УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

ХАРАКТЕРИСТИКА НАПІВРЕШІТКИ ІДЕМПОТЕНТІВ ПЕРЕСТАВНОЇ ІНВЕРСНОЇ НАПІВГРУПИ СКІНЧЕННОГО РАНГУ З НУЛЕМ

The characterization of a semilattice of idempotents of a finite-rank permutable inverse semigroup with zero is given.

Дана характеристика полурешетки идемпотентов перестановочной инверсной полугруппы конечного ранга с нулем.

Вступ. Напівгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень. До класу переставних напівгруп належать групи, напівгрупи Брандта та інші. Зазначимо, що напівгрупи, конгруенції яких утворюють ланцюжок відносно включення (це так звані Δ-напівгрупи), очевидно, також є переставними. Як відомо (див. [1, т. 2, с. 287]), будь-яка симетрична скінченна напівгрупа є Δ-напівгрупою. Комутативні Δ-напівгрупи незалежно описані Т. Тамурою [2] і Б. Шайном [3, 4]. В більшості наступних робіт (відповідну бібліографію можна знайти в оглядових статтях [5, 6], а також в роботі [7]) з'ясовується структура Δ-напівгруп, які є узагальненням комутативних напівгруп. У статті [8] запропоновано конструкцію скінченної інверсної Δ-напівгрупи.

Тепер щодо переставних напівгруп, які не обов'язково є Δ-напівгрупами. В статті [9] встановлено структуру комутативної переставної напівгрупи. В подальших роботах вивчалися переставні напівгрупи, що близькі до комутативних (наприклад, дуо-напівгрупи [10], медіальні напівгрупи [11], LC-комутативні напівгрупи [12], $RDGC_n$-комутативні напівгрупи [13] та ін.), а також переставні цілком регулярні напівгрупи (див. [6], теореми 4.8 і 4.9) і регулярні ω-напівгрупи [14] .

Переставні інверсні напівгрупи розглядалися в кількох роботах. Крім вищезгаданої статті [8] (яка, втім, стосується інверсних Δ-напівгруп) відомою є теорема (див. [5], теорема 6.3), в якій знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб скінченна інверсна напівгрупа була переставною. Крім того, з результатів Тамури і Гамільтона безпосередньо випливає теорема про будову переставної кліфордової напівгрупи [6, с. 34]. Необхідні і достатні умови для того, щоб інверсна ω-напівгрупа була переставною, знайдено в роботі [14]. У статті [15] з'ясовується структура будь-якої конгруенції переставної антигрупи всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки скінченної довжини. В статті [16] цей результат узагальнюється — знайдено структуру будь-якої конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченної довжини з нулем. У даній роботі знайдено характеристику напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем. Основними результатами статті є теореми 2 і 5.

1. Основна термінологія і позначення. Напіврешітка P називається напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з S не перевищує числа n.

Нехай S — довільна напівгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\mathrm{rank}: S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких елементів a і $b \in S$ виконується нерівність

$$\mathrm{rank}(a \cdot b) \leq \min\{\mathrm{rank}(a), \mathrm{rank}(b)\}.$$

Число $\mathrm{rank}(a)$ називається рангом елемента a.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $\operatorname{rank}(a) = h(a \cdot a^{-1})$, де $h(a \cdot a^{-1})$ — висота ідемпотента $a \cdot a^{-1}$ в напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [16, с. 470]). У даній роботі ми оперуємо рангом елемента саме в такому розумінні.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в монографії [1].

2. Про переставну інверсну напівгрупу з нулем. Спочатку розглянемо найпростіший випадок, а саме, коли ранг будь-якого елемента інверсної напівгрупи не перевищує одиницю.

Теорема 1. *Нехай S — інверсна напівгрупа з нулем така, що для будь-якого* x $\operatorname{rank}(x) \le 1$.

Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли вона є напівгрупою Брандта.

Доведення. Нехай напівгрупа S є переставною, тоді за теоремою 4 (див. [9]) її ідеали лінійно впорядковані, а отже (див. теорему 2 з [16]), кожний її ідеал має форму $\{ x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le k \}$. В даному випадку $k = 0$ або $k = 1$. Легко зрозуміти, що множина $\{ x \in S \mid \operatorname{rank}(x) = 0 \}$ є одноелементною (єдиним її елементом є нуль). Таким чином, напівгрупа S є 0-простою. Крім того, будь-який ідемпотент, ранг якого дорівнює 1, є примітивним. Отже, S є цілком 0-простою інверсною напівгрупою, тобто напівгрупою Брандта.

Обернене твердження очевидним чином випливає з відомого результату (див., наприклад, [1]) про структуру будь-якої конгруенції напівгрупи Брандта.

Далі будемо вважати, що інверсна напівгрупа S містить елемент, ранг якого не менший ніж 2.

Сформулюємо перший (серед двох основних) результатів статті (він анонсований у [17]).

Теорема 2. *Нехай S — інверсна напівгрупа з нулем, напіврешітка E ідемпотентів якої має скінченну довжину.*

Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі дві умови:

1) *для будь-яких a і $b \in S$, якщо* $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$, *то* $SaS = SbS$;

2) *для будь-якого $e \in E$* $(\operatorname{rank}(e) \ge 2)$ *існують ідемпотенти f і ω такі, що $f \ne \omega$, $f < e$, $\omega < e$ і* $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\omega) = \operatorname{rank}(e) - 1$.

Перед тим, як безпосередньо перейти до доведення теореми, нам потрібно довести кілька лем.

Отже, нехай L — напіврешітка скінченної довжини. Очевидно, вона містить нуль.

Будемо говорити, що L задовольняє умову D, якщо виконується така вимога:

якщо $a < b$ (причому $\operatorname{rank}(a) \ge 1$), то існує елемент c такий, що $c \ne a$, $c < b$, $\operatorname{rank}(c) = \operatorname{rank}(a)$.

Тепер сформулюємо умову R:

для будь-якого $e \in L$ $(\operatorname{rank}(e) \ge 2)$ існують елементи b, $c \in L$ такі, що $b \ne c$, $b < e$, $c < e$ і $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(c) = \operatorname{rank}(e) - 1$.

Лема 1. *Для напіврешітки L скінченної довжини умови D і R є еквівалентними.*

Доведення. Припустимо, що виконується умова D. Нехай $e \in L$, причому $\operatorname{rank}(e) \ge 2$. Зрозуміло, що існує елемент b такий, що $b < e$ і $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(e) - 1$. За умовою D існує елемент c такий, що $c \ne b$, $c < e$ і $\operatorname{rank}(c) = \operatorname{rank}(b)$. Отже, виконується умова R.

Навпаки, нехай виконується умова R. Припустимо, що $a < b$ і $\operatorname{rank}(a) \ge 1$.

***Випадок* A.** Елемент a належить максимальному (за кількістю елементів) ланцюжку, що з'єднує 0 і b.

В цьому ланцюжку беремо елемент s такий, що $a \prec s$ (тут $\prec$ позначає покриття). Тоді $\operatorname{rank}(s) = \operatorname{rank}(a) + 1$. За умовою R існують елементи x і y такі, що $x \neq y$, $x < s, y < s$, $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(y) = \operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(s) - 1$. Зрозуміло, що $x \neq a$ або $y \neq a$. Нехай, наприклад, $x \neq a$. Крім того, $x < b$ і $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(s) - 1$. Отже, виконується умова D.

Випадок **B.** Елемент a не належить жодному максимальному (за кількістю елементів) ланцюжку, що з'єднує 0 і b.

Нехай P — такий максимальний ланцюжок в L. Існує елемент $u \in P$ такий, що $\operatorname{rank}(u) = \operatorname{rank}(a) + 1$. За умовою R знайдуться елементи z і v такі, що $z \neq v$, $z < u$, $v < u$, $\operatorname{rank}(z) = \operatorname{rank}(v) = \operatorname{rank}(u) - 1 = \operatorname{rank}(a)$. Зрозуміло, що $z \neq a$ або $v \neq a$. Нехай, наприклад, $z \neq a$. Крім того, $z < b$ і $\operatorname{rank}(z) = \operatorname{rank}(a)$. Отже, виконується умова D.

Далі умовою 2 (див. теорему 2) ми будемо користуватися або в формі R або в формі D.

Лема 2. *Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів E якої має скінченну довжину. Нехай ідемпотенти a і b такі, що $a = xbx^{-1}$ для деякого $x \in S$, причому $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(x)$.*

Тоді $aE \cong bE$.

Доведення. Спочатку відмітимо справедливість рівності

$$xx^{-1} = a. \tag{1}$$

Дійсно, оскільки $a = xbx^{-1}$, то $xx^{-1}a = xx^{-1}xbx^{-1} = xbx^{-1} = a$. Отже, $a \leq xx^{-1}$. Якщо припустити, що $a < xx^{-1}$, то $\operatorname{rank}(a) < \operatorname{rank}(xx^{-1}) = \operatorname{rank}(x)$, що суперечить умові. Отже, $xx^{-1} = a$.

Тепер покажемо, що

$$ax = xb. \tag{2}$$

Дійсно, $ax = xbx^{-1}x = xx^{-1}xb = xb$. Далі покажемо, що

$$\operatorname{rank}(xb) = \operatorname{rank}(b). \tag{3}$$

Припустимо протилежне, тобто $\operatorname{rank}(xb) < \operatorname{rank}(b)$. Маємо $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(xbx^{-1}) \leq \operatorname{rank}(xb) < \operatorname{rank}(b)$, що суперечить умові.

Тепер обґрунтуємо рівність

$$x^{-1}x = b. \tag{4}$$

Для цього розглянемо всі можливі випадки:

a) $x^{-1}x < b$,

b) $b < x^{-1}x$,

c) ідемпотенти $x^{-1}x$ і b утворюють антиланцюжок,

d) $x^{-1}x = b$.

Якщо припустити, що $x^{-1}x < b$, то $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(x^{-1}x) < \operatorname{rank}(b)$, що суперечить умові. Тобто випадок a) неможливий.

Аналогічно не виконується умова b). Далі, припустимо, що виконується умова c), тоді $x^{-1}xb < x^{-1}x$. Скориставшись рівністю (3), одержимо $\operatorname{rank}(x^{-1}xb) = \operatorname{rank}(xb) = \operatorname{rank}(b)$. Але $\operatorname{rank}(x^{-1}xb) < \operatorname{rank}(x^{-1}x)$. Звідси $\operatorname{rank}(b) < \operatorname{rank}(x^{-1}x) = \operatorname{rank}(x)$, що суперечить умові.

Таким чином, залишається одна можливість: $x^{-1}x = b$.

Покажемо, що

$$x^{-1}ax = b. \tag{5}$$

Дійсно, застосовуючи рівності (1) і (4), маємо $x^{-1}ax = x^{-1}xx^{-1}x = x^{-1}x = b$.

Тепер доведемо ізоморфізм напіврешіток bE і aE. Визначимо функцію $F: bE \to aE$. А саме, якщо $c \in bE$, то $F(c) = xcx^{-1}$.

1. Доведемо, що $F(c) \in aE$. Дійсно, оскільки $c \in bE$, то $c = cb$. Далі, $F(c) = xcx^{-1} = xcbx^{-1}$. З рівності (2) випливає рівність $x^{-1}a = bx^{-1}$, тому $F(c) = xcx^{-1}a$. Отже, $xcx^{-1} \leq a$, тобто $xcx^{-1} \in aE$.

2. Доведемо, що F — сюр'єктивна функція, тобто $F(bE) = aE$. Нехай $m \in aE$, тоді $ma = m$. Спочатку покажемо, що $x^{-1}mx \in bE$. Дійсно, $x^{-1}mx = x^{-1}max =$ [застосовуємо рівність (2)] $= x^{-1}mxb$. Отже, $x^{-1}mx \leq b$, тобто $x^{-1}mx \in bE$. Далі, $F(x^{-1}mx) = xx^{-1}mxx^{-1} =$ [застосовуємо рівність (1)] $=$ $= ama = am = m$.

3. Доведемо, що F — ін'єкція. Нехай $b_1 \in bE$ і $b_2 \in bE$, причому $b_1 \neq b_2$. Покажемо, що $F(b_1) \neq F(b_2)$. Припустимо протилежне, тобто $F(b_1) = F(b_2)$ або $xb_1x^{-1} = xb_2x^{-1}$, тоді $x^{-1}xb_1x^{-1}x = x^{-1}xb_2x^{-1}x =$ [застосовуємо рівність (4)] $= bb_1b = bb_2b$. Звідси $b_1 = b_2$. Суперечність.

Нарешті доведемо, що F — ізоморфізм. Нехай $b_1 \in bE$ і $b_2 \in bE$. Тоді

$$F(b_1) \cdot F(b_2) = xb_1x^{-1}xb_2x^{-1} = xx^{-1}xb_1b_2x^{-1} = xb_1b_2x^{-1} = F(b_1 \cdot b_2).$$

Лема 3. *Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої E має скінченну довжину.*

Якщо ідемпотенти a і b такі, що $SaS = SbS$, то $aE \cong bE$.

Доведення. Знайдуться елементи x і y такі, що $a = xby$. Доведемо, що $a = axb(ax)^{-1} = axbx^{-1}a$. Дійсно, $axbx^{-1}a = axbx^{-1}xby = axx^{-1}xbby = axby =$ $= aa = a$. З рівності $SaS = SbS$ випливає, що $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$. Далі, $\operatorname{rank}(a) =$ $= \operatorname{rank}(axbx^{-1}a) \leq \operatorname{rank}(ax)$. Крім того, $\operatorname{rank}(ax) \leq \operatorname{rank}(a)$. Отже, $\operatorname{rank}(a) =$ $= \operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(ax)$. Таким чином, за попередньою лемою $aE \cong bE$.

Перейдемо до доведення теореми 2. Спочатку доведемо *достатність*. Отже, нехай виконуються умови 1 і 2 теореми 2. Умова 1 забезпечує лінійну впорядкованість (відносно включення) ідеалів напівгрупи S (див. [16], теорему 2). Покажемо тепер, що будь-яка конгруенція Θ напівгрупи S має форму $\Theta = I \times$ $\times I \bigcup \Omega$, де I — ідеал напівгрупи S, а $\Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна). Отже, нехай Θ — конгруенція на S. Легко перевірити, що множина $I_\Theta =$ $= \{x \in S | \langle x, 0 \rangle \in \Theta\}$ є ідеалом. Оскільки кожний ідеал напівгрупи S є ранговим (див. [16], теорему 2), то існує натуральне число k таке, що $I_\Theta = I_k =$ $= \{x \in S | \operatorname{rank}(x) \leq k\}$. Нехай $\langle x, y \rangle \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(x) > k$, тоді, очевидно, і $\operatorname{rank}(y) > k$.

Покажемо спочатку, що $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(y)$. Припустимо протилежне, тобто $\operatorname{rank}(x) \neq \operatorname{rank}(y)$. Нехай для конкретності $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$. Оскільки $\langle x, y \rangle \in \Theta$, то $\langle xx^{-1}, yy^{-1} \rangle \in \Theta$. Звідси $\langle xx^{-1}yy^{-1}, yy^{-1} \rangle \in \Theta$.

Розглянемо можливі випадки.

Перший випадок: $\operatorname{rank}(xx^{-1}yy^{-1}) \leq k$.

Тоді $\langle 0, yy^{-1} \rangle \in \Theta$. Звідси $yy^{-1} \in I_k$, тобто $\operatorname{rank}(yy^{-1}) \leq k$. Але $\operatorname{rank}(yy^{-1}) = \operatorname{rank}(y) > k$. Суперечність.

Другий випадок: $\operatorname{rank}(xx^{-1}yy^{-1}) > k$.

Зрозуміло, що $xx^{-1}yy^{-1} \leq yy^{-1}$, а оскільки $\operatorname{rank}(xx^{-1}yy^{-1}) \leq \operatorname{rank}(xx^{-1}) =$ $= \operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y) = \operatorname{rank}(yy^{-1})$, то $xx^{-1}yy^{-1} < yy^{-1}$. За умовою 2 (тобто умовою R, яка за лемою 1 еквівалентна умові D) існує ідемпотент $w \in E$ такий, що

$\operatorname{rank}(xx^{-1}yy^{-1}) = \operatorname{rank}(w)$, $w < yy^{-1}$, $w \neq xx^{-1}yy^{-1}$. Оскільки $\langle xx^{-1}yy^{-1}, yy^{-1}\rangle \in \Theta$, то $\langle xx^{-1}yy^{-1}w, yy^{-1}w\rangle \in \Theta$ або $\langle xx^{-1}w, w\rangle \in \Theta$.

Якщо $\operatorname{rank}(xx^{-1}w) \leq k$, то $\langle 0, w\rangle \in \Theta$. Звідси $\operatorname{rank}(w) \leq k$. Суперечність.

Якщо ж $\operatorname{rank}(xx^{-1}w) > k$, то застосуємо до впорядкованої пари $\langle xx^{-1}w, w\rangle$ такі самі міркування, як і вище. Продовжуючи цей процес (а він, очевидно, скінченний), одержуємо $\langle 0, b\rangle \in \Theta$ для деякого $b \in E$, причому $\operatorname{rank}(b) > k$. Суперечність. Таким чином, $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(y)$.

Тепер покажемо, що $xx^{-1} = yy^{-1}$ і $x^{-1}x = y^{-1}y$, тобто $\langle x, y\rangle \in H$, де H є відношенням Гріна. Оскільки $\langle x, y\rangle \in \Theta$, то $\langle x, xx^{-1}y\rangle \in \Theta$. Очевидно, має місце нерівність $xx^{-1}y \leq y$. Якщо припустити, що $xx^{-1}y < y$, то $\operatorname{rank}(xx^{-1}y) < \operatorname{rank}(y)$. З іншого боку, $\langle y, xx^{-1}y\rangle \in \Theta$, тому $\operatorname{rank}(xx^{-1}y) = \operatorname{rank}(y)$. Суперечність. Таким чином, $xx^{-1}y = y$. Звідси $xx^{-1}yy^{-1} = yy^{-1}$. Отже, $yy^{-1} \leq xx^{-1}$. Якщо припустити, що $yy^{-1} < xx^{-1}$, то $\operatorname{rank}(y) < \operatorname{rank}(x)$. Суперечність. Отже, $yy^{-1} = xx^{-1}$. Аналогічно доводиться, що $y^{-1}y = x^{-1}x$. Отже, ідеали напівгрупи S лінійно впорядковані і будь-яка конгруенція Θ має форму $\Theta = I \times I \cup \Omega$ (де I — ідеал, а $\Omega \subseteq H$). Таким чином, за теоремою 4 (див. [16]) напівгрупа S є переставною.

Тепер доведемо *необхідність*. Нехай напівгрупа S є переставною, тоді (див. [9], теорему 4) її ідеали утворюють ланцюжок відносно включення, а отже (див. [16], теорему 2), виконується умова 1 теореми.

Доведемо, що виконується й умова 2. Доведення проведемо від супротивного, тобто припустимо, що існує ідемпотент $w \in S$, для якого умова 2 (див. формулювання теореми 2) не виконується. Нехай $\operatorname{rank}(w) = k + 1$, де $k + 1 \geq 2$. Розглянемо на S бінарне відношення $\Sigma = I_{k-1} \times I_{k-1} \cup \rho \cup \Delta$, де $\rho = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \wedge \operatorname{rank}(x) = k \wedge \operatorname{rank}(y) = k + 1\}$, $\Delta = \{\langle x, x\rangle \mid x \in S\}$, $I_{k-1} = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq k - 1\}$. Доведемо двосторонню стабільність бінарного відношення Σ. Доведення розіб'ємо на кілька лем.

Лема 4. *Нехай* $\langle a, b\rangle \in \rho$ (*тобто* $a \leq b$, $\operatorname{rank}(a) = k$ *і* $\operatorname{rank}(b) = k + 1$).

Якщо для деякого $c \in S$ $\operatorname{rank}(ac) = k$, *то* $\langle ac, bc\rangle \in \Sigma$. *Якщо ж* $\operatorname{rank}(ca) = k$, *то* $\langle ca, cb\rangle \in \Sigma$.

Доведення. Оскільки за умовою $a < b$, то $ac \leq bc$. Якщо $ac = bc$, то $\langle ac, bc\rangle \in \Sigma$. Якщо ж $ac < bc$, то $k = \operatorname{rank}(ac) < \operatorname{rank}(bc) \leq \operatorname{rank}(b) = k + 1$. Отже, $\operatorname{rank}(bc) = k + 1$. Таким чином, $\langle ac, bc\rangle \in \rho \subset \Sigma$.

Друга частина леми доводиться аналогічно.

Лема 5. *Якщо* $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(ab) = m$, *то* $a^{-1}a \leq bb^{-1}$. *Якщо ж* $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(ba)$, *то* $aa^{-1} \leq b^{-1}b$.

Доведення. Доведемо першу половину леми (друга доводиться аналогічно). Можливі три випадки:

a) $bb^{-1} < a^{-1}a$;

b) елементи $a^{-1}a$ і bb^{-1} утворюють антиланцюжок;

c) $a^{-1}a \leq bb^{-1}$.

Припустимо, що $bb^{-1} < a^{-1}a$, тоді $m = \operatorname{rank}(ab) = \operatorname{rank}(abb^{-1}) \leq \operatorname{rank}(bb^{-1}) < \operatorname{rank}(a^{-1}a) = \operatorname{rank}(a) = m$. Суперечність.

Нехай тепер елементи bb^{-1} і $a^{-1}a$ утворюють антиланцюжок. Тоді $a^{-1}abb^{-1} < a^{-1}a$. Покажемо, що $\operatorname{rank}(a^{-1}abb^{-1}) = m$. Дійсно, $m = \operatorname{rank}(ab) = \operatorname{rank}(aa^{-1}abb^{-1}b) \leq \operatorname{rank}(a^{-1}abb^{-1})$. З іншого боку, $\operatorname{rank}(a^{-1}abb^{-1}) \leq m$. Отже, $\operatorname{rank}(a^{-1}abb^{-1}) = m$. Далі, оскільки $a^{-1}abb^{-1} < a^{-1}a$, то $m = \operatorname{rank}(a^{-1}abb^{-1}) < \operatorname{rank}(a^{-1}a) = \operatorname{rank}(a) = m$. Суперечність.

Залишається одна можливість : $a^{-1}a \leq bb^{-1}$.

Лема 6. *Нехай* $a < b$, *крім того*, $\operatorname{rank}(a) = k$ *і* $\operatorname{rank}(b) = k + 1$.

Якщо $\operatorname{rank}(bc) = k + 1$, *то* $\operatorname{rank}(ac) = k$. *Якщо ж* $\operatorname{rank}(cb) = k + 1$, *то* $\operatorname{rank}(ca) = k$.

Доведення. Доведемо першу частину леми (друга доводиться аналогічно).

Оскільки $\operatorname{rank}(bc) = \operatorname{rank}(b)$, то за лемою 5 $b^{-1}b \leq cc^{-1}$. Звідси $a^{-1}ab^{-1}b \leq a^{-1}acc^{-1}$. Але $a^{-1}ab^{-1}b = a^{-1}a$, тому $a^{-1}a \leq a^{-1}acc^{-1}$. Отже, $k = \operatorname{rank}(a^{-1}a) \leq \operatorname{rank}(a^{-1}acc^{-1}) \leq \operatorname{rank}(ac)$. З іншого боку, $\operatorname{rank}(ac) \leq \operatorname{rank}(a) = k$. Таким чином, $\operatorname{rank}(ac) = k$.

Далі будемо доводити правосторонню стабільність бінарного відношення Σ. Нехай $\langle a, b\rangle \in \Sigma$. Якщо $\langle a, b\rangle \in I_{k-1} \times I_{k-1}$ або $a = b$, то доводити немає чого.

Розглянемо випадок, коли $\langle a, b\rangle \in \rho$, тобто $a < b$, $\operatorname{rank}(a) = k$ і $\operatorname{rank}(b) = k + 1$.

Нехай $c \in \Sigma$. Розглянемо можливі випадки:

A) $\operatorname{rank}(ac) = k$.

Тоді за лемою 4 $\langle ac, bc\rangle \in \rho$.

B) $\operatorname{rank}(ac) < k$.

Тоді за лемою 6 $\operatorname{rank}(bc) \leq k$. Покажемо, що $\operatorname{rank}(bc) < k$. Припустимо, що $\operatorname{rank}(bc) = k$. Розглянемо ідемпотенти aa^{-1}, bb^{-1} і $bcc^{-1}b^{-1}$. Зрозуміло, що мають місце нерівності $aa^{-1} < bb^{-1}$, $bcc^{-1}b^{-1} < bb^{-1}$. Крім того, $\operatorname{rank}(aa^{-1}) = \operatorname{rank}(bcc^{-1}b^{-1}) = k$ і $\operatorname{rank}(bb^{-1}) = k + 1$. Оскільки $\operatorname{rank}(w) = \operatorname{rank}(bb^{-1})$, то (див. [16], теорему 2) $SwS = Sbb^{-1}S$. Отже, за лемою 3 $wE \cong bb^{-1}E$ (тут $\cong$ позначає ізоморфізм). Звідси робимо висновок, що $aa^{-1} = bcc^{-1}b^{-1}$. Далі, оскільки $a < b$, то $a = ab^{-1}b$ і $ab^{-1} = aa^{-1}$. Звідси $ab^{-1}b = aa^{-1}b = a$. Помноживши рівність $aa^{-1} = bcc^{-1}b^{-1}$ зліва на aa^{-1}, одержимо $aa^{-1} = aa^{-1}bcc^{-1}b^{-1} = acc^{-1}b^{-1}$. Отже, $k = \operatorname{rank}(aa^{-1}) = \operatorname{rank}(acc^{-1}b^{-1}) \leq \operatorname{rank}(ac) < k$. Суперечність.

Таким чином, $\operatorname{rank}(bc) < k$. Звідси $\langle ac, bc\rangle \in I_{k-1} \times I_{k-1} \subseteq \Sigma$. Отже, бінарне відношення $\Sigma = I_{k-1} \times I_{k-1} \cup \rho \cup \Delta$ є стабільним справа. Аналогічно доводиться стабільність зліва. Легко зрозуміти, що бінарне відношення $\Sigma = I_{k-1} \times I_{k-1} \cup \rho^{-1} \cup \Delta$ теж стабільне, а тому і бінарне відношення $\Theta = I_{k-1} \times I_{k-1} \cup \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta$ теж є стабільним. Далі, позначимо через Θ^t транзитивне замикання бінарного відношення Θ. Легко перевірити, що Θ^t — конгруенція. З [16] (теорема 4) відомо, що інверсна напівгрупа S скінченного рангу з нулем є переставною тоді і тільки тоді, коли кожна конгруенція має форму $I \times I \cup \Omega$, де I — ідеал напівгрупи S, а $\Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна). Конгруенція Θ^t, яку ми сконструювали, виходячи з припущення, що умова 2 (див. формулювання теореми 2) не виконується, не підпадає під наведену вище форму конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем. Дійсно, $I_{k-1} = \{ x \in S \mid \langle x, 0\rangle \in \Theta^t\}$ і, крім того, існує пара $\langle a, b\rangle \in \Theta^t$ така, що $\operatorname{rank}(a) = k$, $\operatorname{rank}(b) = k + 1$, тобто $\langle a, b\rangle \notin H$.

Одержана суперечність і завершує доведення теореми 2.

Наслідок. *Нехай S — переставна інверсна напівгрупа з нулем, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину.*

Будь-який ідеал напівгрупи S є переставною напівгрупою.

Зауваження. Цей наслідок також безпосередньо випливає з леми 3.2 статті [8].

3. Структура переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу без нуля. В цьому пункті ми з'ясуємо структуру переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу, що не містить нуля.

Має місце такий результат.

Теорема 3. *Нехай S — інверсна напівгрупа без нуля, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину.*

Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли S — група.

Доведення. Легко переконатися, що множина $K = \{ x \in S \mid \operatorname{rank}(x) = 0 \}$ є групою, яка буде ядром напівгрупи S. Оскільки за умовою напівгрупа S не містить нуля, то група K не є тривіальною, тобто $|K| \geq 2$. На підставі леми 8 (див. [2]) і теореми 3 (див. [9]) безпосередньо робимо висновок, що $K = S$, тобто S — група.

4. Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем. Цілком природно постає питання: які необхідні і достатні умови треба накласти на напіврешітку L, щоб вона була напіврешіткою ідемпотентів деякої переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок, а саме, коли напіврешітка L має довжину, що не перевищує 1.

Теорема 4. *Будь-яка напіврешітка L, довжина якої не перевищує 1, є напіврешіткою ідемпотентів деякої переставної інверсної напівгрупи з нулем.*

Доведення. Розглянемо антигрупу $\Phi(L)$ — інверсну напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки L. Легко довести, що антигрупа $\Phi(L)$ є напівгрупою Брандта, яка, як відомо, є переставною. Крім того, очевидно, що напіврешітка ідемпотентів антигрупи $\Phi(L)$ ізоморфна напіврешітці L.

Тепер розглянемо випадок, коли довжина напіврешітки більша або дорівнює 2.

Теорема 5. *Нехай напіврешітка P має скінченну довжину, яка не менша ніж 2. Напіврешітка P є напіврешіткою ідемпотентів деякої переставної інверсної напівгрупи з нулем тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови*:

1) *якщо* $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$, *то* $aP \cong bP$;

2) *для будь-якого* $z \in P$ ($\operatorname{rank}(z) \geq 2$) *існують* x *і* y *такі, що* $x < z$, $y < z$, $x \neq y$ *і* $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(y) = \operatorname{rank}(z) - 1$.

Доведення. Нехай виконуються умови 1 і 2. Розглянемо антигрупу $\Phi(P)$ — інверсну напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки P. Очевидно, що напіврешітка ідемпотентів антигрупи $\Phi(P)$ ізоморфна P. Крім того, $\Phi(P)$ містить нуль. Умова 1 згідно з теоремою 1 (див. [15]) забезпечує лінійну впорядкованість ідеалів антигрупи $\Phi(P)$, а отже, для напівгрупи $\Phi(P)$ виконується умова 1 теореми 2. Таким чином, за теоремою 2 антигрупа $\Phi(P)$ є переставною.

Навпаки, якщо ми маємо переставну інверсну напівгрупу S з нулем, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину, причому S містить елемент, ранг якого не менший ніж 2, то за теоремою 2 напіврешітка ідемпотентів напівгрупи S задовольняє умову 2. Покажемо, що виконується й умова 1. Дійсно, нехай a і b — ідемпотенти напівгрупи S, причому $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$. Тоді за теоремою 2 $SaS = SbS$, а отже, за лемою 3 $aE \cong bE$ (E — напіврешітка ідемпотентів напівгрупи S).

5. Приклади і ілюстрації. Теорема 2 дає зручний критерій перевірки інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем на наявність у неї властивості комутативності конгруенцій. Перед тим як навести конкретні приклади ще раз нагадаємо, що умова 1 (див. формулювання теореми 2) еквівалентна лінійній впорядкованості (відносно включення) ідеалів напівгрупи.

***Приклад* 1.** Нехай V — скінченновимірний лінійний простір. Позначимо через $\mathrm{Aut}_p(V)$ інверсну напівгрупу всіх часткових автоморфізмів векторного простору V. Очевидно, що $\mathrm{Aut}_p(V)$ є напівгрупою скінченного рангу і містить нуль. Відомо, що ідеали напівгрупи $\mathrm{Aut}_p(V)$ лінійно впорядковані, тобто виконується умова 1. Очевидно, що напіврешітка ідемпотентів інверсної напівгрупи $\mathrm{Aut}_p(V)$ ізоморфна напіврешітці підпросторів лінійного простору V. Після цього зауваження легко перевірити, що для напівгрупи $\mathrm{Aut}_p(V)$ виконується й умова 2. Отже, $\mathrm{Aut}_p(V)$ є переставною інверсною напівгрупою.

***Приклад* 2.** Нехай $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Позначимо через $IO(N)$ інверсну напівгрупу всіх взаємно однозначних перетворень, що зберігають порядок (в даному випадку звичайний порядок на множині N), а через $IS(N)$ симетричну інверсну напівгрупу на множині N. Очевидно, що $IO(N) \subseteq IS(N)$. Будь-яка інверсна напівгрупа A така, що $IO(N) \subseteq A \subseteq IS(N)$, є переставною.

Проілюструємо теорему 5 за допомогою діаграм.

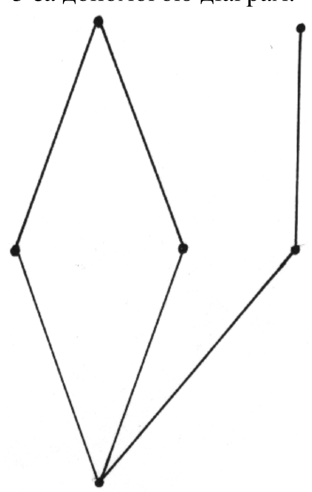

Рис. 1

На рис. 1 зображено діаграму напіврешітки, яка не є напіврешіткою жодної переставної інверсної напівгрупи з нулем. Тут не виконується ані умова 1, ані умова 2 (див. теорему 5).

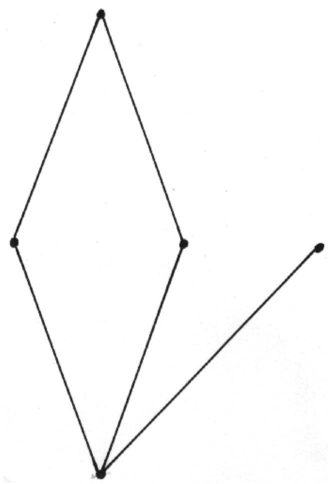

Рис. 2

На рис. 2 наведено діаграму напіврешітки, для якої, очевидно, виконуються умови 1 і 2 (див. теорему 5). Отже, ця напіврешітка є напіврешіткою ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи з нулем. В якості такої напівгрупи можна взяти напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами даної напіврешітки.

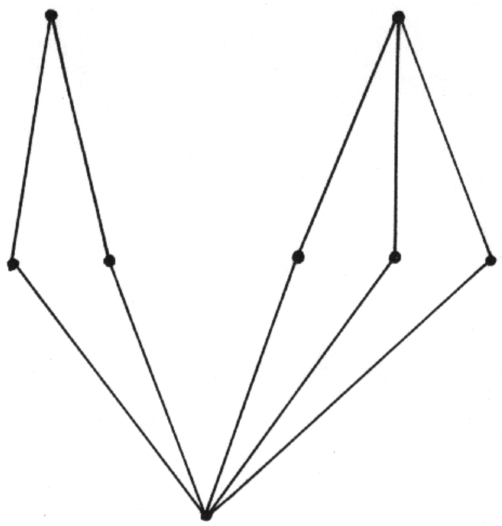

Рис. 3

На рис. 3 зображено діаграму напіврешітки, для якої виконується умова 2, але, очевидно, не виконується умова 1. Отже, ця напіврешітка не може бути напіврешіткою переставною інверсної напівгрупи з нулем.

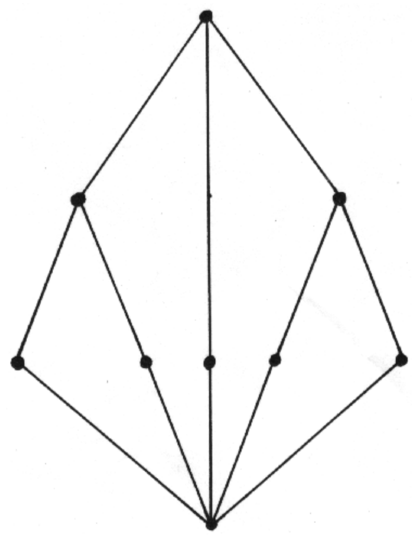

Рис. 4

На рис. 4 зображено діаграму напіврешітки, для якої, очевидно, виконуються умови 1 і 2 теореми 5. Отже, ця напіврешітка є напіврешіткою ідемпотентів деякої переставної інверсної напівгрупи з нулем. Очевидно, що дана напіврешітка не задовольняє умову Жордана – Гьольдера.

1. *Клифорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1, 2.
2. *Tamura T.* Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France. – 1969. – **97**. – P. 369 – 380.

3. *Schein B. M.* Commutative semigroups where congruences form a chain // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. – 1969. – **17**. – P. 523 – 527.
4. *Schein B. M.* Corrigenda to „Commutative semigroups where congruences form a chain” // Ibid. – 1975. – **12**. – P. 1247.
5. *Mitsch H.* Semigroups and their lattice of congruences. I // Semigroup Forum. – 1983. – **26**. – P. 1 – 63.
6. *Mitsch H.* Semigroups and their lattice of congruences. II // Ibid. – 1997. – **54**. – P. 1 – 42.
7. *Nagy A., Jones Peter R.* Permutative semigroups whose congruences form a chain // Ibid. – 2004. – **69**, № 3. – P. 446 – 456.
8. *Trotter P. G., Tamura T.* Completely semisimple inverse Δ-semigroups admitting principal series // Pasif. J. Math. – 1977. – **68**, № 2. – P. 515 – 525.
9. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
10. *Cherubini A., Varisco A.* Permutable duo semigroups // Ibid. – 1984. – **28**. – P. 155 – 172.
11. *Bonzini C., Cherubini A.* Medial permutable semigroups // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. – 1981. – **39**. – P. 21 – 39.
12. *Jiang Z.* *LC*-commutative permutable semigroups // Semigroup Forum. – 1995. – **52**. – P. 191 – 196.
13. *Jiang Z., Chen L.* On $RDGC_n$-commutative permutable semigroups // Period. math. hung. – 2004. – **49**, № 2. – P. 91 – 98.
14. *Bonzini C., Cherubini A.* Permutable regular ω-semigroups // Boll. Unione mat. ital. – 1988. – **7**. – P. 719 – 728.
15. *Дереч В. Д.* Про переставні конгруенції на антигрупах скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 3. – С. 346 – 351.
16. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Там же. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
17. *Derech V.* On permutable inverse semigroups of finite rank // 5th Int. Algebraic Conf. in Ukraine: Abstrs (Odessa, July 20 – 27, 2005). – Odessa, 2005. – P. 57.

Одержано 06.09.2005