УДК 519.2, 519.6, 519.8

І. В. Віштак[1]
В. В. Федотова[1]

РОЗВЯ'ЗУВАННЯ ЗАДАЧ МЕДИЦИНИ ТА ТЕХНІКИ МАТЕМАТИЧНИМИ МЕТОДАМИ ТА РІВНЯННЯМИ

[1] Вінницький національний технічний університет

Анотація

Розглянуто математичні методи розв'язування рівнянь, які дозволяють оцінити результати дослідження впливу різних лікарських засобів, їх концентрації потрібного рівня. Запропоновано використання оптимального методу розв'язання рівнянь для отримання максимально точного результату.

Ключові слова: метод, рівняння, ітерації, наближення, значення, функція.

Abstract

Mathematical methods for solving equations that allow us to evaluate the results of a study of the influence of various drugs, their concentration of the desired level are considered. The use of the optimal method for solving equations to obtain the most accurate result is proposed.

Keywords: method, equation, iteration, approximation, value, function.

Вступ

В наш час завдання розв'язування рівнянь постійно виникають на практиці, наприклад, в медицині при дослідженні дії лікарських препаратів, важливо знати, коли концентрація речовини досягне заданого рівня, в економіці, для визначення, коли прибуток досягне певного значення, в техніці, для визначення міцності, стійкості та всіх показників надійності приладу, і т.д. [1, 2]. Представлення задач та проблем будь яких галузей за допомогою математичних моделей значно спрощує знаходження правильного рішення [3, 4].

Метою роботи є визначення оптимального методу розв'язання задач за допомогою запропонованих математичних рівнянь для отримання максимально точного результату.

Результати дослідження

У завданнях оптимізації часто необхідно визначати точки, в яких похідна функції звертається в 0, що є необхідною умовою локального екстремуму. При побудові оцінок методом найменших квадратів або методом максимальної правдоподібності також доводиться вирішувати нелінійні рівняння та системи рівнянь.

Отже, виникає цілий клас задач, пов'язаних з перебуванням рішень нелінійних рівнянь [2].

У найпростішому випадку у нас є функція f, задана на відрізку (a, b) і приймаюча певні значення.

Кожному значенню x з цього відрізка ми можемо зіставити число $f(x)$, це і є функціональна залежність, ключове поняття математики.

Найпростішим методом знаходження коренів рівняння $f(x)=0$ є метод поділу навпіл або дихотомія.

До переваг методу розподілу навпіл слід віднести його високу надійність і простоту. Недоліком методу є той факт, що перш ніж почати його застосування, необхідно знайти дві точки, значення функції в яких мають різні знаки. Очевидно, що метод непридатний для коренів парної кратності, а також не може бути узагальнений на випадок комплексних коренів та на системи рівнянь.

Порядок збіжності методу – лінійний, на кожному кроці точність зростає вдвічі, чим більше зроблено ітерацій, тим точніше визначено корінь.

Класичний метод Ньютона або дотичних полягає в тому, що якщо x_n – деяке наближення до кореня x рівняння $f(x)=0$, $f \in C^1$, то наступне наближення визначається як корінь дотичної до функції $f(x)$, проведеної в точці x_n.

Перевагою методу є те, що без будь-яких змін метод узагальнюється на комплексний випадок.

Недоліком методу Ньютона є необхідність обчислення похідних на кожному кроці.

Метод січних. Щоб уникнути обчислення похідної, метод Ньютона можна спростити, замінивши похідну на наближене значення, обчислене по двох попередніх точках.

Це двохкроковий ітераційний процес, оскільки використовує для знаходження подальшого наближення два попередніх.

Порядок збіжності методу січних нижче, ніж у методу дотичних і дорівнює в разі одноразового кореня φ.

Ця величина називається золотим перетином:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6180339887...$$

Оскільки знання похідною не потрібно, то при тому ж обсязі обчислень в методі січних (незважаючи на менший порядок збіжності) можна домогтися більшої точності, ніж в методі дотичних.

Метод парабол. Трикроковий метод полягає в наближенні x_{j+1} визначається по трьох попередніх точках x_j, x_{j-1}, x_{j-2}.

Порядок збіжності методу парабол вище, ніж у метода січних, але нижче, ніж у метода Ньютона.

Важливою відмінністю від раніше розглянутих методів, є та обставина, що навіть якщо матеріальна *f(x)* при речових *x* і стартові наближення обрані речовими, метод парабол може привести до комплексного корня початкового завдання.

Цей метод дуже зручний для пошуку коренів многочленів високого ступеня.

Метод простих ітерацій. Задачу находження розвязків рівнянь можна сформулювати як задачу знаходження коренів: *f(x)=0*, або як задачу знаходження нерухомої точки: *F(x)=x*.

Нехай *F*:[a, b]→[a, b] і *F* – стискання: $|F(x)-F(y)| \le q|x-y|,\ q \le 1$ (зокрема, той факт, що *F* – стиснення, означає, що $F \in C_{[a,\,b]}$).

Нехай існує єдина нерухома точка *x*. Вона може бути знайдена як межа простої ітерації

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_{n+1} = F(x_n),$$

Де початкове наближення *x* – довільна точка проміжка [a, b].

Якщо фукнція *F*диференціюється, то зручним критерієм стискання є число *q*.
Дійсно, за теоремою Лагранжа:

$$|F(x)-F(y)| = |F'||c||x-y| = q|x-y|.$$

Таким чином, якщо похідна менше одиниці, то *F* є стисненням.

Умова $F([a,b]) \subseteq [a,b]$ необхідна, бо якщо, наприклад, *F(x)=2* на [0,1], то нерухома точка відсутня, хоча похідна дорівнює нулю. Швидкість збіжності залежить від величини *q*. Чим менше *q*, тим швидше збіжність.

Метод Ньютона представляє собою частинний випадок методу простих ітерацій.

Якщо $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, то видно що при $f \in C^2$ існують межі кореня, в яких $|F'| \le 1$.

$$F' = 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2} = \frac{ff''}{(f')^2},$$

Якщо *x* корінь кратності α, то в його межах $f(x) \approx \alpha(x-x_*)^\alpha$, а тому $F'(x_*) = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Якщо *x* – простий корінь, то збіжність методу дотичних квадратична (тобто порядок збіжності дорівнює 2).

Оскільки $x_{j+1} - x_* = x_j - x_* - \dfrac{f(x_j)}{f'(x_j)}$, то

$$\frac{x_{j+1} - x_*}{(x_j - x_*)^2} = \frac{1}{x_j - x_*} - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)(x_j - x_*)^2} =$$

$$= \frac{1}{x_j - x_*} - \frac{f'(x_*)(x_j - x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*)(x_j - x_*)^2 + o((x_j - x_*)^2))}{(x_j - x_*)^2\left[f'(x_*) + f''(x_*)(x_j - x_*)^2 + o(x_j - x_*)\right]},$$

Звідки

$$\lim_{j\to\infty} \frac{x_{j+1} - x_*}{(x_j - x_*)^2} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}.$$

Таким чином збіжність метода Ньютона дуже швидка.

Недоліком майже всіх ітераційних методів знаходження коренів є те, що вони при одноразовому застосуванні дозволяють виявити тільки один корінь функції, до того ж, ми не знаємо який саме.

Щоб знайти інші корені, можна було б брати нові стартові точки і застосовувати метод знову, але немає гарантії, що при цьому ітерації зійдуться до нового корені, а не до вже знайденого, якщо взагалі зійдуться.

Ми розглянули рішення рівнянь тільки в одновимірному випадку, знаходження рішень багатовимірних рівнянь істотно більш важке завдання.

Висновки

Встановлено, що запропоновані методи мають місце в вирішенні задач медицини та техніки , а також пропонується використовувати метод ітерацій, як досить точний та в подальших дослідження намагатися знайти більш оптимальні методи та звузити кількість використовуваних методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко М. Ф. Математика для вступників до вузів : навч. посібник / М. Ф. Бондаренко, В. А. Дікарєв, О. Ф. Мельников та інші. – Харків : «Компанія СМІТ», 2002. – 1120 с.
2. Егоров В. К. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / В. К. Егоров, В. В. Зайцев, Б. А. Кордомский ; под ред. М. И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1992. – 528 с.
3. Литвиненко В. И. Практикум по элементарной математике / В. И. Литвиненко. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с.
4. Михалевич В. М. Математичне програмування разом з Maple. Частина І. Методи розв’язування задач лінійного програмування : навчальний посібник / Михалевич В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 158 с.

Федотова Вікторія Володимирівна — студентка гр. 1ПМ-19б, факультету машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: fedotova04050405@gmail.com

Віштак Інна Вікторівна — канд. техн. наук, доцент кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: innavish322@gmail.com

Fedotova Victoria V. — student of group 1PM-19b, Faculty of Machine Building and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : fedotova04050405@gmail.com

Vishtak Inna V. — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Faculty of Machine Building and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : innavish322@gmail.com