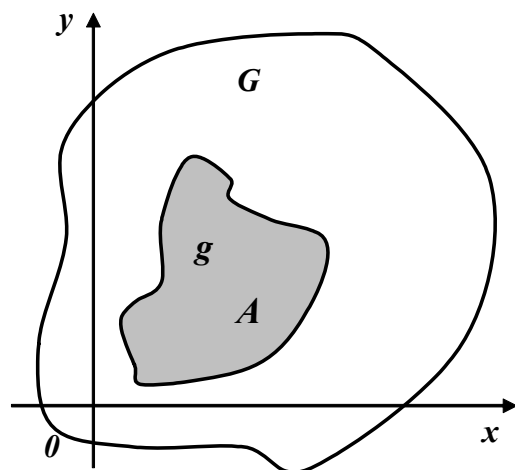


**ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНостей ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
ЧАСТИНА 2**



$$p(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}$$

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

**ЧАСТИНА 2
Навчальний посібник**

Вінниця
ВНТУ
2016

УДК 519.21(075.8)

ББК 22.я73

Е 22

Автори:

І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук,

В. В. Хом'юк

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 8 від 26. 03. 2015 р.)

Рецензенти:

Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор

Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор

Т. Б. Мартинюк, доктор технічних наук, доцент

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Е 22 Частина 2 : навчальний посібник / І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 161 с.

Даний посібник є керівництвом до практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики, в якому систематизовано методи розв'язування відповідних задач. Весь матеріал посібника розділено на вісім розділів і містить велику кількість задач, які висвітлюють основні питання теорії ймовірностей, математичної статистики. В кожній темі розглянуто розв'язування основних задач та наведено завдання для самостійної роботи, які дають можливість студенту закріпити розібраний матеріал.

До кожної теми розглянуто достатньо варіантів завдань для самостійної роботи.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 519.21(075.8)

ББК 22.я73

© І. Хом'юк, Н. Сачанюк-Кавецька, М. Ковальчук, В. Хом'юк, 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ТЕМА 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	5
1.1 Класифікація подій та операції над подіями	5
1.2 Класичне означення ймовірності	5
Завдання для самостійної роботи	10
ТЕМА 2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	18
2.1 Розв'язування задач з використанням теорем додавання та множення ймовірностей	18
2.2 Формула повної ймовірності. Формула Байєса	21
Завдання для самостійної роботи	23
ТЕМА 3 ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ	46
3.1 Розв'язування задач із використанням теорем повторення випробувань	46
Завдання для самостійної роботи	49
ТЕМА 4 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ	56
4.1 Дискретні випадкові величини, їхній закон розподілу та числові характеристики. Функція розподілу випадкової величини	56
4.2 Неперервні випадкові величини, їх числові характеристики. Щільність ймовірності	61
Завдання для самостійної роботи	67
ТЕМА 5 ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ	84
5.1 Приклади розв'язування задач	84
Завдання для самостійної роботи	86
ТЕМА 6 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ	92
6.1 Варіаційні ряди, їх графічне подання та характеристики	92
6.2 Поняття оцінки параметрів. Методи знаходження оцінок	98
6.3 Побудова теоретичного закону розподілу за експериментальними даними. Перевірка гіпотез про закон розподілу	101
Завдання для самостійної роботи	104
ТЕМА 7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ	112
7.1 Завдання з теорії ймовірностей	112
7.2 Завдання з математичної статистики	122
ТЕМА 8 ТЕСТИ З ДИСЦИПЛІНИ	127
ЛІТЕРАТУРА	155
ГЛОСАРІЙ	156
Додаток А	157
Додаток Б	158
Додаток В	159
Додаток Г	160
Додаток Д	161

ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ. Очевидно, що в природі, техніці та економіці немає явищ, в яких би не був присутній елемент випадковості. Існує два підходи до вивчення цих явищ. Класичний підхід полягає в тому, що виділяються основні фактори, які визначають дане явище і формують його основну закономірність, а рештою другорядних факторів нехтують. Такий підхід притаманний «точним» наукам.

Однак при дослідженні багатьох явищ необхідно враховувати не тільки основні фактори, а й множину другорядних факторів, які призводять до випадкових збурень та спотворення результату. Тому інший підхід до вивчення випадкових явищ потребує спеціальних методів дослідження таких явищ. Розробкою саме таких методів, вивченням специфічних закономірностей спостережуваних випадкових явищ і займається теорія ймовірностей.

Вивчення ймовірнісних моделей дає змогу зрозуміти різноманітні властивості випадкових явищ на абстрактному та узагальненому рівні без експерименту. При великій кількості спостережень випадкові впливи значною мірою нівелюються і одержаний результат стає не випадковим, передбачуваним. Це твердження і є базою для практичного використання ймовірнісних методів дослідження. Метою вказаних методів є вивчення закономірностей масових випадкових явищ, прогнозування їх характеристик, контроль над цими явищами, обмеження області дії випадковості.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці курсу теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв'язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі фізичного, технічного та економічного змісту), які наводяться з розв'язуванням, та задачами для самостійної роботи. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми. Істотною особливістю даного посібника є розгляд з кожної теми творчих завдань чи завдань підвищеної складності, які позначені (*), що дозволяють здійснити диференційований підхід при роботі зі студентами.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

ТЕМА 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Класифікація подій та операції над подіями

Приклад 1.1 Проводяться три незалежні постріли по мішені. Описати події: а) $A =$ «В мішені один отвір»; б) $B =$ «В мішені не менше двох отворів».

Розв'язування

а) Зрозуміло, що подія A може відбуватись по-різному, оскільки улучення в мішень можливе при першому, другому або третьому пострілах. Решта пострілів є невдалими. Тому розглянемо елементарні події:

$\omega_1 =$ «Улучення в мішень з першого пострілу»;

$\omega_2 =$ «Улучення в мішень з другого пострілу»;

$\omega_3 =$ «Улучення в мішень з третього пострілу».

Тоді їх антиподії:

$\overline{\omega_1} =$ «В мішень не влучили з першого пострілу»;

$\overline{\omega_2} =$ «В мішень не влучили з другого пострілу»;

$\overline{\omega_3} =$ «В мішень не влучили з третього пострілу».

Використовуючи розглянуті елементарні події, маємо:

$$A = \omega_1 \overline{\omega_2} \overline{\omega_3} + \overline{\omega_1} \omega_2 \overline{\omega_3} + \overline{\omega_1} \overline{\omega_2} \omega_3.$$

б) Подія B означає, що в мішені має бути два або три отвори. Використовуючи розглянуті елементарні події, маємо:

$$B = \omega_1 \omega_2 \overline{\omega_3} + \overline{\omega_1} \omega_2 \omega_3 + \omega_1 \overline{\omega_2} \omega_3 + \overline{\omega_1} \omega_2 \omega_3.$$

1.2 Класичне означення ймовірності

Приклад 1.2 В ліфт на першому поверсі дев'ятиповерхового будинку увійшло 4 особи, кожна з яких може вийти незалежно від інших на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Яка ймовірність того, що всі пасажирів вийдуть: а) на шостому поверсі; б) на одному поверсі; в) на різних поверхах?

Розв'язування

Оскільки загальна кількість випадків – це є розміщення з повтореннями, то $n = 8^4 = 4096$.

Згідно з умовою задачі розглянемо три події:

$A =$ «Всі пасажирів вийдуть на шостому поверсі»;

B = «Всі пасажери вийдуть на одному поверсі»;
 C = «Всі пасажери вийдуть на різних поверхах».

Оскільки в довільному будинку тільки один шостий поверх, то число випадків, сприятливих події A – m_1 , дорівнює 1. Тоді

$$p(A) = \frac{1}{4096} = 0,00024.$$

Події B сприятимуть $m_2 = 8$ випадків, тому

$$p(B) = \frac{8}{4096} = 0,00195.$$

Події C сприятимуть $m_2 = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$ випадків і

$$p(C) = \frac{70}{4096} = 0,0171.$$

Приклад 1.3 В магазині продали 21 холодильник з 25 холодильників трьох марок, що були наявні в кількості 5, 7 та 13 штук. Припускаючи, що ймовірність бути проданим для холодильника кожної марки однакова, знайти ймовірність того, що залишились нерозпроданими холодильники: а) однієї марки; б) трьох різних марок.

Розв'язування

а) Нехай A = «Залишились нерозпроданими холодильники однієї марки». Загальна кількість способів, якими можна одержати 4 (непроданих) холодильники з 25, дорівнює $n = C_{25}^4$. Кількість способів, якими можна одержати 4 холодильники першої марки з 5, дорівнює $m_1 = C_5^4$; другої марки із 7 – $m_2 = C_7^4$ та третьої марки з 13 – $m_3 = C_{13}^4$. Події A за правилом додавання подій сприяють $m = m_1 + m_2 + m_3 = C_5^4 + C_7^4 + C_{13}^4$ випадків. Тому

$$p(A) = \frac{C_5^4 + C_7^4 + C_{13}^4}{C_{25}^4} = \frac{5 + 35 + 715}{12\,650} = \frac{755}{12\,650} = 0,06.$$

б) Нехай B = «Залишились нерозпроданими холодильники трьох різних марок». Ця подія може відбуватись за одним з трьох варіантів. За першим варіантом подія B відбудеться, якщо залишаться 1, 1, 2 холодильники відповідно 1-ї, 2-ї та 3-ї марок; за другим варіантом – 1, 2, 1 та за третім 2, 1, 1 холодильники 1-ї, 2-ї та 3-ї марок, відповідно. Згідно з умовою задачі та правилом множення подій маємо кількість випадків, сприятливих першому варіанту $m_1 = C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2$; другому – $m_2 = C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1$; третьому варіанту – $m_3 = C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1$. Загальна кількість сприятливих події B випадків дорівнює $m = m_1 + m_2 + m_3$. Таким чином,

$$p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2 + C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1 + C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1}{C_{25}^4} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 78 + 5 \cdot 21 \cdot 13 + 10 \cdot 7 \cdot 13}{12650} =$$
$$= \frac{5005}{12650} = 0,396.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бочаров П. П. Теория вероятностей и математическая статистика / П. П. Бочаров, А. В. Печенкин. – М. : Гардарика, 1998.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1988.
3. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высшая школа, 2002.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов / Вентцель Е. С. – [7-е изд., стереотип]. – М. : Высшая школа, 2001.
5. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1979.
6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1977.
7. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач / Кармелюк Г. І. – К. : Центр учбової літератури, 2007.
8. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А. Н. – М. : Наука, 1975.
9. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / Кремер Н. Ш. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2004.
10. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / Сеньо П. С. – Київ : Центр навчальної літератури, 2004.
11. Четыркин Е. М. Вероятность и статистика / Е. М. Четыркин, И. Л. Калихман. – М. : Финансы и статистика, 1982.

Додаток А

Значення функції Пуассона $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

$m \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

$m \backslash \lambda$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Навчальне видання

**Хом'юк Ірина Володимирівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна
Хом'юк Віктор Вікторович**

**Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.
Частина 2**

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено Н. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк.
Наклад пр. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38,
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

