Застосування теорії масового обслуговування на стадії моделювання багатопроцесорних обчислювальних систем

Любомир Петришин
кафедра управління
AGH науково-технологічний університет
Краків, Польща
l.b.petryshyn(a)gmail.com

Любомир Петришин
кафедра інформатики
Прикарпатський національний університет
Івано-Франківськ, Україна
l.b.petryshyn(a)gmail.com

Application of the queueing theory at the stage of multiprocessor computing systems modeling

Lubomyr Petryshyn
dept. of Computer Science
AGH University of Science and Technology
Krakow, Poland
l.b.petryshyn(a)gmail.com

Lubomyr Petryshyn
dept. of Computer Science
Precarpathian National University
Ivano-Frankovsk, Ukraine
l.b.petryshyn(a)gmail.com

***Анотація*—У матеріалі статті праналізовано основні характеристи вхідних потоків задач, що підлягають обробці в багатопроцесорних обчислювальних системах при їх моделюванні на основі теорії масового обслуговування.**

***Abstract*—In article the main characteristics of input flows of tasks, which are to be processed in multiprocessor computing systems during their modeling on the basis of the queueing theory is analised.**

Ключові слова—обчислювальна система, теорія масового обслуговування; потік задач

Keywords—computing system; queueing theory; tasks flow

I. Вступ

Оптимізація архітектури багатопроцесорної обчислювальної системи щодо обчислювального навантаження є актуальним завданням обгрунтування техніко-економічних характеристик таких систем.

Мета дослідження полягає у застосуванні основ теорії масового обслуговування при моделюванні обчислювальних систем на стадії розробки.

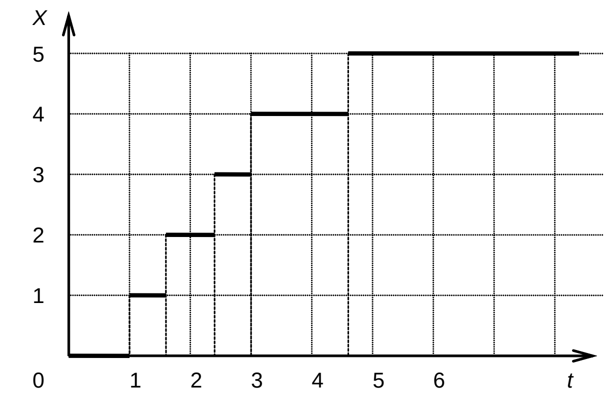
Застосування методології масового обслуговування дозволяє запроектувати архітектуру багатопроцесорної обчислювальної системи в оптимальній конфігурації із визначеними техніко-економічними параметрами.

II. Основна частина

Завданням довільної обчислювальної системи згідно теорії систем масового обслуговування є обробка задач, що поступають на обслуговування. *Вхідним потоком задач* в обчислювальних системах визначено сукупність задач, які поступають в систему на обробку. Проаналізуємо основні параметри вхідного потоку задач в обчислювальних системах. Це вимагає кількісного та якісного опису вхідного потоку і встановлення математичних методів, що дозволяють реалізувати процедуру обробки задач.

Однією із основних характеристик вхідного потоку є *частота* поступлення задач в систему за одиницю часу. Даний параметр може змінювати свої значення в функції часу та бути представленим відповідним законом розподілу, характер якого визначається в результаті проведення спеціальних статистичних досліджень, методичні основи яких викладено нижче.

Задачі на обслуговування в функції часу на вхід обчислювальних систем поступають довільним чином, що дозволяє подати вхідний потік як випадковий процес. Потік задач характеризується функцією $X(t)$, яка визначає кількість задач на обслуговування, що поступають впродовж інтервалу часу $(0, t)$. Для довільних значень t значення функції $X(t)$ є випадковою величиною, що може набувати тільки цілочисельних значень. В результаті проведення кількох дослідів значення функції не обов”язково повинні співпадати. Функція-результат $X_i(t)$ одного із дослідів визначається *реалізацією випадкової функції* $X_i(t)$ в даному досліді. На рис. 1 наведено приклад графічного зображення випадкової функції $X(t)$, що характеризує моменти поступлення окремих задач вхідного потоку в обчислювальну систему в функції часу.



Графік реалізації випадкової функції.

Проте наведений закон зовсім не означає, що на кожному іншому довільному інтервалі часу $(0, t)$ випадкова функція буде набувати таких самих значень. Кількість залежностей реалізацій випадкової функції є нескінченною множиною, що потребує відповідних методів її аналітичного подання. Випадкову функцію можна повністю визначити, якщо для довільних інтервалів часу $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n$ навести кількість задач, що поступають в обчислювальну систему в кожен із цих інтервалів. Кількість таких задач в кожному з випадків є цілочисельним значенням, а опосередковане значення потоку задач буде характеризуватись ймовірністю поступлення кількості задач k_i за час $(0, t_i)$

$$P\{X(t_i)=k_i\} = P_{ki}(t).$$

Значення ймовірності відмінне від нуля, якщо для моментів часу

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots < t_n$$

значення k_i задовольняють залежність

$$k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_i \le \ldots \le k_n,$$

оскільки функція $X(t_i)$ не спадає із зростанням t_i.

Тому функція

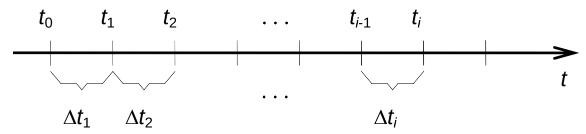
$$F(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n ; k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n) =$$

$$= P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \ldots, X(t_i) = k_i, \ldots, X(t_n) = k_n\}$$

для довільних $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n$ та $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$ повністю визначає вхідний потік задач.

На практиці зустрічаються вхідні потоки задач, що дозволяють визначити більш прості методи їх подання. Охарактеризуємо основні типи вхідних потоків.

Регулярним визначається такий потік (рис. 2), в якому задачі поступають в обчислювальну систему в моменти часу t_i через однакові інтервали часу Δt_i .



Моменти поступлення задач в обчислювальну систему за умови регулярного характеру вхідного потоку.

Для регулярного потоку чинна рівність

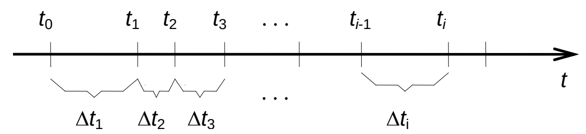
$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \ldots = \Delta t_i = \ldots = \Delta t_n, \text{ де } \Delta t_i = const.$$

В обчислювальних системах регулярні потоки зустрічаються досить рідко, проте більшість потоків можна подати та розглядати як квазірегулярні з відповідним аналітичним описанням.

Випадковим визначається такий потік (рис. 3), в якому задачі поступають в обчислювальну систему по черзі в довільні моменти часу.

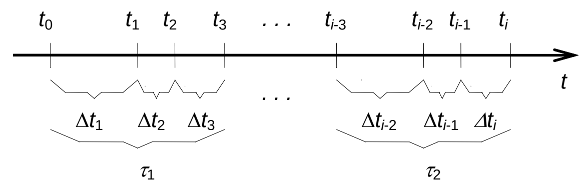
Для випадкового потоку чинна нерівність

$$\Delta t_1 \ne \Delta t_2 \ne \ldots \ne \Delta t_i \ne \ldots \ne \Delta t_n, \text{ де } \Delta t_i = var.$$



Моменти поступлення задач в обчислювальну систему за умови випадкового характеру вхідного потоку.

Стаціонарним визначається потік (рис. 4), для якого ймовірність виникнення тієї чи іншої кількості задач за означений інтервал часу t залежить тільки від тривалості вказаного інтервалу і не залежить від його розташування на часовій осі.



Моменти поступлення задач в ОС для стаціонарного вхідного потоку.

Ймовірнісний характер стаціонарного потоку в часі є незмінним. Для стаціонарних потоків закон розподілу групи випадкових функцій

$$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_i), \ldots, X(t_n)$$

співпадає з законом розподілу

$X(t_1+b)–X(t_b)$, $X(t_2+b)–X(t_b)$, ...,$X(t_i+b)–X(t_b)$, ...,$X(t_n+b)–X(t_b)$,

тобто, розподіл випадкових функцій є відповідно залежний від

$$t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_n$$

і не залежить від величини b, де b - довільний відрізок часу.

Здебільшого в теорії систем масового обслуговування вважають, що задачі в систему поступають не групами, а по одній. Ймовірність виникнення кількох одночасних запитів є виключеною, або нехтуючи малою. Потік, для якого ймовірність $P_j(t_i)$ одночасного поступлення кількох задач $j>1$ в обчислювальну систему в нескінченно малому околі $(0, t_i)$ в довільний момент часу t_i є нехтуючи малою величиною, визначається *ординарним*, тобто

$$\lim_{t_i \to 0} \frac{P_j(t_i)}{t_i} = 0,$$

або $P_j(t_i) \to 0$, при $t_i \to 0$.

В ОС можливі випадки, коли задачі на обслуговування поступають групами. Тоді потік підрозбивається, розглядається як *квазіординарний*, що дозволяє значно зменшити обсяги обчислень, не спричинюючи істотних похибок результатів обчислення параметрів систем обробки.

Властивість *відсутності післядії* характеризує вхідні потоки, в яких для довільних інтервалів часу число задач, що формується в попередні інтервали, ніяким чином не впливає на число задач, що формуються в наступні інтервали часу. Тобто, задачі в потоці на обслуговування є повністю взаємонезалежними, коли закон розподілу групи задач

$$X(t_i+b) – X(b), \text{ де } (i = 0, 1, 2, ..., i, ..., n)$$

при $t_i > 0$ і довільному $b > 0$ не залежить від значень величини $X(t)$ при $t < b$. Ймовірність поступлення k задач в інтервалі часу $(b, b+t)$, якщо кількість задач, що поступають в систему до моменту b буде довільною, співпадає з безумовною ймовірністю цієї події.

На практиці найбільш часто зустрічаються *елементарні* потоки, що одночасно володіють властивостями стаціонарності, ординарності та відсутністю післядії. Умова відсутності післядії є основною вимогою для елементарного потоку, що достатньо повно описується системою функцій

$$P_0(t), P_1(t), P_2(t), ..., P_k(t), ...,$$

де k набуває довільних додаткових цілочисельних значень.

Теорема 1. Для довільного стаціонарного потоку існує границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_j(t)}{t} = \lambda > 0,$$

де $P_j(t) = 1 – P_0(t)$.

Величина λ є параметром вхідного потоку, яка характеризує його інтенсивність, визначається середньою кількістю задач і дорівнює математичному очікуванню числа задач, що поступають в систему за одиницю часу. λ може набувати нескінченно великих значень.

Функція $P_j(t) = 1 – P_0(t)$ характеризує ймовірність поступлення в систему хоча б однієї задачі ($j>0$) на інтервалі часу t.

Теорему приймаємо без доведення.

На підставі послідовності аналітичних викладок отримуємо ймовірність того, що ні одна задача не поступить в систему за інтервал часу t

$$P_0(t) = C\, e^{-\lambda t}.$$

Для визначення постійної C скористаємось тим, що $P_0(0) = 1$, оскільки ймовірність відсутності задач на інтервалі часу, що рівний нулю, дорівнює одиниці.

Для $t=0$ $P_0(0) = C = 1$. Тому $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Із зростанням t значення ймовірності того, що в систему не поступить ні однієї задачі, швидко зменшується, і тим швидше, чим більше значення λ.

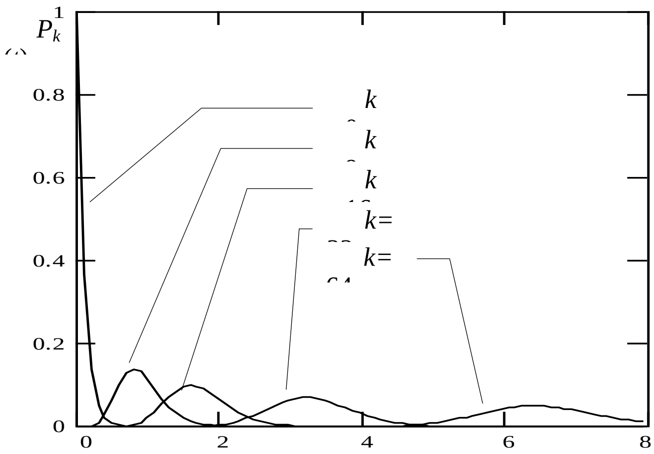
Ймовірність надходження в систему точно k задач на інтервалі часу t визначається як

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!}\, e^{-\lambda t},$$

де e - основа натурального логарифму.

Наведена аналітична залежність дозволяє твердити, що для більшості реальних обчислювальних систем масового обслуговування, які з достатнім степенем достовірності описуються елементарними вхідними потоками, число задач в інтервалі t розподілене за законом Пуассона з параметром λt.

Для елементарного потоку ймовірність $P_k(t)$ поступлення в інтервалі часу t точно k задач досягає максимуму для значень $t = k/\lambda$, де $k = (0, 1, 2, ..., i, ...)$ (рис. 5).



Залежності ймовірностей поступлення в систему точно *k* задач при елементарному характері вхідного потоку.

Надалі передбачається, що вхідні в систему потоки та дисципліна обслуговування задач системою є пуассонівськими, взаємонезалежними і розподіленими згідно показникового закону з параметром λ.

Показниковим (експоненціальним) є розподіл неперервної випадкової величини, який описується щільністю ймовірності появи випадкової величини

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & \text{для} \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

[1] Петришин Л. Саля Д. Архитектоника многопроцессорных компьютеризованных систем управления.— Architecture of the multiprocessor computerized management systems / Lubomyr PETRYSHYN, Dariusz SALA // W: Zarządzanie przedsiębiorstwem [Dokument elektroniczny] : teoria i praktyka 2014 / pod red. nauk. Piotra Łebkowskiego. — Wersja do Windows. — Dane tekstowe. — Kraków : Wydawnictwa AGH, 2014. — 1 dysk optyczny. — (Monografia Wydawnictw Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie ; KU 0583). — e-ISBN: 978-83-7464-732-8. — S. 185–199.

[2] Ложковский А.Г. Теория массового обслуживания в телекоммуникациях: учебник / А.Г. Ложковский. – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2012. – 112 с.

Таким чином, щільність ймовірності появи випадкової величини визначається тільки одним параметром вхідного потоку λ.

III. Висновки

Таким чином, застосування методології теорії масового обслуговування дозволяє змоделювати навантаження багатопроцесорної обчислювальної системи та запроектувати систему із оптимальними техніко-економічними пареметрами.

Література References

[1] Bhat U.N., An Introduction to Queueing Theory. Springer Science + Business Media New York, 2015. ISBN 978-0-8176-8421-1. XIV, - 339 p.

[2] Palaniammal S., Probability and Queueing Theory. PHI Learning Pvt. Ltd., 2012. ISBN 8120342445, 9788120342446. - 683 p.

[3] Gross D., Harris C.M., Fundamentals of queueing theory. Wiley, 1974. ISBN 047132812X, 9780471328124. – 556 p.

[4] Петришин Л. Математические модели обслуживания информационных процессов в многопроцессорных компьютеризованных системах управления. In monography Information Technology in Selected Areas of Management. / Sc.Ed. Lyubomyr Petryshyn. Published by AGH University of Science and Technology Press. KU 0651. Krakow 2016. (– 152 p.) – P. 11-32.

[5] Петришин Л.Б., Вашкелевич В. Практика використання теорії масового обслуговування в курсі предмету «Архітектура обчислювальних систем». // Науково-практична конференція «Інформаційні технології та компютерне моделювання ІТКМ-2016» 23-28 травня 2016 р. Івано-Франківськ : Супрун В.П., 2016. (-232 с.) – С. 58-59.