int_0^{\pi F_s} \pi^{-1/2} u_D(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right)^2 \right]^{1/2},$$

де  $F_s$  – частота дискретизації; береться такою, що дорівнює 10 кГц.

Для розв'язання останніх двох виразів використаємо математичний пакет Maple 12, в якому і побудуємо характеристику зміни динамічної невизначеності при часі спостереження  $T = 10$  с та впливних коефіцієнтах, які дорівнюють 1 (рис. 5.1).

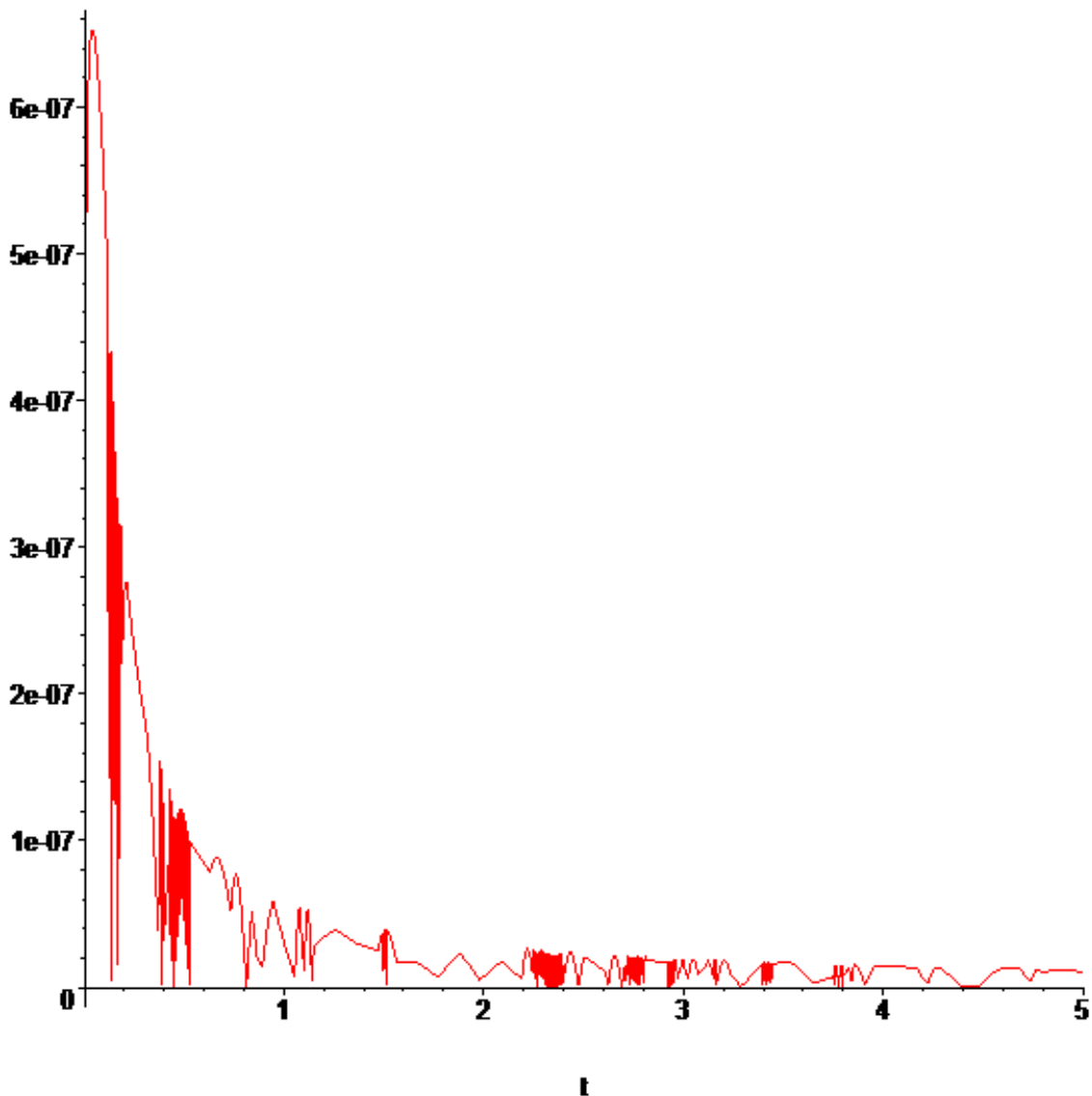


Рисунок 5.1 – Характеристика зміни динамічної невизначеності вимірювання

Отже, як видно з рис. 5.1, амплітудне значення динамічної невизначеності вимірювання не перевищує  $6,6 \cdot 10^{-7}$ .

Таким чином, на основі заданого диференціального рівняння і моделі вхідного сигналу отримано вираз для оцінювання амплітудного значення динамічної невизначеності вимірювання, яке можна використати для дослідження характеристики її зміни при різному часі спостереженні на різних частотах.

## 6 ПОРЯДОК ОРГАНІЗАЦІЇ ЗАХИСТУ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Виконана курсова робота у встановлений термін подається викладачеві на перевірку. Після чого робиться висновок щодо допуску до захисту роботи.

Захист курсової роботи здійснюється публічно перед комісією у складі не менше двох викладачів з обов'язковою присутністю керівника. Термін захисту визначається графіками навчального процесу. Процедура захисту передбачає стислий (до 5 хвилин) виклад студентом основних результатів проведеного дослідження. Після доповіді студент відповідає на всі запитання членів комісії. Склад комісії з захисту курсових робіт (не менше двох осіб) призначається завідувачем кафедри.

Оцінка вноситься у відомість та залікову книжку студента і перегляду (повторному захисту) не підлягає.

Курсова робота не допускається до захисту і повертається на доопрацювання, якщо:

- роботу подано на перевірку з порушенням термінів, установлених кафедрою (викладачем, який викладає цю дисципліну);
- роботу написано на тему, що не внесена до переліку тем курсових робіт з зазначеної дисципліни або не погоджена з викладачем;
- робота не пройшла перевірку на плагіат;
- структура і логіка побудови плану роботи не відповідає вимогам та темі курсової роботи;
- курсову роботу не зброшуровано (тобто аркуші не скріплені).

Необхідні консультації надає викладач кафедри, який перевіряє якість виконання курсової роботи та робить відповідні зауваження.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук, Є. Т. Володарський, *Основи теорії невизначеності вимірювань*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2015.
2. JCGM 100:2008, *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*. Sevres: JCGM, 2008.
3. О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук, *Основи теорії невизначеності вимірювань*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2012.
4. И. П. Захаров, В. Д. Кукуш, *Теория неопределенности в измерениях*. Харьков, Украина: Консум, 2002.
5. В. Д. Ціделко, Н. А. Ярем, *Невизначеність вимірювання. Обробка даних і надання результату вимірювання*. Київ, Україна: Політехніка, 2002.
6. О. М. Васілевський, «Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт», *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*, № 3 (7), с. 147–151, 2006.
7. ISO/IEC GUIDE 98-3:2008, *Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)*. Switzerland: ISO, 2008.
8. О. М. Васілевський, П. І. Кулаков, *Елементи теорії підвищення точності вимірювання та синхронізації кутових швидкостей роторів взаємозв'язаних електромоторів*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2011.
9. JCGM 102:2011, *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» – Extension to any number of output quantities*. – Sevres: JCGM, 2011.
10. О. М. Vasilevskyi, «Calibration method to assess the accuracy of measurement devices using the theory of uncertainty», *International Journal of Metrology and Quality Engineering*, 5.04:4, 2014.
11. О. М. Васілевський, «Оцінювання стандартної непевності типу «В» на основі складових адитивної і мультиплікативної похибок», *Вимірювальна техніка та метрологія*, Вип. 76, с. 36-42, 2015.
12. О. М. Васілевський, «Методика визначення довірчого рівня при оцінюванні розширеної непевності вимірювання віброприскорення», *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*, № 3 (34), с. 100–103, 2015.
13. О. М. Васілевський, «Методика визначення міжповірного інтервалу засобів вимірювання на основі концепції невизначеності», *Технічна електродинаміка*, № 6, с. 81–88, 2014.
14. В. О. Поджаренко, О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук, *Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2008.

15. O. M. Vasilevskyi, «A frequency method for dynamic uncertainty evaluation of measurement during modes of dynamic operation», *International Journal of Metrology and Quality Engineering*, vol. 6, Num. 2:202, 2015.
16. И. П. Куритник, Б. Р. Нусупбеков, А. Н. Василевский, В. Ю. Кучерук, Д. Ж. Карабекова, *Основы теории неопределенности измерений*. Караганда, Республика Казахстан: Изд-во КарГУ, 2015.
17. А. Н. Василевский, «Способ выражения динамической неопределенности средств измерений», *Приборы и методы измерений*, № 2 (7), с. 109–113, 2013.
18. А. Н. Василевский, Е. Д. Никитенко, «Исследование неопределенности измерения концентрации ионов при использовании средства измерения построенного за принципом аналого-цифрового преобразования», *Збірник наукових праць Одеської державної академії технічного регулювання та якості*, Вип. 2 (7), с. 62-65, 2015.
19. О. М. Васілевський, «Методика оцінювання довірчого рівня для розрахунку розширеної невизначеності вимірювання активності іонів», *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*, №4, с. 48–52, 2015.
20. О. М. Васілевський, О. Г. Ігнатенко, В. В. Присяжнюк, Ю. М. Костюк, «Методика оцінювання метрологічної надійності засобів вимірювальної техніки з урахуванням концепції невизначеності», *Вісник інженерної академії України*, № 1, с. 217–220, 2016.
21. О. В. Бісікало, О. М. Васілевський, «Оцінка невизначеності вимірювання сенсу природномовних конструкцій», *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2, с. 29–39, 2016.
22. O. M. Vasilevskyi, «Metrological characteristics of the torque measurement of electric motors», *International Journal of Metrology and Quality Engineering*, vol. 8, art. 7, 2017.
23. O. M. Vasilevskyi, M. Yu. Yakovlev, P. I. Kulakov, «Spectral method to evaluate the uncertainty of dynamic measurements», *Technical Electrodynamics*, № 4, pp. 72–78, 2017.
24. O. M. Vasilevskyi, P. I. Kulakov, K. V. Ovchynnykov, V. M. Didych, «Evaluation of dynamic measurement uncertainty in the time domain in the application to high speed rotating machinery», *International Journal of Metrology and Quality Engineering*, vol. 8, art. 25, 2017.

Додатки

Додаток А  
**Зразок оформлення титульного аркуша**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет  
Факультет комп'ютерних систем та автоматики  
Кафедра метрології та промислової автоматики

**КУРСОВА РОБОТА**

з дисципліни «Основи теорії невизначеності вимірювань»

на тему: Опрацювання результатів вимірювань, контролю та  
діагностування на основі концепції невизначеності

08-03.КР.ОТНВ.01.01.000 ПЗ

Студента 1-го курсу групи ІЯП-18м  
спеціальності 152 – «Метрологія та  
інформаціо-вимірювальна техніка»

Іванова Р.Ю.

(підпис)

Керівник д.т.н., проф. Васілевський О. М.

(вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала \_\_\_\_\_

Кількість балів \_\_\_\_\_

Оцінка ECTS \_\_\_\_\_

Члени комісії:

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

м. ВІННИЦЯ – 2018 рік



Додаток Б  
Варіанти до першого завдання

Таблиця Б.1 – Результати вимірювань величини X та їхні ймовірності

| Вар. | P    | Дані вхідної величини X, що вимірювалась |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1    | 0,9  | 1,68                                     | 1,77  | 1,74  | 1,60  | 1,52  | 1,76  | 1,61  | 1,68  | 1,92  |
| 2    | 0,95 | 2,29                                     | 2,50  | 2,37  | 2,47  | 2,45  | 2,48  | 2,36  | 2,34  | 2,39  |
| 3    | 0,99 | 3,86                                     | 3,88  | 3,84  | 3,91  | 3,98  | 3,92  | 3,92  | 3,78  | 3,83  |
| 4    | 0,95 | 4,81                                     | 4,71  | 4,69  | 4,87  | 4,69  | 4,74  | 4,70  | 4,66  | 4,79  |
| 5    | 0,9  | 5,72                                     | 5,65  | 5,70  | 5,55  | 5,56  | 5,66  | 5,56  | 5,69  | 5,55  |
| 6    | 0,95 | 6,60                                     | 6,69  | 6,79  | 6,78  | 6,65  | 6,63  | 6,72  | 6,71  | 6,71  |
| 7    | 0,98 | 7,79                                     | 7,83  | 7,68  | 7,81  | 7,73  | 7,71  | 7,74  | 7,66  | 7,81  |
| 8    | 0,9  | 8,82                                     | 8,74  | 8,69  | 8,78  | 8,81  | 8,84  | 8,74  | 8,88  | 8,82  |
| 9    | 0,99 | 9,02                                     | 9,19  | 9,26  | 9,24  | 9,14  | 9,24  | 9,18  | 9,15  | 9,10  |
| 10   | 0,95 | 10,73                                    | 10,81 | 10,57 | 10,60 | 10,59 | 10,74 | 10,58 | 10,59 | 10,64 |
| 11   | 0,9  | 11,77                                    | 11,81 | 11,89 | 11,78 | 11,71 | 11,79 | 11,90 | 11,91 | 11,81 |
| 12   | 0,95 | 12,76                                    | 12,97 | 12,91 | 12,80 | 12,87 | 12,80 | 12,77 | 12,89 | 12,98 |
| 13   | 0,9  | 13,74                                    | 13,64 | 13,57 | 13,58 | 13,69 | 13,57 | 13,65 | 13,50 | 13,68 |
| 14   | 0,98 | 14,92                                    | 14,82 | 14,88 | 14,81 | 14,90 | 14,90 | 14,96 | 14,93 | 14,87 |
| 15   | 0,95 | 15,44                                    | 15,49 | 15,39 | 15,36 | 15,30 | 15,35 | 15,40 | 15,44 | 15,47 |
| 16   | 0,9  | 16,68                                    | 16,77 | 16,74 | 16,60 | 16,52 | 16,76 | 16,61 | 16,68 | 16,92 |
| 17   | 0,95 | 17,92                                    | 17,82 | 17,88 | 17,81 | 17,90 | 17,90 | 17,96 | 17,93 | 14,87 |
| 18   | 0,98 | 18,76                                    | 18,97 | 18,91 | 18,80 | 18,87 | 18,80 | 18,77 | 18,89 | 18,98 |
| 19   | 0,9  | 19,82                                    | 19,74 | 19,69 | 19,78 | 19,81 | 19,84 | 19,74 | 19,88 | 19,82 |
| 20   | 0,95 | 20,29                                    | 20,50 | 20,37 | 20,47 | 20,45 | 20,48 | 20,36 | 20,34 | 20,39 |
| 21   | 0,95 | 21,79                                    | 21,83 | 21,68 | 21,81 | 21,73 | 21,71 | 21,74 | 21,66 | 21,81 |
| 22   | 0,9  | 22,77                                    | 22,81 | 22,89 | 22,78 | 22,71 | 22,79 | 22,90 | 22,91 | 22,81 |
| 23   | 0,99 | 23,86                                    | 23,88 | 23,84 | 23,91 | 23,98 | 23,92 | 23,92 | 23,78 | 23,83 |
| 24   | 0,95 | 24,81                                    | 24,71 | 24,69 | 24,87 | 24,69 | 24,74 | 24,70 | 24,66 | 24,79 |
| 25   | 0,98 | 0,9                                      | 0,97  | 0,84  | 0,86  | 0,89  | 0,91  | 0,93  | 0,87  | 0,85  |
| 26   | 0,95 | 31,1                                     | 30,9  | 31,5  | 31,3  | 30,8  | 30,7  | 31,4  | 31,1  | 31,2  |
| 27   | 0,9  | 45,2                                     | 44,4  | 45,9  | 45,1  | 44,1  | 44,5  | 44,7  | 45,0  | 45,5  |
| 28   | 0,98 | 50,2                                     | 50,4  | 50,9  | 50,7  | 50,6  | 50,8  | 51,1  | 51,2  | 51,0  |
| 29   | 0,99 | 26,55                                    | 26,51 | 26,41 | 26,87 | 26,94 | 27,05 | 27,10 | 26,99 | 26,35 |
| 30   | 0,9  | 28,5                                     | 28,8  | 28,2  | 28,6  | 27,9  | 27,8  | 28,7  | 28,9  | 28,3  |
| 31   | 0,95 | 60,54                                    | 60,99 | 61,25 | 60,57 | 59,85 | 60,75 | 59,99 | 60,15 | 60,55 |
| 32   | 0,98 | 65,44                                    | 64,55 | 66,85 | 65,15 | 66,65 | 64,85 | 65,55 | 66,12 | 64,95 |

Таблиця Б.2 – Рівняння перетворень, за якими проводились вимірювання X

| Варіанти | b    | K    | $Y=f(X, k, b)$                             |
|----------|------|------|--|
| 1        | 0,95 | 14   | $Y = \sqrt{k + X^2} / b$                   |
| 2        | 1,25 | 2,5  | $Y = (b/k)^3 + \sqrt{X}$                   |
| 3        | 2,55 | 0,95 | $Y = k^2 X^3 / b$                          |
| 4        | 1,2  | 5,5  | $Y = b^3 + X / \sqrt{k}$                   |
| 5        | 3,6  | 4,54 | $Y = k^{0,5} b^4 / \sqrt{X}$               |
| 6        | 2,95 | 3,25 | $Y = k^2 / (X + \sqrt{b})$                 |
| 7        | 4,1  | 8,78 | $Y = k + b\sqrt{X + k}$                    |
| 8        | 5,2  | 1,65 | $Y = k^4 / \sqrt{X + b}$                   |
| 9        | 6,6  | 2,5  | $Y = \sqrt{k + X^2} / b$                   |
| 10       | 1,66 | 3,25 | $Y = X + b\sqrt{k + bX}$                   |
| 11       | 0,98 | 1,83 | $Y = \sqrt{kb} / \sqrt{X} + X$             |
| 12       | 5,27 | 9,51 | $Y = k^{2/3} + (b + X) / \sqrt{X}$         |
| 13       | 6,05 | 9,05 | $Y = b^3 + X^2 / (X + k)$                  |
| 14       | 2,35 | 6,25 | $Y = X / \sqrt{b} + (k/X)^{1,5}$           |
| 15       | 5,85 | 8,75 | $Y = \sqrt[3]{X} + k^3 \sqrt{b + X}$       |
| 16       | 6,65 | 2,25 | $Y = k^4 X / \sqrt{X + b}$                 |
| 17       | 7,23 | 4,52 | $Y = \sqrt{X + b^2} / k^2$                 |
| 18       | 7,88 | 9,61 | $Y = 1/b + k^2 / X^3$                      |
| 19       | 6,54 | 0,85 | $Y = b/X + \sqrt{k^3 X}$                   |
| 20       | 3,22 | 5,5  | $Y = X^2 / (b^3 + \sqrt{kX})$              |
| 21       | 7,05 | 5    | $Y = X + b^3 X^4 / \sqrt{k}$               |
| 22       | 3,36 | 2,43 | $Y = (X - 1) / \sqrt{k^4 + b^3 X}$         |
| 23       | 2,58 | 0,99 | $Y = k^3 X^5 / \sqrt{b} - \ln k$           |
| 24       | 2,31 | 6,66 | $Y = bX / (\ln X + k)$                     |
| 25       | 0,99 | 0,88 | $Y = b^3 \exp(2X^2/k)$                     |
| 26       | 1,57 | 6,27 | $Y = \sqrt[4]{k} \lg(X/(b - k))$           |
| 27       | 3,15 | 2,93 | $Y = \exp(b) + \ln(X^{2-b}) / \exp(1/k)$   |
| 28       | 2,25 | 0,87 | $Y = 10^{Xk \ln b^2}$                      |
| 29       | 8,85 | 4,55 | $Y = \exp(b) \sin(Xk)$                     |
| 30       | 7,33 | 9,72 | $Y = \operatorname{tg}(b/X) / \sqrt[3]{k}$ |
| 31       | 3,54 | 5,89 | $Y = 2^b \cos(k/X)$                        |
| 32       | 5,22 | 2,34 | $Y = 2^{\ln X} / k^{3-b}$                  |

Додаток В  
Варіанти до другого завдання

Таблиця В.1 – Характеристики похибок, що підлягають перерахунку

| Варіант | $\Delta_{0,95}$ | $\Delta_{0,99}$ | $\gamma$ | n   | m |
|---------|-----------------|-----------------|----------|-----|---|
| 1       | 1,5             | 1,0             | 0,7      | 5   | 2 |
| 2       | 2,3             | 1,8             | 0,9      | 10  | 1 |
| 3       | 3,1             | 2,6             | 10       | 20  | 3 |
| 4       | 2,7             | 1,05            | 0,5      | 25  | 4 |
| 5       | 2,0             | 0,95            | 0,4      | 30  | 5 |
| 6       | 1,8             | 0,9             | 8        | 45  | 2 |
| 7       | 1,4             | 0,85            | 7        | 50  | 3 |
| 8       | 1,2             | 0,8             | 0,9      | 100 | 4 |
| 9       | 0,8             | 0,15            | 0,8      | 15  | 6 |
| 10      | 0,5             | 0,09            | 0,4      | 90  | 2 |
| 11      | 0,3             | 0,005           | 0,8      | 25  | 3 |
| 12      | 0,1             | 0,002           | 2        | 35  | 4 |
| 13      | 0,05            | 0,045           | 8        | 29  | 7 |
| 14      | 0,03            | 0,0013          | 10       | 26  | 4 |
| 15      | 0,01            | 0,0067          | 0,7      | 18  | 3 |
| 16      | 0,07            | 0,035           | 0,9      | 16  | 2 |
| 17      | 1,4             | 0,558           | 3        | 11  | 1 |
| 18      | 1,6             | 0,427           | 16       | 9   | 9 |
| 19      | 3,45            | 0,085           | 0,25     | 8   | 4 |
| 20      | 5,05            | 0,075           | 1        | 44  | 3 |
| 21      | 4,32            | 0,0065          | 9        | 35  | 2 |
| 22      | 3,25            | 0,089           | 8        | 30  | 3 |
| 23      | 3,99            | 0,077           | 0,1      | 29  | 4 |
| 24      | 2,95            | 0,022           | 0,6      | 4   | 5 |
| 25      | 10,55           | 0,025           | 0,9      | 28  | 1 |
| 26      | 2,85            | 0,95            | 0,8      | 45  | 8 |
| 27      | 1,48            | 0,85            | 7        | 5   | 3 |
| 28      | 3,25            | 0,8             | 0,9      | 10  | 4 |
| 29      | 5,85            | 0,15            | 0,8      | 2   | 6 |
| 30      | 2,51            | 0,79            | 0,4      | 90  | 9 |
| 31      | 6,38            | 0,025           | 0,8      | 25  | 3 |
| 32      | 0,275           | 0,99            | 8,0      | 20  | 1 |

Додаток Г  
Варіанти до третього завдання

Таблиця Г.1 – Варіанти даних до завдання 3

| Варіант | $U_k, В$ | $c/d$    | $U, В$ | $\Theta, ^\circ C$ |
|---------|----------|----------|--------|--------------------|
| 1       | 500      | 0,1/0,01 | 250,1  | 6                  |
| 2       | 1000     | 0,2/0,02 | 500,2  | 2                  |
| 3       | 800      | 0,5/0,05 | 300,1  | 4                  |
| 4       | 100      | 0,1/0,05 | 50,1   | 5                  |
| 5       | 650      | 0,2/0,03 | 300,3  | 7                  |
| 6       | 250      | 0,1/0,03 | 200,2  | 8                  |
| 7       | 630      | 0,3/0,03 | 400,5  | 3                  |
| 8       | 700      | 0,1/0,02 | 500,1  | 5                  |
| 9       | 800      | 0,3/0,02 | 400,3  | 4                  |
| 10      | 500      | 0,5/0,03 | 200,2  | 6                  |
| 11      | 550      | 0,1/0,02 | 200,1  | 9                  |
| 12      | 400      | 0,4/0,03 | 200,1  | 2                  |
| 13      | 300      | 0,4/0,04 | 100,1  | 5                  |
| 14      | 150      | 0,1/0,04 | 70,2   | 4                  |
| 15      | 350      | 0,3/0,05 | 100,2  | 6                  |
| 16      | 500      | 0,1/0,01 | 250,1  | 6                  |
| 17      | 1000     | 0,2/0,02 | 500,2  | 2                  |
| 18      | 900      | 0,2/0,05 | 500,1  | 4                  |
| 19      | 100      | 0,1/0,05 | 50,1   | 5                  |
| 20      | 650      | 0,2/0,03 | 300,3  | 7                  |
| 21      | 250      | 0,1/0,03 | 200,2  | 8                  |
| 22      | 630      | 0,3/0,03 | 400,5  | 3                  |
| 23      | 200      | 0,1/0,02 | 100,1  | 5                  |
| 24      | 800      | 0,3/0,02 | 400,3  | 4                  |
| 25      | 500      | 0,5/0,03 | 200,2  | 6                  |
| 26      | 550      | 0,1/0,02 | 200,1  | 9                  |
| 27      | 400      | 0,4/0,03 | 200,1  | 2                  |
| 28      | 300      | 0,4/0,04 | 100,1  | 5                  |
| 29      | 150      | 0,1/0,04 | 70,2   | 4                  |
| 30      | 350      | 0,3/0,05 | 100,2  | 6                  |
| 31      | 1050     | 0,1/0,02 | 1000   | 8                  |
| 32      | 1500     | 0,2/0,01 | 1200   | 5                  |

Додаток Д  
Варіанти до четвертого завдання

Таблиця Д.1 – Варіанти даних до завдання 4

|      |                          |           |                     |           |                      |                      |                      |           |           |      |
|------|--------------------------|-----------|---------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|-----------|------|
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_4$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 1    | 4,16                     | 2,18      | 2,21                | 2,20      | 3,16                 | 3,33                 | 3,25                 | 2,21      | 2,20      | 0,95 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2+$<br>$x_4$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 2    | 8,13                     | 4,14      | 4,17                | 4,15      | 6,13                 | 6,26                 | 6,19                 | 4,17      | 4,15      | 0,9  |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 3    | 12,16                    | 6,18      | 6,21                | 6,20      | 9,16                 | 9,33                 | 9,25                 | 6,21      | 6,20      | 0,97 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 4    | 10,13                    | 5,14      | 5,17                | 5,15      | 7,13                 | 7,26                 | 7,19                 | 6,17      | 4,15      | 0,9  |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 5    | 6,23                     | 3,26      | 3,30                | 3,28      | 4,23                 | 4,47                 | 4,35                 | 4,30      | 2,28      | 0,95 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 6    | 6,16                     | 3,18      | 2,21                | 4,20      | 4,16                 | 5,33                 | 5,25                 | 3,21      | 3,20      | 0,9  |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_1+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 7    | 10,13                    | 6,14      | 5,17                | 5,15      | 9,13                 | 8,26                 | 8,19                 | 3,17      | 7,15      | 0,95 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 8    | 7,16                     | 3,18      | 4,21                | 3,20      | 6,16                 | 6,33                 | 6,25                 | 2,21      | 5,20      | 0,97 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 9    | 9,23                     | 3,26      | 6,30                | 3,28      | 7,23                 | 7,47                 | 7,35                 | 4,30      | 5,28      | 0,95 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_3$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 10   | 12,16                    | 7,18      | 5,21                | 7,20      | 10,16                | 10,33                | 10,25                | 4,21      | 8,20      | 0,9  |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 11   | 15,13                    | 5,14      | 7,17                | 8,15      | 10,13                | 13,26                | 13,19                | 7,17      | 8,15      | 0,9  |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_4$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 12   | 12,16                    | 3,18      | 6,21                | 6,20      | 7,16                 | 10,33                | 10,25                | 7,21      | 5,20      | 0,95 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 13   | 12,23                    | 7,26      | 7,30                | 5,28      | 8,23                 | 6,47                 | 6,35                 | 10,30     | 2,28      | 0,97 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 14   | 12,16                    | 5,18      | 4,21                | 8,20      | 7,16                 | 10,33                | 10,25                | 7,21      | 5,20      | 0,99 |
| Вар. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$           | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 15   | 11,16                    | 7,18      | 5,21                | 6,20      | 10,16                | 9,33                 | 9,25                 | 3,21      | 8,20      | 0,9  |

|      |                          |           |           |           |                      |                      |                      |           |           |      |
|------|--------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|-----------|------|
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 16   | 17,8                     | 6,2       | 5,3       | 7,12      | 12,1                 | 11,2                 | 12,75                | 7,42      | 4,9       | 0,95 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 17   | 16,6                     | 16,8      | 16,1      | 17,2      | 18,6                 | 18,3                 | 18,5                 | 17,2      | 18,2      | 0,9  |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 18   | 19,9                     | 11,18     | 8,51      | 9,2       | 15,6                 | 14,35                | 12,51                | 7,82      | 12,62     | 0,99 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 19   | 29,2                     | 17,8      | 12,1      | 11,4      | 19,6                 | 24,5                 | 21,1                 | 17,21     | 18,2      | 0,95 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 20   | 35,3                     | 21,5      | 19,6      | 31,5      | 28,2                 | 31,1                 | 32,8                 | 18,7      | 23,9      | 0,9  |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 21   | 45,3                     | 25,1      | 29,3      | 17,1      | 35,5                 | 30,9                 | 36,2                 | 24,5      | 15,9      | 0,99 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 22   | 11,13                    | 2,06      | 4,1       | 7,12      | 5,11                 | 10,15                | 10,13                | 7,08      | 4,1       | 0,9  |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 23   | 13,13                    | 5,14      | 9,17      | 4,15      | 10,13                | 9,26                 | 9,19                 | 7,17      | 6,15      | 0,95 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 24   | 11,13                    | 6,14      | 9,17      | 2,15      | 10,13                | 6,26                 | 6,19                 | 6,17      | 5,15      | 0,9  |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 25   | 7,13                     | 4,14      | 5,17      | 2,15      | 6,13                 | 4,26                 | 4,19                 | 4,17      | 3,15      | 0,95 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 26   | 6,23                     | 3,26      | 3,30      | 3,28      | 4,23                 | 4,47                 | 4,35                 | 4,30      | 2,28      | 0,97 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 27   | 15,13                    | 7,14      | 7,17      | 8,15      | 10,13                | 11,26                | 11,19                | 9,17      | 6,15      | 0,99 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 28   | 17,13                    | 10,14     | 6,17      | 11,15     | 12,13                | 13,26                | 13,19                | 9,17      | 8,15      | 0,9  |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 29   | 20,16                    | 9,18      | 9,21      | 11,20     | 14,16                | 16,33                | 16,25                | 10,21     | 10,2      | 0,95 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 30   | 7,23                     | 5,26      | 4,30      | 3,28      | 6,23                 | 4,47                 | 4,35                 | 4,30      | 3,28      | 0,99 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 31   | 15,16                    | 8,18      | 10,21     | 5,20      | 12,16                | 9,25                 | 9,33                 | 9,21      | 6,20      | 0,97 |
| Bap. | $x_1+x_2+$<br>$+x_3+x_4$ | $x_2+x_3$ | $x_1+x_2$ | $x_3+x_4$ | $x_1+x_2+$<br>$+x_3$ | $x_1+x_3+$<br>$+x_4$ | $x_2+x_4+$<br>$+x_3$ | $x_2+x_4$ | $x_3+x_1$ | Рдов |
| 32   | 14,13                    | 5,14      | 7,17      | 7,15      | 10,13                | 12,26                | 12,19                | 6,17      | 8,15      | 0,95 |

Додаток Е  
Варіанти до п'ятого завдання

Таблиця Е.1 – Моделі вимірювального перетворювача та вхідного сигналу

| Вар. | Диференціальне рівняння  | Модель вхідного сигналу                                  |
|------|--|--|
| 1    | $m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$   | $P(t) = \cos(\omega_0 t)$                                |
| 2    | $J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + b_o l_o \frac{d\varphi(t)}{dt} + c_o l_o^2 \varphi(t) = H_o \omega(t)$  | $\omega(t) = e^{\omega_0 t}$                             |
| 3    | $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = ma(t)$  | $a(t) = te^{\omega_0 t}$                                 |
| 4    | $aT^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (aT + T) \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = k\Theta(t)$   | $\Theta(t) = 1 - e^{\omega_0 t}$                         |
| 5    | $\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{dU(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k U(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \Theta(t)$ | $\Theta(t) = at^2$                                       |
| 6    | $\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \Theta(t)$   | $\Theta(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{at} \sin(\omega_0 t)$ |
| 7    | $J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = A\Theta(t)$   | $\Theta(t) = e^{at} \cos(\omega_0 t)$                    |
| 8    | $J \frac{d\omega(t)}{dt} + r\omega(t) = c\vartheta^2(t)$   | $\vartheta(t) = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$         |
| 9    | $\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha S}{mc} U(t) = \frac{\alpha S}{mc} \theta(t)$  | $\theta(t) = \frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$          |
| 10   | $\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda} \varphi(t) = \frac{1}{\lambda} z(t)$   | $z(t) = \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2 - a^2}$           |
| 11   | $J \frac{d\beta(t)}{dt} + bl\beta(t) = H\Psi(t)$   | $\Psi(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$ ,<br>$n = 3$ |
| 12   | $\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{dU(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k U(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \Theta(t)$ | $\Theta(t) = \sin(\omega_0 t)$                           |
| 13   | $aT^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (aT + T) \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = k\Theta(t)$   | $\Theta(t) = e^{-zt}$                                    |
| 14   | $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = ma(t)$  | $a(t) = t^n$ ,<br>$npu \quad n = 4$                      |
| 15   | $J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = H_o \omega(t)$  | $\omega(t) = e^{\beta t} \sin(at)$                       |
| 16   | $m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$   | $P(t) = t \sin(at)$                                      |
| 17   | $\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha S}{mc} U(t) = \frac{\alpha S}{mc} \theta(t)$  | $\theta(t) = e^{\beta t} \cos(at)$                       |
| 18   | $J \frac{d\omega(t)}{dt} + r\omega(t) = c\vartheta(t)$   | $\vartheta(t) = e^{\beta t} t^n$ ,<br>$npu \quad n = 2$  |

Продовження таблиці Е.1

| Вар. | Диференціальне рівняння   | Модель вхідного сигналу                             |
|------|---|---|
| 19   | $J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = A\Theta(t)$                              | $\Theta(t) = e^{\beta t} sh(at)$                    |
| 20   | $\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \Theta(t)$  | $\Theta(t) = e^{\beta t} ch(at)$                    |
| 21   | $J \frac{d\omega(t)}{dt} + r\omega(t) = c\mathcal{G}(t)$                          | $\mathcal{G}(t) = e^{\beta t} t \cos(at)$           |
| 22   | $\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha S}{mc} U(t) = \frac{\alpha S}{mc} \theta(t)$     | $\theta(t) = e^{\beta t} t^n,$<br>$npu \quad n = 4$ |
| 23   | $m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$                | $P(t) = e^{\beta t} t \cos(at)$                     |
| 24   | $J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = \omega(t)$ | $\omega(t) = t \cos(at)$                            |
| 25   | $\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \Theta(t)$  | $\Theta(t) = t \cdot ch(a \cdot t)$                 |
| 26   | $J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = A\Theta(t)$                              | $\Theta(t) = e^{\beta t} t \sin(at)$                |
| 27   | $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = a^2(t)$              | $\omega(t) = t \sin(at)$                            |
| 28   | $\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = \Theta(t)$   | $\Theta(t) = e^{\beta t} t \cos(at)$                |
| 29   | $\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \frac{dU(t)}{dt} + U(t) = \Theta(t)$                     | $\Theta(t) = ch(at)$                                |
| 30   | $\frac{d\beta(t)}{dt} + \beta(t) = \Psi(t)$                                       | $\Psi(t) = e^{\beta t} t \sin(at)$                  |
| 31   | $\frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = z(t)$                                      | $z(t) = t \cdot sh(a \cdot t)$                      |
| 32   | $J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = \omega(t)$ | $\omega(t) = sh(at)$                                |



*Навчальне видання*

**Методичні вказівки  
до виконання курсової роботи з дисципліни  
«Основи теорії невизначеності вимірювань»  
для студентів усіх освітніх програм і форм навчання  
спеціальності 152 – «Метрологія  
та інформаційно-вимірювальна техніка»**

Укладачі: Олександр Миколайович Васілевський  
Костянтин Вячеславович Овчинников  
Василь Васильович Присяжнюк

Рукопис оформив О. Васілевський

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет виготовив О. Ткачук

Підписано до друку 10.10.2018 р.  
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 3,24.  
Наклад 40 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2018-181.

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 65-18-06.  
**press.vntu.edu.ua;**  
*E-mail:* kivc.vntu@gmail.com  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.