Математичний Метод Чисельного Моделювання Гідродинамічних Процесів

Ярослав Іванчук
кафедра комп’ютерних наук
Вінницький національний технічний університет
Вінниця, Україна
ivanchuck@ukr.net

Mathematical Method of Numerical Simulation for Hydrodynamic Processes

Yaroslav Ivanchuk
dept. of Computer Science
Vinnytsia National Technical University
Vinnytsia, Ukraine
ivanchuck@ukr.net

***Анотація*—У роботі наведений чисельний метод моделювання, який застосовується при дослідженні динаміки суцільних в’язких слабостиснених рідин на основі системи рівнянь нерозривності і Нав’є-Стокса. У запропонованому методі використовується комплексний підхід використання чисельного розв’язку рівняння нерозривності методом кінцевих об’ємів, а для розв’язку рівняння Нав’є-Стокса метод розщеплення по фізичним факторам. У роботі показано, що метод кінцевих об’ємів, який застосовувався для опису течії як стисненої, так і нестиснених рідин володіє такими важливими перевагами, як наявність хороших консервативних властивостей і допущення дискретизації складних обчислювальних областей в більш прості, чим це дозволяє ізопараметричне кінцево-елементне формулювання задачі або введення узагальнених координат. У методі розщеплення по фізичним факторам вводиться складова, яка враховує штучну стисненість досліджуваної рідини, що дозволяє спочатку розрахувати проміжкове поле швидкостей, яке потім підправляється із врахуванням градієнта тиску. Різницева схема даного методу дозволяє розраховувати поле течії без використання значень вихору і тиску на твердій поверхні. Для підтвердження ефективності запропонованого метода, в CFD-програмі FlowVision були отримані розв’язки цілого ряду задач зовнішньої гідродинаміки, на прикладі оптікання циліндричної поверхні, які підтвердили стійкість отриманих результатів. Даний метод дозволяє проводити по єдиному алгоритму розрахунки обтікання плоских, осесиметричних і тривимірних тіл складної конфігурації потоком в’язкої слабостисненої рідини, а також внутрішніх течій в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.**

***Abstract*—This article presents a numerical simulation method that is used in the study of the dynamics of continuous viscous weakly compressible fluids based on the system of equations of continuity and Navier-Stokes. The proposed method uses an integrated approach using the numerical solution of the continuity equation by the finite-volume method, and for solving the Navier-Stokes equation, the splitting method is based on physical factors. The article shows that the finite volume method, which was used to describe the flow of both compressed and uncompressed liquids, has such important advantages. These are the presence of good conservative properties and the discretization assumptions of complex computational domains into simpler ones than isoparametric finite element formulation of the problem or the introduction of generalized coordinates. In the method of splitting according to physical factors, a component is introduced that takes into account the artificial low compressibility of the liquid under study, which makes it possible to first calculate the intermediate velocity field. It is then corrected for pressure gradients. To confirm the effectiveness of the proposed method, in the FlowVision CFD program, solutions were obtained for a number of problems in external hydrodynamics. They confirmed the sustainability of the results. This method allows one to compute the flow around flat, axisymmetric, and three-dimensional bodies of complex configuration with a flow of a viscous weakly compressible fluid, as well as internal flows in a wide range of Reynolds numbers using a single algorithm.**

Ключові слова—рівняння Нав’є-Стокса; чисельне моделювання; алгоритм; тиск; швидкість; різницева схема

Keywords—Navier-Stokes equations; numerical simulation; algorithm; pressure; speed; difference scheme

I. Вступ

Сучасний етап розвитку нелінійної механіки характеризується широким і глибоким використанням самих тонких ефектів; вона все більше взаємодіє з іншими областями науки і техніки. Однією із характерних рис сучасних досліджень є математизація фізичного пізнання, інтенсивне застосування методів математичного моделювання в різних галузях науки і техніки. Поява сучасних потужних комп’ютерних систем (КС) [1] значно підвищило інтерес до різних чисельних методів і алгоритмів, реалізація яких межує із проведенням чисельного експерименту, який відображає процес отримання результатів при чисельному моделюванні. Потреба у такому підході до розв'язку задач математичної фізики диктується все більш ускладнюючими запитами практики, а також зв'язана із спробою створення більш раціональних загальних теоретичних моделей для вивчення складних фізичних явищ.

II. Постановка задачі дослідження

Однією із сучасних актуальних наукових проблем в гідромеханіці є опис руху в'язкої слабостисненої рідини, яка описується рівняннями нерозривності і Нав'є-Стокса [2]. Сюди відносяться задачі руху рідини при ламінарному і турбулентному обтіканні тіл кінцевих розмірів; течії в зоні сліду і областях зриву потоку, в шарах змішування; в пограничних шарах у поверхні тіла тощо [3]. Поява сучасних потужних КС надало новий імпульс цим дослідженням, що дозволило отримати кількісні результати при розв'язку практично важливих задач про рух реальної рідини при помірних числах Рейнольдса. Нелінійність рівнянь Нав'є-Стокса і наявність малих параметрів при старших похідних в них створюють серйозні труднощі , як при аналітичному дослідженні так і при чисельному інтегруванні цих рівнянь за допомогою КС. Таким чином, проблема побудови чисельних алгоритмів для розв'язку системи рівнянь нерозривності і Нав'є-Стокса з високою точністю (особливо в багатомірному випадку) залишається на сьогодні актуальною задачею.

Метою даної роботи є створення загальної ефективної чисельної методики для розв'язку багатомірної системи рівнянь нерозривності і Нав'є-Стокса при помірних числах Рейнольдса, здатної досить точно описати локальні властивості течій.

III. Викладення основного матеріалу

Реальний гідродинамічний процес може бути описаний системою диференційних рівнянь в частинних похідних, яка складається із рівняння нерозривності [2, 3] і рівняння Нав'є-Стокса [4].

Для розв'язку рівняння нерозривності [5] використаємо метод кінцевих об'ємів. Представимо рівняння нерозривності невстановленого руху рідини у загальному вигляді для площини *Oxy*:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{G}}{\partial t}=0\,, \tag{1}$$

де $\bar{q}=\bar{\rho}$ – густина рідини, $\bar{F}=\bar{\rho}\bar{u}_x$ – компонента швидкості рідини по вісі *x*, $\bar{G}=\bar{\rho}\bar{u}_y$ – компонента швидкості рідини по вісі *y*.

Застосовуючи метод підобластей [8] до рівняння (1) в середині кінцевого об'єму, що показаний на рисунку 1, отримуємо:

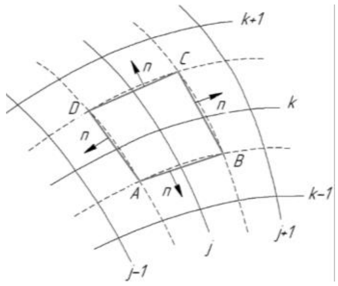


Рис. 1. Схема двомірного кінцевого об'єму

Застосовуйте центрування рівняння з використанням табуляції по центру в стилі.

$$\int_{ABCD} 1\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{G}}{\partial t}\right)dxdy=0\,. \tag{2}$$

Одним із приблизних представлень рівняння (2) може бути вираз [1, 3]:

$$\frac{d}{dt}\left(\Lambda q_{j,k}\right)+\sum_{AB}^{DA}\left(F\Delta y-G\Delta x\right)=0\,, \tag{3}$$

де Λ – площа чотирикутника *ABCD*, показаного на рисунку 1, причому $q_{j,k}$ є величина, яка зв'язана із середнім значенням *q* в середині чотирикутника.

Якщо загальна сітка є однорідною і її лінії співпадають із лініями постійних *x* і *y*, тоді рівняння (5) приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt}q_{j,k}+\frac{F_{j,k}+F_{j+1,k}}{2\Delta x}+\frac{G_{j,k+1}+G_{j,k-1}}{2\Delta y}=0\,, \tag{4}$$

що співпадає із апроксимацією, отриманою при представленні просторових кривих похідних в (1) за допомогою центральних різниць.

Розглянемо рівняння Нав'є-Стокса в природних змінних:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}+\left(\bar{V}\nabla\right)\bar{V}=-\nabla p+\nu\Delta\bar{V}\,,\ \nabla\bar{V}=0\,, \tag{5}$$

де ν – кінематична в'язкість досліджуваної рідини.

Для рішення проблеми із розрахунком поля тиску необхідно в рівняння нерозривності ввести член, який відповідає за штучну стисливість, а саме: $(\partial/\partial t)(p+V^2/2)$. У результаті ми отримуємо модифіковану систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t}+\left(\bar{V}\nabla\right)\bar{V}=-\nabla p+\nu\Delta\bar{V};\\[2ex] \dfrac{\partial\left(p+\dfrac{V}{2}\right)}{\partial t}+\nabla V=0,\end{cases} \tag{6}$$

для розв'язку якої використаємо метод розщеплення по фізичним факторам.

Введемо наступні позначення: $\nabla\times\bar{V}=\omega$, $\nabla\bar{V}=D$, $\nabla\tilde{\bar{V}}=\tilde{D}$. Нехай у деякий момент часу $t_n=n\tau$ (τ – крок по часу, *n* – число кроків) відомі поля швидкості $\bar{V}$ і тиску *p* рідини. Тоді схему визначення невідомих функцій в момент часу $t_{n+1} = (n+1)\tau$ можна представити у вигляді триетапної схеми розщеплення:

Етап I:

$$\frac{\bar{\bar{V}} - \bar{V}^n}{\tau} = -\left(\bar{V}^n \nabla\right)\bar{V}^n + \nu\Delta\bar{V}^n . \qquad (7)$$

Етап II:

$$\Delta p = -\frac{\tilde{D}}{\tau}\text{, так як } D^{n+1}\text{=0.} \qquad (8)$$

Етап III:

$$\frac{\bar{V} - \bar{\tilde{V}}}{\tau} = -\nabla p . \qquad (9)$$

Рівняння (9) отримуємо шляхом взяття дивергенції від обох частин рівності (7) із урахуванням рівняння нерозривності (умова соленоїдності [3] $div\bar{V}^{n+1} = 0$).

Для випадку декартової системи координат і рівномірної сітки (рис. 2) двомірна різницева схема має наступний вигляд:

$$\frac{\tilde{V}y_{i+1/2,j} - Vy^n_{i+1/2,j}}{\tau} = \frac{\left(Vy^n_{i,j}\right)^2 - \left(Vy^n_{i+1,j}\right)^2}{h_1} + \\ + \frac{\left(V_yV_x\right)^n_{i+1/2,j-1/2} - \left(V_yV_x\right)^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_2} - \\ -\frac{\nu}{\Delta y}\left[\left(\frac{Vx^n_{i+1,j+1/2} - Vx^n_{i,j+1/2}}{h_1} - \frac{Vy^n_{i+1/2,j+1} - Vy^n_{i+1/2,j}}{h_2}\right) - \right. \\ \left. -\left(\frac{Vx^n_{i+1,j-1/2} - Vx^n_{i,j-1/2}}{h_1} - \frac{Vy^n_{i+1/2,j} - Vy^n_{i+1/2,j-1}}{h_2}\right)\right]; \qquad (10)$$

$$\frac{\tilde{V}x_{i,j+1/2} - Vx^n_{i,j+1/2}}{\tau} = \frac{\left(Vx^n_{i,j}\right)^2 - \left(Vx^n_{i,j+1}\right)^2}{h_2} + \\ + \frac{\left(V_yV_x\right)^n_{i-1/2,j+1/2} - \left(V_yV_x\right)^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_1} + \\ +\frac{\nu}{h_1}\left[\left(\frac{Vx^n_{i+1,j+1/2} - Vx^n_{i,j+1/2}}{h_1} - \frac{Vy^n_{i+1/2,j+1} - Vy^n_{i+1/2,j}}{h_2}\right) - \right. \\ \left. -\left(\frac{Vx^n_{i,j+1/2} - Vx^n_{i-1,j+1/2}}{h_1} - \frac{Vy^n_{i-1/2,j+1} - Vy^n_{i-1/2,j}}{h_2}\right)\right]; \qquad (11)$$

$$\begin{cases} \dfrac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{h_1^2} + \dfrac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{h_2^2} = \dfrac{D_{i,j}}{\tau}, \\ D^{n+1}_{i,j} = 0, \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} Vy^{n+1}_{i+1/2,j} = \tilde{V}y_{i+1/2,j} - \dfrac{\tau}{h_1}\left(p_{i+1,j} - p_{i,j}\right), \\ Vx^{n+1}_{i,j+1/2} = \tilde{V}y_{i,j+1/2} - \dfrac{\tau}{h_2}\left(p_{i,j+1} - p_{i,j}\right). \end{cases} \qquad (13)$$

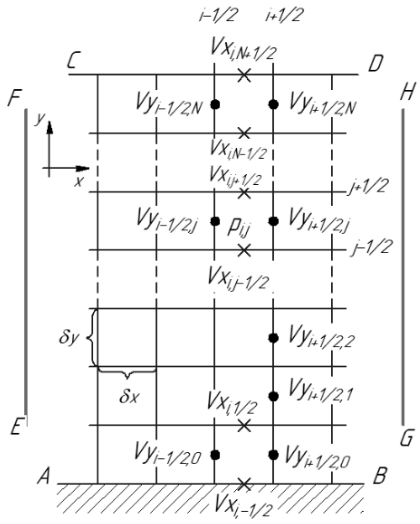


Рис. 2. Схема сіткового шаблону для метода розщеплення (двомірний випадок)

Схема (10)–(13) легко апроксимує рівняння (7)–(9) із другим порядком точності по просторовим змінним. Похибка апроксимації порядку $O(\tau, h^2)$, де $h = \max(\Delta x, \Delta y)$, де $h_1 = \Delta x$, $h = \Delta y$.

Суттєвим моментом запропонованого метода є вибір граничних умов. Із-за наявності задач обтікання тіл кінцевих розмірів потоком в'язкої нестисненої рідини, можна виділити два основних типи граничних умов: умова на твердій поверхні і умова на лінії, достатньо віддаленої від обтікаючого тіла. Тобто, граничні умови на твердій поверхні (див. рис. 2):

$$\begin{cases} Vx^n_{i,\,j-1/2} = 0; \quad \text{(умова непротікання)} \\ Vy^n_{i+1/2,\,j-1/2} = 0, \quad \text{(умова прилипання)} \end{cases} \qquad (14)$$

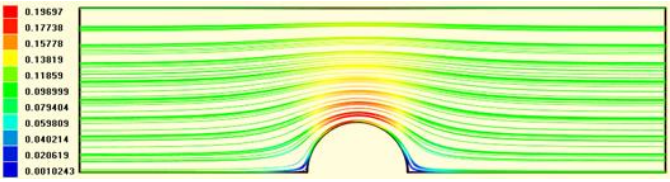
із останнього випливає:

$$\tilde{V}y_{i+1/2,0} = \frac{Vy^n_{i+1/2,0}}{2} + \frac{Vy^n_{i+1/2,1}}{6} + O(h_2^3) . \qquad (15)$$

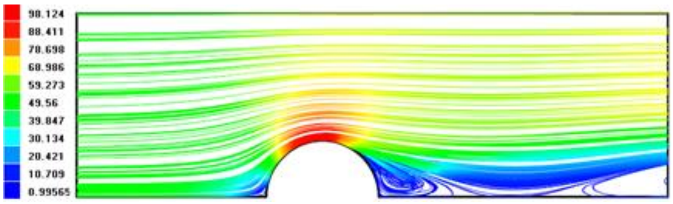
Стаціонарний розв'язок системи рівнянь (10)–(13) отримуємо в результаті повторення вказаних етапів до виконання наступного критерію встановлення:

$$\max_{i,j}\left|Vy^{n+k}_{i+1/2,j} - Vy^n_{i+1/2,j}\right| \le \varepsilon . \qquad (16)$$

За допомогою описаного метода в CFD-програмі FlowVision [6, 7], на потужностях КС Інститута кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, були отримані розв'язки цілого ряду задач зовнішньої гідродинаміки [2, 3]. Розглянемо деякі результати розв'язку задачі для поперечного обтікання кругового циліндра радіуса a=1 м, вісь якого перпендикулярна вектору швидкості набігаючого потоку U_∞ на 250000 розрахункових комірках. Картини течії для різних чисел Рейнольдса ($Re=2aU_\infty/\nu$) представлені на рисунку 3.



Re = 1,0



*R*e = 1000,0; *t*=170 с

Рис. 3. Схема обтікання циліндру (лінії току) при різних числах Рейнольдса

В останньому випадку (*R*e=1000,0; *t*=170 с) (див. рис. 3) наблюдається нестаціонарна картина течії (має місце визначений ріст застійної зони і в деякий момент часу відбувається).

На рисунку 4 представлені результати розрахунку даним методом (криві 1) в порівняні із результатами, отриманими за допомогою методу спільної блочної релаксації [4] (криві 2).

Отримані результати показали високу збіжність результатів розрахунку на кутах до 60^0 і на кутах біля 180^0 для розподілу тиску (див. рис 4, а) і вихору (див. рис 4, б) течії рідини по поверхні циліндру при *Re*=50.

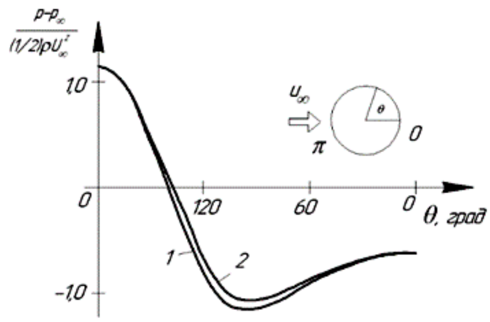


Рис. 4. Діаграма розподілу тиску по поверхні циліндру при *Re*=50: 1 – розрахунок вищевказаним методом; 2 – розрахунок методом [1]

Висновки

Запропонований метод чисельного моделювання гідродинамічних процесів має певні сильні сторони в порівнянні із відомими чисельними методами [1-4], де різницеві представлення виконання умови прилипання приводить, із необхідністю, до визначення граничного значення вихору на твердій поверхні тіла, наслідком чого є відсутність балансу сил на твердій поверхні.

Різницева схема даного методу дозволяє розраховувати поле течії без використання значень вихору і тиску на твердій поверхні. Результати проведених розрахунків, а також пробні розрахунки тривимірних течій, виконані із використанням даного підходу, свідчать про його ефективність.

Також даний метод дозволяє проводити по єдиному алгоритму розрахунки обтікання плоских, осесиметричних і тривимірних тіл складної конфігурації потоком в'язкої слабостисненої рідини, а також внутрішніх течій в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.

Література References

[1] F. H. Harlow, J. E. "Welch Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface" in *Phys. Fluids*, 1965. vol. 8, n.12. pp. 2182 – 2189.

[2] Іскович–Лотоцький Р. Д. Оптимізація конструктивних параметрів інерційного вібропрес–молота // Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вісник машинобудування та транспорту. – 2016. – №2. – С. 43 – 50.

[3] Іскович–Лотоцький Р. Д. Математичне моделювання робочих процесів інерційного вібропрес–молота з електрогідравлічною системою керування гідроімпульсного привода для формоутворення заготовок з порошкових матеріалів // Р.Д. Іскович–Лотоцький, В.П. Міськов, Я.В. Іванчук // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки. – 2016, – №3(237). – С. 176 – 180.

[4] Іскович–Лотоцький Р. Д. Моделювання робочих процесів в піролізній установці для утилізації відходів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Східно–європейський журнал передових технологій. – Харків, 2016. – Том 1, № 8(79). – С.11–20. doi: 10.15587/1729-4061.2016.59419.

[5] R. D. Iskovych–Lototsky, Y. V. Ivanchuk, Y. P. Veselovsky, "Simulation of working processes in the pyrolysis plant for waste recycling" in *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies*. *Engineering technological systems*. 2016. Vol. 1, № 8 (79). pp. 11–20. doi: 10.15587/1729-4061.2016.59419.

[6] R. D. Iskovych–Lototsky, O. V. Zelinska, Y. V. Ivanchuk, N. R. Veselovska, "Development of the evaluation model of technological parameters of shaping workpieces from powder materials" in *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies. Engineering technological systems*. 2017. Vol. 1, № 1(85). pp. 9–17. doi: 10.15587/1729-4061.2017.59418.

[7] Rostislav D. Iskovych-Lototsky, Yaroslav V. Ivanchuk, Natalia R. Veselovska, Wojciech Surtel, Samat Sundetov. "Automatic system for modeling vibro-impact unloading bulk cargo on vehicles" in *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, 2018, 1080860 (1 October 2018). doi: 10.1117/12.2501526.