Застосування ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації

Артем Ізмайлов
кафедра інформатики
Прикарпатський національний університет
Івано-Франківськ, Україна
aiartefact@gmail.com

Application of Orthogonal Transform on the Basis of Symmetric Ternary Functions for Digital Information Processing

Artem Izmailov
Department of Computer Science
Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine
aiartefact@gmail.com

***Анотація*—На основі трійкових симетричних функцій синтезовано відповідне ортогональне перетворення. Ефективність застосування отриманого ортогонального перетворення у задачах перетворення сильнокорельованих сигналів у слабкокорельовані коефіцієнти оцінена у порівнянні з перетвореннями Уолша-Адамара та Хаара.**

***Abstract*—An orthogonal transform was synthesized on the basis of symmetric ternary functions. The application effectiveness of the synthesized orthogonal transform was estimated for the problems of converting strongly correlated signals in weakly correlated coefficients in comparison with Walsh-Hadamard and Haar transforms.**

Ключові слова—цифрова обробка інформації; ортогональне перетворення; трійкові симетричні функції; перетворення Уолша-Адамара; перетворення Хаара

Keywords—digital information processing; orthogonal transform; symmetric ternary functions; Walsh-Hadamard transform, Haar transform

I. Вступ

Цифрова обробка інформації є центральною складовою більшості сучасних технічних систем та інформаційних технологій, які використовуються у різних галузях економіки, виробництва, управління та зв’язку [1 – 5]. З цього випливає, що ефективні рішення у галузі цифрової обробки інформації призведуть до підвищення ефективності перебігу процесів, які включають цифрову обробку інформації, у прикладних галузях.

Актуальним завданням цифрової обробки інформації є обробка цифрових сигналів на основі ортогональних перетворень [2 – 5]. У процесі розв’язання даного завдання необхідно розв’язати проблему розробки нових ортогональних перетворень, які дозволяють з вищою ефективністю проводити обробку конкретних цифрових сигналів, у тому числі сигналів, для яких існуючі методи працюють із недостатнім рівнем ефективності [3 – 5].

Аналіз досліджень у галузі цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень вказує, що досліджень у напрямі побудови ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій не проводилось [2 – 5]. При цьому, доведено, що відповідна трійковим симетричним функціям логіка є більш ефективною порівнянні із двійковою [6, 7]. Звідси випливає припущення про високу ефективність для цифрової обробки інформації ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій, що зумовлює актуальність завдання розробки та аналізу ефективності застосування даного перетворення.

Метою дослідження є побудова ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій та оцінювання ефективності його застосування у задачах перетворення сильнокорельованих сигналів у слабкокорельовані коефіцієнти.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в успішній побудові ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій та порівнянні ефективності його застосування у задачах перетворення сильнокорельованих сигналів у слабкокорельовані коефіцієнти з перетвореннями Уолша-Адамара та Хаара.

II. Трійкові симетричні функції

Трійкові симетричні функції задаються аналітичним виразом (1) [8].

$$Ter_n(x) = \begin{cases} 0,\ 0 \le modh(x - 3^n, 3^{n+1}) < 3^n, \\ 1,\ 3^n \le modh(x - 3^n, 3^{n+1}) < 2 \cdot 3^n, \\ -1,\ 2 \cdot 3^n \le modh(x - 3^n, 3^{n+1}) < 3^{n+1}. \end{cases} \quad (1)$$

де n – порядковий номер функції, x – цілочисельний аргумент, $mod(x,p)$ – допоміжна функція, задана аналітичним виразом (2).

$$modh(x,p) = \begin{cases} mod(x,p) + p, \text{якщо } x < 0, \\ mod(x,p), \quad \text{якщо } x \ge 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $mod(x,p)$ – функція залишку від ділення числа x на число p.

Однак, у вигляді (1) трійкові симетричні функції непридатні для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень, у зв'язку з неповнотою даної системи та її неортогональністю [7, 8]. З метою подолання проблеми неможливості застосування системи (1) трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень систему (1) модифіковано до вигляду (3).

$$Ter\,01_{n,i}(\theta) = Ter_{\left|3^n - 1 - i\right|}(\theta * 3^{3^n}), \quad (3)$$

де $n=log_3N$ – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, N – кількість функцій у наборі, $\theta=t/T$ – параметр часу, тобто час, нормований до інтервалу T, t – поточне значення часу, $i=0,1,2,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції, $Ter_n(\theta)$ – трійкові симетричні функції, які задані аналітичним виразом (1).

Система (3) не володіє властивістю повноти [8]. У зв'язку з цим, побудовано систему добутків (4), яка, однак, не володіє властивістю ортогональності [8].

$$Ter\,01\,Mult_{ord,num}(\theta) = \prod_{j=1}^{3^{ord}} Ter\,01_{ord,3^{ord}-j}(\theta)^{A_{num+1,j}}, \quad (4)$$

де $ord=\log_3(\log_3 N)$ – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, $N=3^{3^{ord}}$ – кількість функцій у наборі ord, $num=0,1,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції у наборі, $\theta=t/T$ – параметр часу, тобто час, нормований до інтервалу T, t – поточне значення часу, 3^{ord} – кількість функцій $Ter01_{n,i}(\theta)$, які задані аналітичним виразом (3), у наборі ord, $A_{num,j}$ – елемент рядка num та стовпця j матриці трійкового незваженого коду Грея А.

На основі обчислення рангів матриць значень функцій системи (4) встановлено, що дана система володіє властивістю лінійної незалежності, а отже для подолання її неортогональності можна використати процес ортогоналізації Грама-Шмідта [9]. Перебіг процесу ортогоналізації за процедурою Грама-Шмідта, може бути знайдений у [8]. Отримана система ортогоналізованих добутків є лінійно незалежною, ортогональною та повною [8]. Для спрощення запису ортогоналізована система може бути позначена як

$$Ter_n^{(i)}(\theta), \quad (5)$$

де $n=\log_3(\log_3 N)$ – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, $N=3^{3^n}$ – кількість функцій у наборі, $i=0,1,2,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції у наборі.

Для спрощення візуального аналізу результатів і без втрати загальності, у подальшому можна розглядати матрицю значень системи ортогоналізованих добутків трійкових симетричних функцій, яка утворена функціями перших двох порядків першого набору системи (Рис. 1).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 & -2/9 & 4/9 & -2/9 & 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Матриця значень функцій перших двох порядків першого набору системи (5)

III. Ортогональне перетворення на основі трійкових симетричних функцій

У матричній формі дискретне перетворення вхідного інформаційного потоку X в базисі, який заданий матрицею M, подається згідно (6).

$$Y = MX. \quad (6)$$

При цьому, на матрицю M доцільно накласти вимогу щодо її ортогональності, оскільки, у випадку її ортогональності використання ортогонального перетворення гарантуватиме, що мінімізація похибки квантування в області перетворення призведе до мінімізації похибки квантування в просторовій області, що, у свою чергу, передбачає вищий ступінь подібності вихідних та відновлених даних [10].

Матриця значень функцій перших двох порядків першого набору системи (5) (Рис. 1) не є ортогональною. Аналогічно, довільна матриця значень у межах наборів функцій (5) не є ортогональною. Відповідно, виникає необхідність уведення нормуючого коефіцієнту для функцій системи (5) з метою отримання ортогональної матриці значень функцій даної системи.

Обчислення норм рядків матриці значень функцій перших двох порядків першого набору системи (5) (Рис. 1) вказує на те, що вони не рівні між собою і, відповідно, неможливо увести єдиний нормуючий коефіцієнт для усієї матриці. У зв'язку з цим, виникає необхідність уведення окремих нормуючих коефіцієнтів для кожної функції системи (5). Загальний аналітичний вираз, за допомогою якого може бути отриманий коефіцієнт для *i*-ої функції з *n*-ого набору системи (5), має вигляд (7).

$$C_n^{(i)} = \sqrt{\frac{3^{3^n}}{\sum_{t=0}^{3^{3^n}-1} Ter_n^{(i)}\left(\frac{t}{3^{3^n}}\right)^2}}, \qquad (7)$$

де $n=\log_3(\log_3 N)$ – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, $N=3^{3^n}$ – кількість функцій у наборі, $i=0,1,2,\ldots,N-1$ – порядковий номер функції у наборі, $Ter_n^{(i)}(\theta)$ – ортогоналізовані добутки трійкових симетричних функцій (система (5)).

Матриця значень функцій перших двох порядків першого набору системи (5) помножених на відповідні нормуючі коефіцієнти (7) (Рис. 2) не є ортогональною, але норми усіх її рядків рівні *9*, тобто розмірності матриці. Такий випадок допускається теорією цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень, оскільки, у такому випадку, матрицю перетворення достатньо помножити на коефіцієнт, рівний $1/\sqrt{N}$, де N – розмірність матриці перетворення [10]. Водночас, дана операція дозволить залишити енергетичну характеристику вихідних даних незмінною [4].

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-\sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \\
1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\
-3/2 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 3/2 \\
3/2 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & -3/\sqrt{2} & 0 & 3/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\
-\sqrt{3}/2 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\
1/2 & -1 & 1/2 & -1 & 2 & -1 & 1/2 & -1 & 1/2
\end{pmatrix}$$

Матриця значень функцій перших двох порядків першого набору системи (5) помножених на коефіцієнти (7)

У відповідності до наведених міркувань, матриця ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій має вигляд (8).

$$T = \frac{1}{\sqrt{N}} T', \qquad (8)$$

де N – розмірність матриці перетворення, T' – матриця значень функцій системи (5) помножених на коефіцієнти (7).

У зв'язку з тим, що матриця (8) є ортогональною, її можна використати у якості матриці ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій. Дискретне ортогональне перетворення на основі трійкових симетричних функцій одновимірного інформаційного потоку $X=\{X(0),X(1),\ldots,X(N-1)\}$ в матричному записі подається згідно співвідношення (9).

$$Y = TX, \qquad (9)$$

де $Y=[Y(0),Y(1),\ldots,Y(N-1)]^T$ – N-компонентний вектор спектральних коефіцієнтів ортогонального перетворення, $N=3^n$, $n=0,1,\ldots$, T – матриця перетворення розміру $N\times N$, яка задана виразом (8), $X=[X(0),X(1),\ldots,X(N-1)]^T$ – N-компонентний вектор дискретних значень одновимірного сигналу, для якого здійснюється перетворення.

IV. Оцінка ефективності за критерієм ступеня декореляції коефіцієнтів перетворення

Для оцінювання ефективності дискретного ортогонального перетворення в заданому базисі використовується статистична модель вхідного сигналу [5, 10]. У даній моделі вхідний N-координатний вектор X розглядається як вибірка випадкового процесу. Елементи вектора X є реалізацією одновимірного марківського процесу першого порядку з математичним сподіванням рівним нулю та дисперсією рівною одиниці. Даний марківський процес задається коваріаційною матрицею (10) P_x, (i, j)-й елемент якої рівний коефіцієнту кореляції між сусідніми елементами $\rho^{|i-j|}$, $0 \le \rho \le 1$ [5, 10].

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{N-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \rho^{N-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Для ортогонального перетворення (6) коваріаційна матриця P_Y вектора коефіцієнтів перетворення Y має вигляд (11) [3, 5, 10].

$$P_Y = MP_X M^T = \{ p_Y(i, j)\} \qquad (11)$$

У задачах перетворення вхідного вектора у вектор слабкокорельованих коефіцієнтів ефективність застосування ортогонального перетворення визначається за допомогою показника ступеня зменшення кореляції коефіцієнтів перетворення порівняно з елементами вхідного вектора (12). Критерій (12) було запропоновано В.К. Чемом у 1989 році [10]. Згідно критерію (12) ефективнішим вважається перетворення, для якого показник η вищий [9, 10].

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{N} |p_Y(i,i)|}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |p_Y(i,j)|} * 100\% . \qquad (12)$$

Результати обчислень ступеня декореляції елементів η (12), який забезпечується перетвореннями Уолша-Адамара упорядкованим за Уолшем (η_{Wal}), Хаара (η_{Har}) та ортогональним перетворенням (9) (η_{Ter}), в залежності від коефіцієнта кореляції ρ між сусідніми елементами вибірки вхідного інформаційного потоку при ρ=0,1; ρ=0,5; ρ=0,9 для різних розмірів вхідних векторів наведено у таблиці 1.

Дані у таблиці 1 дозволяють зробити висновок про те, що ортогональне перетворення (9) дозволяє зменшити коефіцієнт кореляції елементів до 90,5%. У порівнянні з перетвореннями Уолша-Адамара та Хаара перетворення (9) володіє приблизно однаковою з ними ефективністю у задачах перетворення слабкокорельованих сигналів у слабкокорельовані коефіцієнти і вищою ефективністю у задачах перетворення сильнокорельованих сигналів у слабкокорельовані коефіцієнти. Значна перевага перетворення (9) спостерігається для сигналів із середнім рівнем кореляції елементів (ρ=0,5).

TABLE V. СТУПІНЬ ДЕКОРЕЛЯЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ ОРТОГОНАЛЬНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ, %

N	**ρ**	**0,1**	**0,5**	**0,9**
8	ηWal	90,95	69,75	77,14
	ηHar	86,09	59,27	70,34
9	ηTer	90,52	70,84	78,31
16	ηWal	86,99	59,40	60,85
	ηHar	82,78	49,52	51,06
27	ηTer	85,48	57,19	54,33
32	ηWal	83,37	51,72	48,21
	ηHar	80,94	44,74	36,92
64	ηWal	80,03	45,80	39,62
	ηHar	79,95	42,34	29,01
81	ηTer	81,67	49,37	39,71
128	ηWal	76,95	41,09	33,63
	ηHar	79,42	41,11	25,20
243	ηTer	78,79	44,35	32,38
256	ηWal	74,10	37,26	29,21
	ηHar	79,14	40,48	23,37

V. ВИСНОВКИ

Трійкові симетричні функції у чистому вигляді (система (1)) не можуть бути використані для цифрової обробки інформації на основі ортогональних перетворень. З метою їх адаптації для даних процесів на їх основі побудовано рад систем функцій, які дозволили синтезувати ортогональне перетворення (9) та оцінити його ефективність у порівнянні з існуючими за критерієм (12). Результати оцінки (Табл. 1) вказали на вищу ефективність перетворення (9) для середніх та високих значень рівня кореляції елементів сигналу.

Подальші дослідження полягають у порівняльному оцінюванні ефективності перетворення (9) за відмінними від (12) критеріями та визначенні кола задач, для вирішення яких перетворення (9) є найбільш пристосованим.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Э. Айфичер, Б. Джервис. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.

[2] Л.А. Залманзон, Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

[3] Н. Ахмед, Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао; пер. с англ. Т.Э. Кренкеля. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

[4] Д. Сэломон, Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон; пер. с англ. В.В. Чепыжова. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.

[5] K.R. Rao, Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications / K.R. Rao, P. Yip, Academic Press, 1990, p. 512.

[6] B. Hayes, Computing science. Third base. A reprint from American Scientist, the magazine of Sigma Xi, the Scientific Research Society, vol. 89, Nr. 6. November–December 2001, pp. 490-494.

[7] А.В. Ізмайлов, Трійкові симетричні функції та їх застосування у цифровій обробці інформації / А. В. Ізмайлов, Л. Б. Петришин // Системи обробки інформації. — 2016. — № 4. — С. 41-44.

[8] A. Izmailov, Symmetric ternary functions and their application in orthogonal transforms / A. Izmailov, L. Petryshyn // IEEE Xplore Digital Library, in press.

[9] L.E. Franks, “Signal Theory”, Prentice Hall, 1969, p. 318.

[10] P.W. Hawkes, Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. 88, Academic Press, 1994, p. 365