УДК 681.3.06

Михалевич В.М., Вінниця, Україна
Крупський Я.В., Вінниця, Україна

МЕТОДИКА СТВОРЕННЯ ГЕНЕРАТОРІВ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Актуальність. В роботах [1, 2, 3, 4, 5] обґрунтовується необхідність створення навчально-контролюючого комплексу з математики та обговорюються проблеми розробки одного з елементів такого комплексу - генератора завдань. За умови інтенсивних пошуків нових методів, форм та змісту навчання, динамічних змін спеціальностей та навчальних планів, переходу від паперових до електронних форм методичного забезпечення навчального процесу зростають вимоги до цього забезпечення. Насамперед методичне забезпечення повинне бути мобільним, тобто підготовленим до внесення швидких змін. Саме тому мова повинна йти не просто про створення конкретних генераторів завдань з математики, а про методику створення таких генераторів. Наявність такої методики дозволить швидко підготувати комплекс завдань для аудиторної або самостійної роботи учнів та студентів у відповідності до поточних вимог.

Об'єкт дослідження – розробка методичного забезпечення навчального процесу з математики.

Предмет дослідження – способи генерування завдань з математики.

Мета дослідження – створення та аналіз методики для генерування в середовищі системи символьних обчислень Maple типових завдань з математики.

Основні задачі дослідження:

1. Проаналізувати середовище системи Maple з точки зору перспективи створення генераторів завдань з математики.
2. Розробити ключові складові методики розробки генераторів завдань.
3. Реалізувати за допомогою запропонованої методики генератор завдань певного типу.
4. Експериментально перевірити ефективність розробленого генератора.

Основна частина. Спроби створення генераторів завдань з математики почалися разом із появою доступу в навчальних закладах до комп'ютерної техніки. Разом із швидким прогресом програмного середовища спостерігалося швидке моральне старіння конкретних програм-генераторів, розроблених ентузіастами. Стисла характеристика таких генераторів наведена в [5]. Один із основних недоліків таких генераторів - вузький діапазон програмного матеріалу з конкретної дисципліни, що охоплюється згенерованими прикладами. В інтернеті можна знайти велику кількість пропозицій щодо генераторів завдань з лінійної алгебри. Що ж стосується таких тем, як, наприклад, невизначені інтеграли, то за допомогою традиційного програмного інструментарію будь-якої сучасної мови програмування високого рівня створити ефективний генератор є задачею непростою навіть для професіонального програміста. Але з появою та швидким розвитком систем символьних обчислень така задача стає під силу будь-якому викладачеві. Адже система Maple має широкий інструментарій для роботи з математичними виразами та розвинуту мову програмування.

Перша задача, з якою зустрічається розробник генератора завдань є створення банку типових задач. Природно, що в типових задачах, які взяті з різних джерел можуть зустрічатися такі, що повторюються, в тому числі й неодноразово. Якщо мова йде про сотні типових прикладів, то вручну знаходити та вилучати всі приклади, що повторюються - задача доволі трудомістка.

Указана задача легко розв'язується за допомогою системи Maple. Послідовність математичних виразів в цій системі можна подати у вигляді **списку** або у вигляді **множини**. **Список** - упорядкована послідовність виразів, що береться в квадратні дужки. **Множина** - неупорядкована послідовність виразів, що береться в фігурні дужки [6]. Основна відмінність списку від множини у тому, що послідовність, подана у вигляді списку фактично не змінюється. При подачі послідовності у вигляді множини автоматично відбувається перевірка елементів на унікальність: якщо в послідовності є елементи, що повторюються, то в множині їм буде відповідати тільки один елемент. Надзвичайно важливо, що мова йде про елементи послідовності, які є не тільки числами, а можуть бути складними математичними виразами. Розглянемо приклад. Задамо послідовність підінтегральних функцій

```
> `Послідовність функцій`:=x^2*exp(x),x^2*ln(x),
ln(x),x*exp(2*x), x^2*exp(x), exp(x)*sin(x),
x*exp(2*x), x^3*exp(-x),  x^2*exp(-1/2*x), arctg(x),
exp(x)*cos(x), arcsin(1/2*x)/(2-x)^(1/2),  arctg((2*x-
1)^(1/2)),x*exp(2*x), exp(x)*sin(x);
```

Послідовність функцій :=

$$x^2\,\mathbf{e}^x,\ x^2\ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(3\,x)},\ \ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^2\,\mathbf{e}^x,\ \mathbf{e}^x\sin(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^3\,\mathbf{e}^{(-x)},\ x\,\mathbf{e}^x,$$
$$x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)},\ \mathrm{arctg}(x),\ \mathbf{e}^x\cos(x),\ \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}},\ \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,x-1}\,),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ \mathbf{e}^x\sin(x),\ 3\,x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Подамо послідовність у вигляді списку

```
> `Список функцій`:=[`Послідовність функцій`];
```

Список функцій :=

$$\left[x^2\,\mathbf{e}^x,\ x^2\ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(3\,x)},\ \ln(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^2\,\mathbf{e}^x,\ \mathbf{e}^x\sin(x),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ x^3\,\mathbf{e}^{(-x)},\ x\,\mathbf{e}^x,\right.$$
$$\left.x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)},\ \mathrm{arctg}(x),\ \mathbf{e}^x\cos(x),\ \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}},\ \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,x-1}\,),\ x\,\mathbf{e}^{(2\,x)},\ \mathbf{e}^x\sin(x),\ 3\,x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$$

Визначимо кількість елементів списку

```
> `Кількість елементів списку`=nops(`Список функцій`);
```

Кількість елементів списку = 18

Подамо ту саму послідовність у вигляді множини

```
> `Множина функцій`:={`Послідовність функцій`};
```

$$Множина\ функцій := \left\{ e^x \sin(x), x^3 e^{(-x)}, x^2 e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}, e^x \cos(x), \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2-x}}, x\, e^{(2x)}, x^2 e^x, \ln(x), \mathrm{arctg}(x), x^2 \ln(x), \mathrm{arctg}(\sqrt{2x-1}), x\, e^{(3x)}, x\, e^x, 3\, x\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \right\}$$

Визначимо кількість елементів множини

```
`Кількість елементів множини `=nops(`Множина функцій`);
```

$$Кількість\ елементів\ множини = 14$$

Як бачимо, при перетворені послідовності в множину зникло 18-14=4 елементи. Очевидно, що при цьому вилучено по одному елементу x^2e^x та $e^x\sin(x)$, які в списку зустрічаються по два рази, а також 2 із трьох елементів xe^{2x}. Такі операції система Maple виконує миттєво для послідовностей із сотен елементів.

Після створення банку унікальних прикладів потрібно проаналізувати їх на належність до типових виразів, що породжують одні й ті самі, або споріднені процеси розв’язання. Для цього Maple має потужний інструментарій. Зокрема можна використати наступний прийом. Створюємо шаблон

```
> `шаблон`:=zz->match(zz=A*x^n*exp(a*x),x,'s');
```

$$шаблон := zz \to \mathrm{match}(zz = A\, x^n\, e^{(a\, x)}, x, 's')$$

Вилучаємо із `` `Множина функцій` `` всі вирази, які підпорядковуються даному шаблону

```
> select(`шаблон`,`Множина функцій`);
```

$$\{3\,x\,\mathbf{e}^{\left(\frac{x}{2}\right)}, x\,\mathbf{e}^{(3\,x)}, x\,\mathbf{e}^{(2\,x)}, x^3\,\mathbf{e}^{(-x)}, x\,\mathbf{e}^{x}, x^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)}, x^2\,\mathbf{e}^{x}\}$$

Конструюванням різних шаблонів легко проаналізувати базу даних із сотен і навіть тисяч типових прикладів.

Наступним кроком є розробка на основі створених шаблонів математичних моделей для генерування множини типових прикладів.

Як приклад, розглянемо невизначений інтеграл

$$\int e^{\arcsin x} dx.$$

Підстановкою *arcsinx=t* останній інтеграл зводиться до наступного

$$\int e^{t} \cos t dt,$$

який знаходиться методом інтегрування частинами.

Створимо модель для генерування підінтегральних функцій, знаходження первісних для яких передбачає заміну змінної:

$$\int f\left(\psi(x)\right)\psi'(x)dx.$$

Різні варіанти функцій $f(x)$ та $\psi(x)$ подамо у вигляді списків

```
> `f`:=[cos(x)*exp(x),sin(x)*exp(x),x*exp(x),
x^2*exp(x),x*sin(x),x*cos(x),x^2*sin(x),x^2*cos(x),
ln(x),arcsin(x)];
`psi`:=[arcsin(x),arccos(x),x^2,ln(x),sin(x),tg(x),
exp(x),2^x,cos(x),arctg(x)];
```

$$f := [\cos(x)\,\mathbf{e}^x, \sin(x)\,\mathbf{e}^x, x\,\mathbf{e}^x, x^2\,\mathbf{e}^x, x\sin(x), x\cos(x), x^2\sin(x), x^2\cos(x), \ln(x), \arcsin(x)]$$

$$\psi := [\arcsin(x), \arccos(x), x^2, \ln(x), \sin(x), \mathrm{tg}(x), \mathbf{e}^x, 2^x, \cos(x), \mathrm{arctg}(x)]$$

Для генерування невизначених інтегралів на основі сформованих списків функцій потрібно створити два вкладених цикли

```
> L_f:=[]:
for i to nops(`f`) do
 for j to nops(`psi`) do
  L_f:=[op(L_f),Int(subs(x=`psi`[j],`f`[i])
        *diff(`psi`[j],x),x)]
 end do;
end do:
```

В результаті буде сформовано 10×10=100 невизначених інтегралів, першими по порядку з яких є наступні

$$\int \mathbf{e}^{\arcsin(x)}\,dx,\ \int \cos(\ln(x))\,dx,\ \int \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg}(x)}}{(1+x^2)^{(3/2)}}\,dx,\ \int -\frac{x\,\mathbf{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$
$$\int \cos(\operatorname{tg}(x))\,\mathbf{e}^{\operatorname{tg}(x)}\,(1+\operatorname{tg}(x)^2)\,dx,\ \int 2\cos(x^2)\,\mathbf{e}^{(x^2)}\,x\,dx,$$
$$\int \cos(\sin(x))\,\mathbf{e}^{\sin(x)}\cos(x)\,dx$$

Додавши по одній функції до кожного із списків, дістанемо ще 21 додаткових приклади. Щоб подвоїти кількість згенерованих прикладів із 100 майже до 200 достатньо достатньо додати до обох списків функцій по чотири нових функції. Таким способом легко не тільки згенерувати сотні і тисячі унікальних прикладів, але й регулювати їх складність та різноманітність.

Згенеровані таким способом приклади потрібно уважно проаналізувати. Серед них можуть виявитися поодиноі випадки занадто простих виразів, що є результатом символьних спрощень.

Слід відзначити, що сам процес генерування та аналізу згенерованих прикладів може сприяти підвищенню активності пізнавальної діяльності суб’єктів навчального процесу.

Заслуговують на увагу деякі технічні деталі, що демонструють інтелектуальну потужність системи Maple та зручності, які з цього випливають. Так за приведеним алгоритмом перший згенерований приклад має такий початковий вигляд

$$\int \frac{\cos(\arcsin(x))e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

але система автоматично перетворює вираз $\cos(\arcsin(x))$ до тотожнього $\sqrt{1-x^2}$ та скорочує на останній чисельник і знаменник. Іноді такий “сервіс” буває занадто докучливим але в даному, як і в більшості інших випадків такі “здібності” системи є надзвичайно цінними.

Звернемо увагу на той факт, що математична модель генератора, що розглядається, містить похідну функції $\psi'(x)$. В даному випадку ми задаємо список функцій **`` `psi` ``**, а відповідні похідні знаходяться за допомогою стандартної команди **`diff`**.

Отже методика створення генераторів завдань з математики складається з наступних етапів:

1. Створення банку типових задач з певної тематики на основі літературних джерел;
2. Обробка створеного банку задач засобами Maple:
   а) вилучення всіх прикладів-"двійників" для здобуття банку унікальних прикладів;
   б) аналіз структури математичних виразів банку задач за допомогою спеціально сконструйованих шаблонів та (або) інших засобів Maple;
3. Розробка математичних моделей для генерування множини типових прикладів;
4. Створення екстракоротких програм для реалізації генерування прикладів за розробленими математиними моделями;
5. Експериментальна перевірка розробленого генератора

Висновки. 1. Система символьної математики Maple є зручним середовищем для створення генераторів завдань з математики. 2. Розроблена методика є гнучким інструментом для створення генераторів типових завдань різної складності з певних розділів математики. Причому складність визначається не тільки складністю алгоритмів розв’язання окремих завдань, але й степенем різноманітності алгоритмів та їх громіздкістю.

Література

1. Михалевич В.М. Ключові проблеми створення навчально-контролюючого комплексу з дисциплін математичного спрямування// Сучасні інформаційні технології та іноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми// Зб. наук. прац. – Випуск 10 / Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. Київ-Вінниця: ДОВ “Вінниця”, 2006, С.391-197.
2. Михалевич В.М. Навчально-контролюючий Maple – комплекс з вищої математики //Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2004. - № 1. – С.74-78.
3. Михалевич В.М. Excel-VBA-Maple програма генерації задач з дисциплін математичного спрямування//Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2005. - № 2. – С.74-83.
4. Михалевич В.М., Крупський Я. В. Математична модель генерування завдань з невизначених інтегралів // Сучасні інформаційні технології та іноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми// Зб. наук. прац. – Випуск 15 / Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. Київ-Вінниця: ДОВ “Вінниця”, 2007, С.193-197.
5. Михалевич В. М., Крупський Я. В. Аналіз сучасного стану питань генерування завдань з вищої математики. // “Інтернет – Освіта - Наука - 2006”, п’ята міжнародна конференція ІОН – 2006, 10-14 жовтня, 2006 р. Збірник матеріалів конференції. Том 1. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. - С.31-34.
6. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.

Annotation to the article by V.M. Mikhalevich and Ya.V. Krupskiy

“Technique of creation of the generator of tasks on the mathematician.”

The work demonstrates effectiveness and relative simplicity of realization of typical problems generator in higher mathematics in the Maple system of symbolical mathematics. There have been presented models for generating of problem on finding integrals from rational fractions and integrating by substitution of a variable. Extra short programs that realize problem generating are suggested. Ways of receiving complex problem that demand application of several ways to solve one problem have been shown, such as substitution of a variable, integrating by parts, integrating of rational fractions.