УДК 621.3.011.7 (075.8)

Остапюк Ю.М.
Ільчій О.В.
Мадьяров В. Г.

Представлення синусоїдних струмів в комплексній формі і їх обрахунки

Вінницький національний технічний університет

Анотація. *В даній доповіді розглядається способи задання синусоїдного струму через комплексні функції і способи обрахунку цього струму за допомогою закону Кірхгофа*

Ключові слова: комплексна функція, закони Кірхгофа, синусоїдальний струм, напрямлений вектор

Abstract. *In this report the methods of setting the sinusoidal current through complex functions and methods of calculating this current using Kirchhoff's law*

Keywords: complex function, Kirchhoff's law, sinusoidal current, directional vector.

Як вже відомо комплексне число можна записати в 3 формах, а саме:

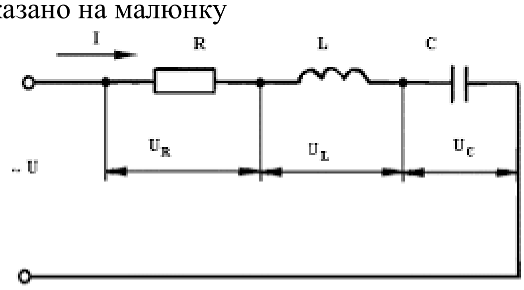
- Алгебраїчне $\underline{A} = A_1 + jA_2$
- Тригонометричне $\underline{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$
- Показникове $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$ де $j = \sqrt{-1}$

З геометричної точки зору комплексне число, це напрямлений вектор під кутом до осі OX яка в свою чергу виступає реальною віссю, а вісь OY уявною віссю

Задамо комплексний вектор $\underline{A}_m$. Якщо цей вектор заставити обертатись в додатному напрямі, тобто проти годинникової стрілки, з деякою швидкістю ω, то в показниковій формі запису це буде виглядати наступним чином: $\underline{A}_m = Ae^{j(\omega t+\alpha)} = \underline{A}e^{j\omega t}$, де $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$. Тобто, в часі цей вектор буде описувати синусоїд

За умовою в нас є струм: $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$. Якщо взяти заданий нами вектор $\underline{A}_m$ та розписати його в тригонометричній формі то в нас вийде $\underline{A}_m = A\cos(\omega t + \alpha) + jA\sin(\omega t + \alpha)$. З чого робив висновок, що для задання синусоїдальних струмів нам потрібна тільки уявна частина комплексного числа. А саме $\underline{\mathrm{I}}_m(\underline{A}_m) = \underline{\mathrm{I}}_m(Ae^{j(\omega t+\alpha)})$

Задамось якимось колом яке складається з резистора R, індуктивності L і ємності C як показано на малюнку



Будемо вважати, що нам задані параметри кола, тобто R,L,C та струм i, а потрібно знайти напругу u, причому: що напруга, що струм задані синусоїдними функціями

$i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$
$u = U_m \sin(\omega t + \beta)$

З відомих нам формул:

- $u_R = Ri$

- $u_l = L\frac{di}{dt}$
- $u_c = \frac{1}{C}\int idt$

За другим законом Кірхгофа в нас вийде:

$$u_R + u_L + u_C = u \qquad (1)$$

$$u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d(I_m \sin(\omega t + \alpha))}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \alpha) = \omega L I_m \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$c = \frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{C}\int (I_m \sin(\omega t + \alpha))dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$= \frac{I_m}{\omega C}\sin(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})$$

З даних формул видно, що напруга на резисторі співпадає по фазі з струмом. Напруга на індуктивності випереджає струм по фазі на кут $\frac{\pi}{2}$, а напруга на ємності відстає від струму по фазі на кут $\frac{\pi}{2}$.

Як було сказано раніше ми можем задати синусоїд через комплексну функції що ми і робим для останніх рівностей. Звідси:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = I_m e^{j(\omega t+\alpha)} = I_m e^{j\omega t} e^{j\alpha}$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta) = U_m e^{j(\omega t+\beta)} = U_m e^{j\omega t} e^{j}\beta$$

$$u_R = RI_m \sin(\omega t + \alpha) = RI_m e^{j(\omega t+\alpha)} = RI_m e^{j\omega t} e^{j\alpha}$$

$$u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = \omega L I_m e^{j(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})} = \omega L I_m e^{j\omega t} e^{j\alpha} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= j\omega L I_m e^{j\omega t} e^{j\alpha}$$

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C}\sin(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j\omega t} e^{j\alpha} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{I_m}{\omega C} e^{j\omega t} e^{j\alpha}$$

$$= \frac{I_m}{j\omega C} e^{j\omega t} e^{j\alpha}$$

Оскільки: $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j \qquad e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j = \frac{1}{j}$

З рівності (1) слідує:

$$RI_m e^{j\omega t} e^{j\alpha} + j\omega L I_m e^{j\omega t} e^{j\alpha} + \frac{I_m}{j\omega C} e^{j\omega t} e^{j\alpha} = U_m e^{j\omega t} e^{j}\beta$$

Як бачимо ми можемо поскорочувати рівність на $e^{j\omega t}$ та в лівій частині винести за дужки $I_m e^{j\alpha}$

$$I_m e^{j\alpha}(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) = U_m e^{j\beta}$$

$$I_m e^{j\alpha}(R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})) = U_m e^{j\beta}$$

Величина $X_L = \omega L$ називають реактивним опором котушки, а величину $X_C = \frac{1}{\omega C}$ називають реактивним опором конденсатора. Відповідно повний реактивний опір буде $X = X_L - X_C$ тому що їхні напруги відстають по фазі з струмом на кут π.

Позначимо $Z = R + jX$ комплексний опір.

$I_m e^{j\alpha} Z = U_m e^{j\beta}$ або $\underline{I_m} Z = \underline{U_m}$

Тобто ми отримали закон Ома в комплексній формі

Виразимо потужність в комплексній формі. Для цього обидві частини рівняння $Z = R + jX$ помножимо на I^2

$$I^2 Z = I^2 R + jI^2 X$$

Де $P = I^2 R$ – активна потужність, а $Q = I^2 X$ – реактивна потужність

Назвемо величину $I^2 Z$ комплексною потужністю і позначимо її як $\overline{S}$

Відповідно:

$$\overline{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j\varphi} = se^{j\varphi} \quad \text{де } \varphi = \beta - \alpha$$

Список використаною літератури

Ю.О.Карпов, Т.Є.Магас, В.Г.Мадьяров Конспект лекцій з курсу «теоретичні основи електротехніки» частина 1. Вінниця ВПІ 1992 С. 42-47

Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов Основы теории цепей 5-е издание Москва ЕНЕРГОАТОМИЗДАТ 1989. С 65-84

Г. И. Атебеков Теоретические основы электротехники 5-е издание Москва «ЭНЕРГИЯ» 1978 с 76-91

Остапюк Юрій Михайлович , 1ЕМ-18б, ФЕЕЕМ вінницький технічний університет м. Вінниця

Ільчій Олександр Васильович , 1ЕЕ-18б ФЕЕЕМ вінницький технічний університет м. Вінниця

Науковий керівник **Мадьяров В'ячеслав Губейович** к.т.н., доцент , доцент кафедри ТОЄ

Ostapyuk Yuri Mikhailovich student of 1EM-18b group , vinnytsia national technical university

Ilchey Oleksandr Vasilyevich student of 1EE-18b group , vinnytsia national technical university

Supervisor: **Madyarov Vyacheslav Gubeiovich** candidate of Techical Sciences Associate Professor, Associate Professor of department of theoretical foundations of electrical engineering Vinnytsia National Technical University