УДК 62-97/-98

МАТЕМАТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ВІБРОУДАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Іванчук Я. В.

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна

Анотація. *Застосування вібраційної технології вимагає поглибленого вивчення фізичних явищ, які виникають у різних коливальних системах з метою визначення оптимальних параметрів вібраційного обладнання для підвищення ефективності технологічних процесів. Дія віброударних навантажень в нелінійних механічних системах призводить до появи фізичних явищ, які можуть мати, як корисний, так і небезпечний характер. Необхідність пояснення і математичного опису ряду своєрідних фізичних явищ, пов'язаних із дією вібрацій на механічні системи, дозволяє розробляти перспективні математичні методи розрахунку складних коливальних систем. Метою даного дослідження є розробка універсального математичного методу для визначення умови стійкості і положень рівноваги коливальних систем під дією зовнішнього віброударного навантаження. Згідно теорії Флоке-Ляпунова, за допомогою періодичних функцій Гріна на базі диференціальних рівнянь руху і відомих критеріїв оптимальності квазіконсервативних систем, були визначені положення квазірівноваги коливальних систем. Для коливальної системи у вигляді фізичного маятника з вібруючою віссю, математично описані області стійкої рівноваги і математично описана можливість стабілізації режимів руху такого маятника при імпульсних коливаннях точки підвісу.*

Ключові слова: *удар, коливання, стійкість, вібрації, математичний метод*

Окремою частиною у теорії вібраційних процесів і машин [1] є теоретичне дослідження явищ, що виникають при дії віброударних навантажень у нелінійних коливальних системах. До даних явищ відносяться зникнення колишніх і поява нових положень рівноваги і видів руху коливальної системи, зміна характеру положень рівноваги (тобто їх стійкості або нестійкості) [2, 3].

Метою даних досліджень є розробка математичного методу теоретичного дослідження поведінки коливальних систем, які представлені у вигляді фізичного маятника для виявлення умови стійкості і рівноваги під дією віброударних навантажень.

Розглянемо фізичний маятник представлений на рисунку 1. Нехай Θ – кут відхилення маятника від вертикальної вісі. Нехай вісь підвісу маятника здійснює коливання по закону представленому на рисунку 2 із відповідними функціями:

$$\begin{cases} \mu f(t) = -\dfrac{\mu}{2}\left(t^2 - Tt\right), \quad t \in [0, T]; \\ \mu \ddot{f}(t) = -\mu + \mu T \delta^T\left(t\right), \end{cases} \tag{1}$$

де $t=kT$, $k \in T$, а $\mu=const$ – параметр, що характеризує амплітуду Т-періодичної ударної вібрації $f(t)$.

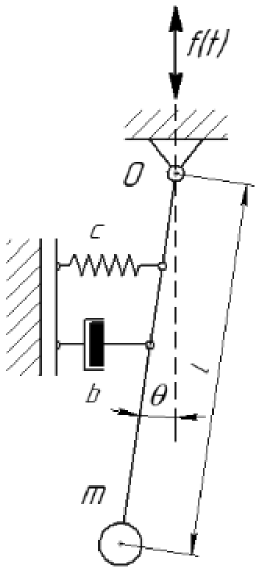

Рис. 1. Розрахункова схема динаміки фізичного маятника під дією віброударних навантажень

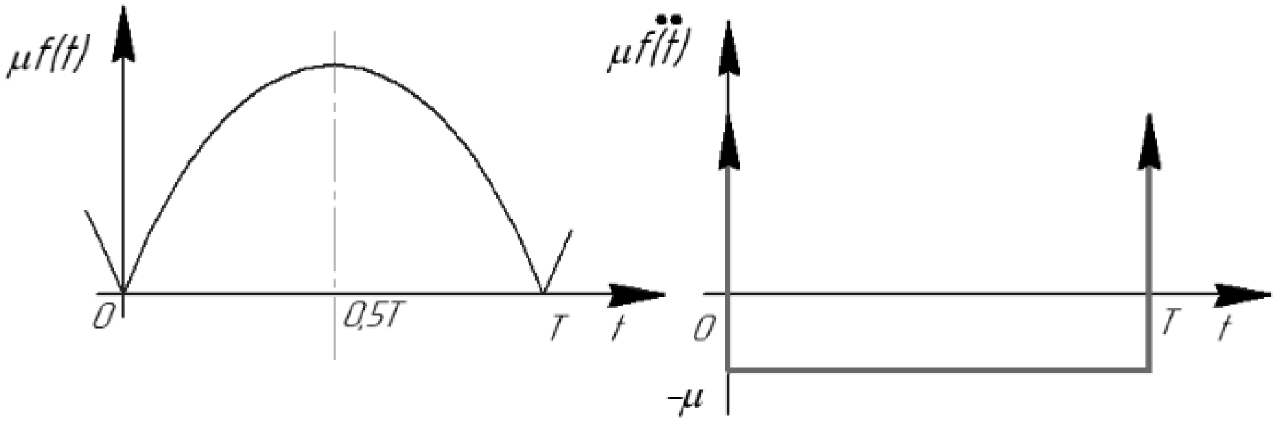

Рис. 2. Діаграми закону руху вісі коливання фізичного маятника

Рівняння руху фізичного маятника (див. рис. 1):

$$\ddot{\Theta} + \Omega^2 \Theta + \mu \ddot{f}\left(t\right)\Theta + 2b\dot{\Theta} = 0, \tag{2}$$

де $\Omega^2 = g / l$ - власна частота коливань маятника, b – коефіцієнт демпфування, δ – функція Гріна [4].

Перепишемо рівняння (2) у вигляді:

$$\ddot{\Theta} + \left[1 - \mu + \mu T \delta^T(t)\right] x = 0, \; \mu = \mu_1 l^{-1} . \tag{3}$$

Згідно теорії Флоке-Ляпунова, яку ми можемо формально використати для рівнянь із δ-функціями можлива поява періодичних розв’язків з періодом T і $2T$. Для T-періодичних розв’язків маємо інтегральне рівняння:

$$\Theta(t) = -\mu T \int_0^T \chi(t-s)\delta^T \Theta(s) ds . \tag{4}$$

Із даного інтегрального рівняння отримуємо співвідношення:

$$\Theta(0) = -\mu T \chi(0) \Theta(0) . \tag{5}$$

Періодична функція Гріна визначається формулою [5, 6]:

$$\chi(t) = \begin{cases} \chi_{01}(t), \; \mu \in]0,1[, \\ \chi_{11}(t), \; \mu > 1, \end{cases} \tag{6}$$

де

$$\chi_{01}(t)=\frac{1}{2\sqrt{1-\mu}}\frac{\cos[\sqrt{1-\mu}(t-T/2)]}{\sin(\sqrt{1-\mu}T/2)},$$

$$\chi_{11}(t)=\frac{1}{2\sqrt{1-\mu}}\frac{ch[\sqrt{1-\mu}(t-T/2)]}{sh[\sqrt{1-\mu}(t-T/2)]}.$$

Умова існування *T*-періодичного розв’язку для $\mu\in(0,1)$:

$$\frac{\mu\pi}{\omega\sqrt{1-\mu}}=-tg\frac{\pi\sqrt{1-\mu}}{\omega},\ T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{7}$$

Ведемо наступні позначення Ω=1, *b*=0. Із рівняння (4) для *T*-періодичних режимів при $\mu\in]-\infty,\infty[$ знайдемо:

$$\Theta(t)=-\mu\chi(T)\Theta(0)-\mu\chi(t-T/2)\Theta(t/2). \tag{8}$$

Послідовно приймаючи *t*=0 і *T*/2, приходимо до однорідної лінійної алгебраїчної системи, яка складається із рівнянь:

$$\begin{cases}\Theta(0)[1-\chi(0)]+\mu\chi(T/2)\Theta(T/2)=0,\\ \Theta(0)[-\mu\chi(T/2)]+\Theta(T/2)[1+\chi(0)]=0.\end{cases} \tag{9}$$

Головний визначник системи рівнянь (9):

$$1-\mu^2\chi^2(0)+\mu^2\chi^2(T/2)\neq 0, \tag{10}$$

так як $\chi(t)=\frac{1}{2}\cos(t-T/2)[\sin(T/2)]^{-1}$ і

$\chi^2(T/2)\geq\chi^2(0)$. Тому *T*-періодичних режимів у нас немає, а для 2*T*-періодичних симетричних режимів, виконавши аналогічні прості дії [2, 4], отримаємо наступну умову існування: $\mp 2\mathrm{ctg}(\pi/\omega)$. Після складення по попередньому зразку характеристичного рівняння [1, 5], визначаємо умову параметричного резонансу, яке характеризується рівністю $\mu^2>4ctg^2(\pi/\omega)$.

На рисунку 3 показана діаграма стійкості [5]. Області нестійкого руху штрихуються.

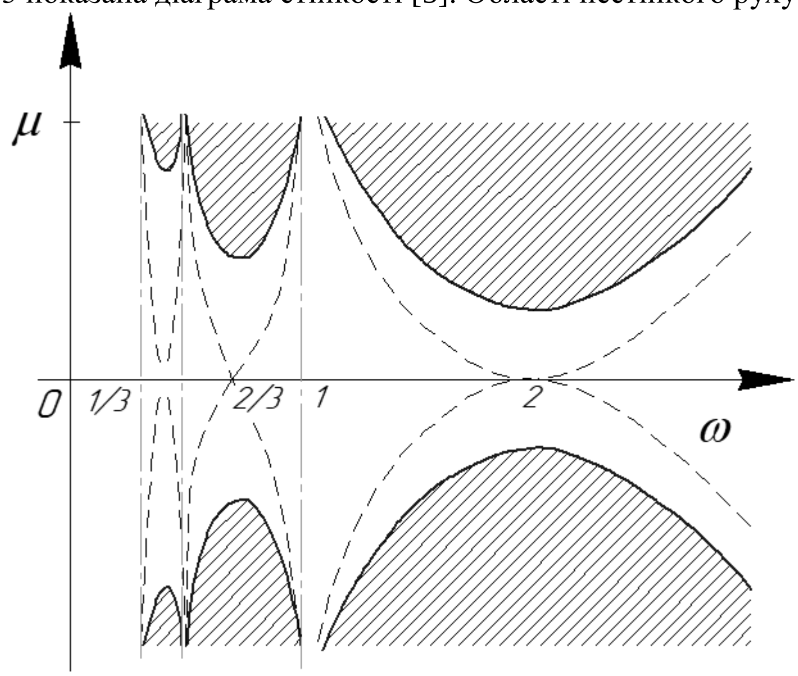

Рис. 3. Діаграми стійкості коливань фізичного маятника під дією віброударних навантажень

Замітимо, що при μ>1 система може розглядатися як система із від ємною частотою, що відповідає «перевернутому» маятнику. Отримані результати тому відповідають добре відомому факту про можливість стабілізації режимів руху такого маятника при коливаннях точки підвісу [2, 4].

MATHEMATICAL METHOD FOR DETERMINING STABILITY OF VIBRATION SYSTEMS UNDER EXTERNAL VIBRATION LOADS

Ivanchuk Yaroslav

Abstract. *The use of vibration technology requires an in-depth study of the physical phenomena that arise in various oscillatory systems in order to determine the optimal parameters of vibration equipment to increase the efficiency of technological processes. The action of vibration shock loads in nonlinear mechanical systems leads to the appearance of physical phenomena that can have both red and dangerous characters. The need for explanation and mathematical description of a number of peculiar physical phenomena associated with the action of vibrations on mechanical systems allows us to develop promising mathematical methods for calculating complex oscillatory systems. The aim of this study is to develop a universal mathematical method for determining the stability conditions and the equilibrium positions of oscillatory systems under the influence of an external vibro-shock load. According to the Floquet-Lyapunov theory, using the periodic Green's functions on the basis of differential equations of motion and the known optimality criteria for quasiconservative systems, we determined the positions of quasiequilibrium of vibrational systems. For an oscillating system in the form of a physical pendulum with a vibrating axis, the regions of stable equilibrium are mathematically described and the possibility of stabilizing the modes of motion of such a pendulum with impulsive vibrations of the suspension point is mathematically described.*

Keywords: *shock, vibration, stability, vibration, mathematical method*

Список літератури

1. Іскович–Лотоцький Р. Д. Основи резонансно–структурної теорії віброударного розвантаження транспортних засобів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна. – Д., 2014. – №5(53) – С. 109 – 118. doi: 10.15802/stp2014/30458.
2. Іскович–Лотоцький Р. Д. Підвищення ефективності розвантаження матеріалів під дією періодичних ударних імпульсів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук // Вібрації в техніці і технологіях. – 2008. – №2(51). – С. 8 – 11.
3. Іскович–Лотоцький Р. Д. Математичне моделювання робочих процесів інерційного вібропрес–молота з електрогідравлічною системою керування гідроімпульсного привода для формоутворення заготовок з порошкових матеріалів // Р. Д. Іскович–Лотоцький, В. П. Міськов, Я. В. Іванчук // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки. – 2016, – №3(237). – С. 176 – 180.
4. Веселовська Н. Р. Загальні принципи побудови і дослідження детермінованих моделей вібраційних та віброударних машин з гідроімпульсним приводом / Н. Р. Веселовська, О. В. Зелінська, Я. В. Іванчук // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2018. – № 4 (91). – С. 21–28.
5. Іванчук Я. В. Математичний метод визначення стійкості коливальних систем під дією зовнішнього вібраційного навантаження / Я. В. Іванчук / Технічні науки та технології : науковий журнал / Чернігів. нац. техн. ун-т. – Чернігів : ЧНТУ, 2018. – № 2 (12). – с. 25 – 33 . doi: 10.25140/2411-5363-2018-2(12)-25-33.
6. Іскович–Лотоцький Р. Д. Моделювання робочих процесів гідроімпульсного привода з однокаскадним клапаном пульсатором / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2017. – № 3(86). – С.10–19.