УДК 629.083 DOI: https://doi.org/10.31649/2413-4503-2019-10-2-40-47

В. М. Михалевич
В. О. Краєвський

ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙМЕНШИХ ТА НАЙБІЛЬШИХ ЗНАЧЕНЬ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОКРЕМОГО КЛАСУ ДВОЛАНКОВОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Розглянуто задачу визначення граничної накопиченої деформації до руйнування матеріалу для окремого класу зміни швидкості деформацій відповідно до лінійних дволанкових траєкторій. Всі траєкторії відповідають таким вимогам: в початковий момент швидкість деформації дорівнює нулю, досягає максимального значення в точці зламу та зменшується впродовж другої ланки траєкторії аж до досягнення граничного стану матеріалу. Показано, що для цих траєкторій задача визначення граничної накопиченої деформації зводиться до задачі нелінійного програмування, в якій цільова функція та обмеження є нелінійними функціями трьох невідомих параметрів: координат точки зламу та швидкості деформації в момент досягнення граничного стану. Детально досліджено випадок, що характеризується одночасним досягненням граничного стану матеріалу та нульового значення швидкості деформацій. Показано, що у двох граничних випадках – прямування моменту зламу траєкторії до нуля або до часу руйнування, дволанкова траєкторія вироджується у відповідні одноланкові ліву та праву граничні траєкторії. Під час дослідження та пошуку аналітичного розв'язку сформульованої задачі нелінійного програмування сформульовано та доведено теорему про найменше та найбільше значення швидкості деформацій, згідно з якою найбільша швидкість деформацій має місце для лівої граничної траєкторії та монотонно зменшується з поступовим переходом до правої граничної траєкторії. Теорему доведено з використанням елементів математичного аналізу та теорії функціональних рядів. Отримання для накопиченої деформації аналітичного виразу в замкненому вигляді разом із застосуванням цієї теореми надало можливість знайти закономірності зміни граничної накопиченої деформації в залежності від моменту досягнення точки зламу. Показано, що закономірності зміни граничної накопиченої деформації, що визначається на основі всієї дволанкової траєкторії, аналогічні закономірностям зміни швидкості деформацій у точці зламу. Звернено увагу на відсутність у літературі з теорії підсумовування пошкоджень подібних постановок задач та отриманих результатів.

Ключові слова: накопичена деформація, швидкість деформації, підсумовування пошкоджень, варіаційна задача, нелінійне програмування.

Вступ

Інтерес наукової спільноти до питань моделювання поведінки заготовок та деталей із різних матеріалів підчас непружного деформування та прогнозування граничного стану до тріщиноутворення зростає з кожним роком, про що свідчать нові практичні застосування цих результатів та збільшення відповідних публікацій [1, 2]. На думку авторів [3] вказані результати моделювання необхідні для покращення якості виробів різного призначення. Однак отримання достовірного прогнозу поведінки матеріалів пов'язане з дослідженням складних залежностей граничних пластичних деформацій матеріалу від показників напруженого стану, температури та швидкості деформації. Дослідити вказані залежності практично неможливо без розробки відповідних математичних моделей.

Систематичні дослідження з розробки моделей підсумовування пошкоджень спадкового типу та дослідження їх властивостей здійснюються авторами впродовж багатьох останніх років. Сформульовано та досліджено варіаційні задачі в теорії підсумовування пошкоджень [4, 5, 6]. Сформульовано, досліджено та розв'язано задачі нелінійного програмування для різних траєкторій ступеневого деформування [5, 6, 7, 8]. Визначено закони зміни швидкості деформації, що спричиняють перехід матеріалу в стан надпластичності [9, 10].

У цій статті представлено результати дослідження граничних деформацій для окремого класу лінійного дволанкового деформування.

Результати дослідження

Розглянемо одну з пари двоїстих варіаційних задач, що сформульовані в рамках теорії підсумовування пошкоджень [4, 5, 6], це визначення закону зміни швидкості деформації, при якому за заданий час досягнення граничного стану матеріал набуває найбільшої деформації. Сформульована задача відноситься до варіаційних задач ізопериметричного типу.

Цільовою функцією є величина граничної накопиченої пластичної деформації $\bar{\varepsilon}_f$

$$\bar{\varepsilon}_f = \int_0^{t_f} \dot{\varepsilon}_i(\tau) \cdot d\tau \to \max \tag{1}$$

де t, τ – час; $\dot{\varepsilon}_i$ – швидкість деформації; t_f – момент досягнення граничного стану.

Обмеженнями задачі є:

а) умова досягнення граничного стану

$$\int_0^{t_f} \varphi\left(t-\tau; I(\tau)\right) \cdot f\left(\dot{\varepsilon}_i(\tau)\right) \cdot d\tau = 1 \tag{2}$$

де $\varphi\left(t-\tau, I(\tau)\right)$ – ядро спадковості; f – деяка функція;

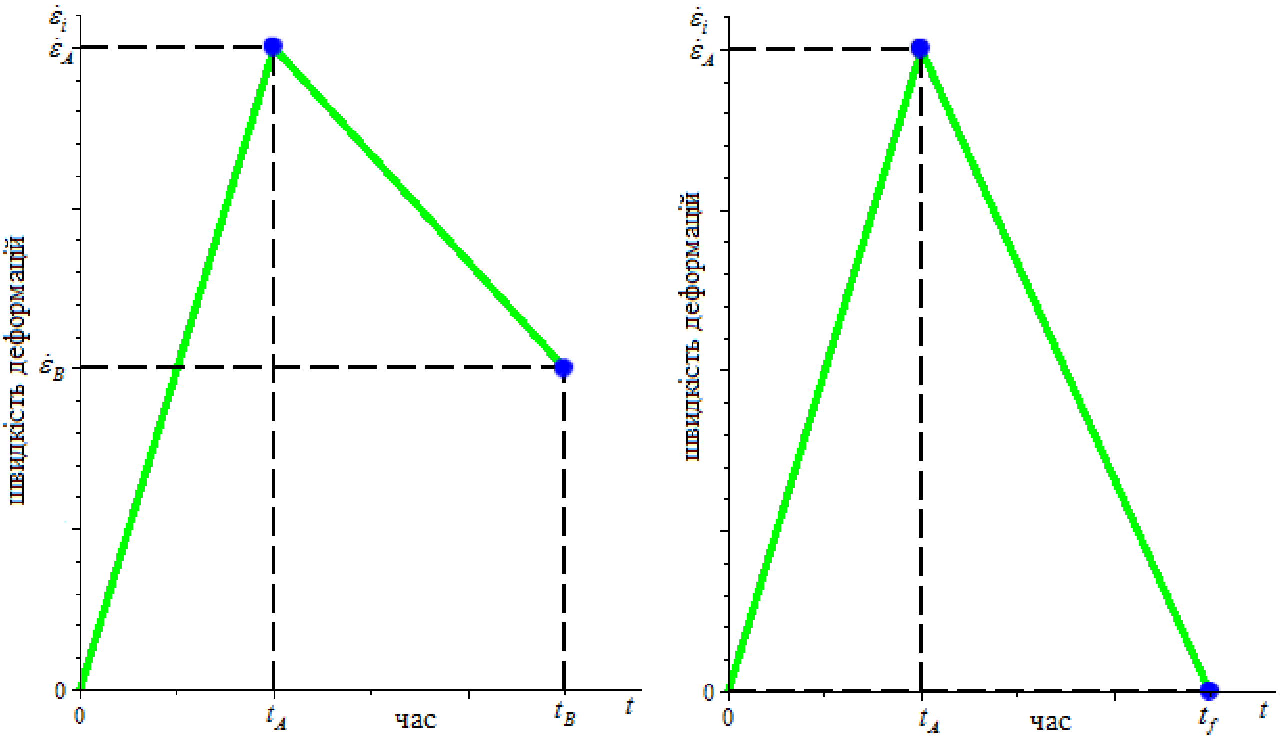
б) умова належності точок досліджуваних траєкторій області допустимих значень

$$\int_0^{t} \varphi\left(t-\tau; I(\tau)\right) \cdot f\left(\dot{\varepsilon}_i(\tau)\right) \cdot d\tau \le 1,\ \forall t \in \left(0, t_f\right). \tag{3}$$

Розглянемо деформування за схемою лінійної дволанкової ламаної, що зображена на рис. 1 а). Відповідно до цього закону матимемо

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_A \cdot \dfrac{t}{t_A}, & 0 \le t \le t_A, \\ \dfrac{\dot{\varepsilon}_B - \dot{\varepsilon}_A}{t_B - t_A} \cdot (t - t_A) + \dot{\varepsilon}_A, & t_A < t \le t_B = t_f \end{cases}, \tag{4}$$

де $\dot{\varepsilon}_A = \dot{\varepsilon}_i(t = t_A), \dot{\varepsilon}_B = \dot{\varepsilon}_i(t = t_B)$.



а) б)

Рис. 1. Закон зміни швидкості деформацій в залежності від часу деформування

В цьому випадку цільова функція дорівнюватиме

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{2} \cdot \left[\dot{\varepsilon}_A \cdot t_B + \dot{\varepsilon}_B \cdot (t_B - t_A)\right] \to \max \tag{5}$$

Надалі використовуватимемо степеневе представлення ядра спадковості, відповідно до якого з лінійного варіанта моделі випливає степенева залежність кривої граничних деформацій від часу

$$\bar{\varepsilon}_{fs} = g \cdot \left(\dot{\varepsilon}_i\right)^{1-\frac{1}{n}}, \tag{6}$$

де $\bar{\varepsilon}_{fs}$ – величина граничної накопиченої пластичної деформації, що відповідає деформуванню із незмінною швидкістю деформації; g, n – матеріальні константи $(g > 0, 0 < n \le 1)$.

Тоді, відповідно до обмеження (3), отримаємо

$$\psi(t) = \frac{\dot{\varepsilon}_A}{g^n \cdot (n+1) \cdot t_A} \cdot t^{n+1} \le 1, \quad 0 \le t \le t_A, \tag{7}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{g^n \cdot (n+1) \cdot t_A} \cdot \left[(t - t_A)^n \cdot (\dot{\varepsilon}_B \cdot t_A - \dot{\varepsilon}_A \cdot t) + \dot{\varepsilon}_A \cdot t^{n+1} \right] \le 1, \quad t_A < t < t_B, \tag{8}$$

а відповідно до (2):

$$(t_B - t_A)^n \cdot (\dot{\varepsilon}_B \cdot t_A - \dot{\varepsilon}_A \cdot t_B) + \dot{\varepsilon}_A \cdot t_B^{n+1} = g^n \cdot (n+1) \cdot t_A, \tag{9}$$

Очевидно, що при $n > -1$ функція $\psi(t)$ в (7) строго монотонно зростає на відрізку $t \in [0, t_A]$. Тоді обмеження (7) набуває вигляду

$$\dot{\varepsilon}_A \cdot t_A^n \le g^n \cdot (n+1). \tag{10}$$

Отже ми отримали задачу нелінійного програмування в якій цільова функція (5) та обмеження (8), (9), (10) є нелінійними функціями невідомих параметрів $t_A, \dot{\varepsilon}_A, \dot{\varepsilon}_B$.

Дещо спростимо задачу, поклавши $\dot{\varepsilon}_B = 0$ – відповідний закон зміни швидкості деформацій зображено на рис. 1 б). У цьому випадку на основі (4) отримаємо

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_A \cdot \dfrac{t}{t_A}, & 0 \le t \le t_A, \\ \dfrac{\dot{\varepsilon}_A}{t_A - t_f} \cdot (t - t_A) + \dot{\varepsilon}_A, & t_A < t < t_f \end{cases} \tag{11}$$

цільова функція та обмеження набувають вигляду

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{2} \cdot \dot{\varepsilon}_A \cdot t_f \to \max \tag{12}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{g^n \cdot (n+1) \cdot t_A} \cdot \left[\dot{\varepsilon}_A \cdot t^{n+1} - (t - t_A)^n \cdot \dot{\varepsilon}_A \cdot t \right] \le 1, \quad t_A < t \le t_f, \tag{13}$$

$$\dot{\varepsilon}_A \cdot \left(t_f^{n+1} - (t_f - t_A)^n \cdot t_f \right) = g^n \cdot (n+1) \cdot t_A, \tag{14}$$

$$\dot{\varepsilon}_A \le \frac{g^n \cdot (n+1)}{t_A^n}. \tag{15}$$

Сформульована задача нелінійного програмування містить дві невідомі змінні $t_A, \dot{\varepsilon}_A$, лінійну цільову функцію (12) та нелінійні обмеження (13) – (15). Наявність обмеження (13) вносить певну специфіку дослідження задачі оптимізації.

В двох граничних випадках $t_A \to +0$ та $t_A \to t_f$ траєкторія класу лінійного дволанкового деформування, що зображена на рис. 1 б), вироджується в лінійні одноланкові траєкторії зі спаданням та зростанням швидкості деформації, що зображені на рис. 2.

Сформулюємо та доведемо теорему.

Теорема. Відповідно моделі (14) для всіх лінійних дволанкових траєкторій (4) швидкість деформації при $t = t_A$ набуває найбільшого значення при $t_A \to +0$ та найменшого значення при $t_A \to t_f$ і є монотонно спадною функцією на інтервалі $t_A \in (0; t_f)$.

Для доведення теореми спочатку розглянемо окремо кожний із двох граничних випадків.

На основі (14) отримаємо

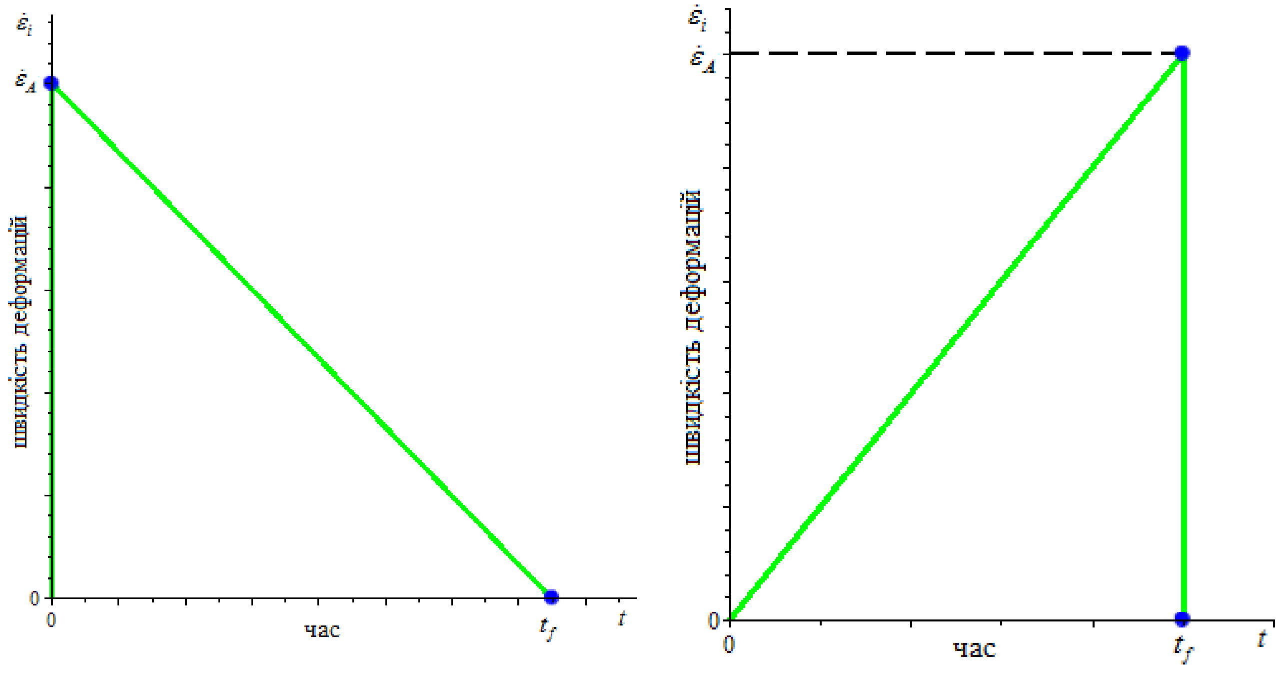
$$\lim_{t_A \to +0} \dot{\varepsilon}_A = \frac{g^n \cdot (n+1)}{t_f} \cdot \lim_{t_A \to +0} \frac{t_A}{t_f^{n+1} - (t_f - t_A)^n}. \tag{16}$$

Знайдемо границю із застосуванням правила Лопіталя

$$\lim_{t_A \to +0} \dot{\varepsilon}_A = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{g}{t_f} \right)^n . \tag{17}$$

З урахуванням останньої рівності одноланкова траєкторія з лінійним спаданням швидкості деформації описується таким співвідношенням

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \dot{\varepsilon}_A \cdot \left(1 - \frac{t}{t_f} \right) = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{g}{t_f} \right)^n \cdot \left(1 - \frac{t}{t_f} \right). \tag{18}$$



а) б)

Рис. 2. Закони зміни швидкості деформацій відповідно до граничних випадків одноланкових лінійних траєкторій

В якості перевірки правильності отриманих результатів доведемо рівність, що відображує умову збігу моментів досягнення граничного стану та нульового значення швидкості деформації

$$\frac{n+1}{t_f^n} \cdot \int_0^{t_f} \left(t_f - \tau \right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{t_f} \right) \cdot d\tau = 1. \tag{19}$$

Застосуємо метод інтегрування частинами

$$\int_0^{t_f} \left(t_f - \tau \right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{t_f} \right) \cdot d\tau = -\frac{1}{n} \cdot \left(t_f - \tau \right)^n \cdot \left(1 - \frac{\tau}{t_f} \right) \Bigg|_0^{t_f} - \frac{1}{n \cdot t_f} \cdot \int_0^{t_f} \left(t_f - \tau \right)^n \cdot d\tau = \frac{t_f^n}{n+1}. \tag{20}$$

З урахуванням останньої рівності співвідношення (19) обертається на тотожність.

Аналогічно, на основі (14) отримаємо

$$\dot{\varepsilon}_A \left(t_A = t_f \right) = (n+1) \cdot \left(\frac{g}{t_f} \right)^n . \tag{21}$$

У цьому випадку матимемо одноланкову траєкторію з лінійним зростанням швидкості деформації, що описується співвідношенням

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \dot{\varepsilon}_A \cdot \frac{t}{t_f} = (n+1) \cdot \left(\frac{g}{t_f} \right)^n \cdot \frac{t}{t_f} . \tag{22}$$

Із порівняння (17) та (21) випливає

$$\lim_{t_A \to +0} \dot{\varepsilon}_A = \frac{\dot{\varepsilon}_A\left(t_A = t_f\right)}{n}, \tag{23}$$

звідки отримаємо

$$\lim_{t_A \to +0} \dot{\varepsilon}_A > \dot{\varepsilon}_A\left(t_A = t_f\right) \text{ при } 0 < n < 1. \tag{24}$$

Розглянуті граничні значення швидкості деформацій є найбільшим та найменшим значеннями за умови монотонності функції $\dot{\varepsilon}_A\left(t_A\right)$ на інтервалі $t_A \in \left(0; t_f\right)$. Для доведення цієї властивості достатньо показати, що похідна $\frac{d\left(\dot{\varepsilon}_A\left(t_A\right)\right)}{dt_A} < 0, \quad \forall t_A \in \left(0; t_f\right)$.

На основі (14) запишемо

$$\dot{\varepsilon}_A = \left(n+1\right) \cdot \left(\frac{g}{t_f}\right)^n \cdot \frac{\theta}{1-\left(1-\theta\right)^n}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{25}$$

де $\theta = \frac{t_A}{t_f}$.

Очевидно, що знаки похідних $\frac{d\left(\dot{\varepsilon}_A\left(t_A\right)\right)}{dt_A}$ і $\frac{d\left(\dot{\varepsilon}_A\left(\theta\right)\right)}{d\theta}$ збігаються для одних і тих самих точок. Оскільки

$$\left(n+1\right) \cdot \left(\frac{g}{t_f}\right)^n > 0, \tag{26}$$

достатньо довести

$$\left(\frac{\theta}{1-\left(1-\theta\right)^n}\right)'_\theta < 0, \quad 0 < \theta < 1, \tag{27}$$

Знайдемо похідну

$$\left(\frac{\theta}{1-\left(1-\theta\right)^n}\right)'_\theta = \frac{1-\left(1-\theta\right)^n - \theta \cdot n \cdot \left(1-\theta\right)^{n-1}}{\left(1-\left(1-\theta\right)^n\right)^2} < 0, \quad 0 < \theta < 1. \tag{28}$$

Оскільки знаменник у виразі для похідної є додатним числом достатньо дослідити чисельник відповідного дробу, тобто необхідно довести, що

$$1-\left(1-\theta\right)^n - \theta \cdot n \cdot \left(1-\theta\right)^{n-1} < 0, \quad 0 < \theta < 1, \tag{29}$$

або

$$\left(1-\theta\right)^n + \theta \cdot n \cdot \left(1-\theta\right)^{n-1} > 1, \quad 0 < \theta < 1. \tag{30}$$

Застосуємо розвинення функції в ряд Тейлора

$$\left(1-\theta\right)^n = 1 - n \cdot \theta + \frac{n \cdot \left(n-1\right)}{2!} \cdot \theta^2 - \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right)}{3!} \cdot \theta^3 + \ldots, \tag{31}$$

$$n \cdot \theta \cdot \left(1-\theta\right)^{n-1} = n \cdot \theta \cdot - n \cdot \left(n-1\right) \cdot \theta^2 + \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right)}{2!} \cdot \theta^3 - \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right) \cdot \left(n-3\right)}{3!} \cdot \theta^4 + \ldots. \tag{32}$$

Перепишемо нерівність (30) з урахуванням (31), (32)

$$\begin{gathered}\left(1-\theta\right)^n + \theta \cdot n \cdot \left(1-\theta\right)^{n-1} = 1 + \left(\frac{n \cdot \left(n-1\right)}{2!} - n \cdot \left(n-1\right)\right) \cdot \theta^2 - \\ -\left(\frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right)}{3!} + \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right)}{2!}\right) \cdot \theta^3 + \ldots > 1, \quad 0 < \theta < 1.\end{gathered} \tag{33}$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$\left(1-\theta\right)^{n}+\theta\cdot n\cdot\left(1-\theta\right)^{n-1}=1+\frac{1}{2}\cdot n\cdot\left(1-n\right)\cdot\theta^{2}+\frac{1}{3}\cdot n\cdot\left(1-n\right)\cdot\left(2-n\right)\cdot\theta^{3}+ \\ +\frac{1}{8}\cdot n\cdot\left(1-n\right)\cdot\left(2-n\right)\cdot\left(3-n\right)\cdot\theta^{4}+\ldots>1,\quad 0<\theta<1 \qquad (34)$$

Перенесемо одиницю з лівої частини нерівності в праву та скоротимо обидві частини на $\frac{1}{2}\cdot n\cdot\left(1-n\right)\cdot\theta^{2}$, отримаємо

$$1+\frac{2}{3}\cdot\left(2-n\right)\cdot\theta^{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(2-n\right)\cdot\left(3-n\right)\cdot\theta^{2}+\ldots>0,\quad 0<\theta<1. \qquad (35)$$

Всі доданки в лівій частині нерівності додатні, отже, отримано очевидну нерівність і тим самим доведено теорему.

Застосуємо теорему для аналізу величини граничної накопиченої деформації. Знайдемо вирази для цільової функції. Відповідно до (1), (18)

$$\bar{\varepsilon}_{f}=\frac{n+1}{2\cdot n}\cdot\frac{g^{n}}{t_{f}^{n-1}}, \qquad (36)$$

відповідно до (1), (22)

$$\bar{\varepsilon}_{f}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{g^{n}}{t_{f}^{n-1}}, \qquad (37)$$

відповідно до (1), (11), (25)

$$\bar{\varepsilon}_{f}=\frac{\theta\cdot\left(n+1\right)\cdot t_{f}}{2\cdot\left(1-\left(1-\theta\right)^{n}\right)}\cdot\left(\frac{g}{t_{f}}\right)^{n}. \qquad (38)$$

В результаті порівняння співвідношень (36)–(38) з відповідними співвідношеннями (17), (21) та (25) отримаємо

$$\bar{\varepsilon}_{f}=\frac{1}{2}\cdot t_{f}\cdot\dot{\varepsilon}_{A}. \qquad (39)$$

Базуючись на отриманому співвідношенні та доведеній теоремі можемо зробити висновок, що відповідно моделі (14) для всіх лінійних дволанкових траєкторій (4) гранична накопичена деформація набуває найбільшого значення при $t_{A}\to+0$ та найменшого значення при $t_{A}\to t_{f}$ і є монотонно спадною функцією на інтервалі $t_{A}\in\left(0;t_{f}\right)$.

Висновки

1. Показано, що задача знаходження найменшого та найбільшого значень граничної накопиченої деформації для окремого класу лінійного дволанкового деформування зводиться до задачі нелінійного програмування з трьома невідомими.
2. Для окремого класу лінійного дволанкового деформування, що характеризується одночасним досягненням граничного стану матеріалу та нульового значення швидкості деформацій, отримано аналітичний розв’язок задачі нелінійного програмування з двома невідомими.
3. Підхід, що включає постановку, аналіз та отримання аналітичного розв’язку задачі нелінійного програмування, разом із формулюванням та доведенням теореми, а також враховуючи відсутність в літературі з теорії підсумовування пошкоджень подібних постановок задач, можна розглядати як перший крок до розробки основ теорії граничного стану для класу лінійних дволанкових траєкторій зміни швидкості деформацій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] В. М. Михалевич, «Математичні моделі граничних деформацій в залежності від виду напруженого стану,» на *IX Міжнар. наук.-техн. конф. Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової освіти* (29.05-02.06.2018р.) / Київ – Херсон, 2018. – 98-101.

[2] В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк і О. В. Краєвський, «Порівняльне дослідження моделей граничних пластичних

деформацій,» *Вісник машинобудування та транспорту*, № 2(8), с. 56-64. 2018.

[3] K. Takekoshi, K. Niwa, «A Study on Preparation of Failure Parameters for Ductile Polymers,» in *13th International LS-DYNA Users Conference*, 2013 [Online]. Available: https://doi.org/10.1299/jsmecmd.2013.26._603-1_.

[4] V. M.Mikhalevich and V. O. Kraevskiy «Variational problems for damage accumulation models heritable type,» in *International scientific conference The nonlinear analysis and application*, Kyiv, 2009, pp. 109-110.

[5] В. М. Михалевич і В. О. Краевский, «Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости,» *Вісник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія машинобудування*, с. 142-145. 2010.

[6] В. А. Краєвський і В. М. Михалевич, «Вариационные задачи в теории деформируемости,» у *Надійність і довговічність машин і споруд.* Київ, Україна: ІПМіцн. ім. Г.С.Писаренка НАНУ, 2013, вип. 37, с. 90-97.

[7] В. О. Краєвський і В. М. Михалевич, «Оптимізація швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування при однаковій тривалості ступенів,» *Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки,* № 1-2, с. 46–52. 2015.

[8] V. Kraievskyi, V.Mykhalevych, Y. Dobranyuk, D. Sawicki and K. Mussabekov, "Selection of optimal path of strain rate change in the process of multistage hot deformation under the condition of the equal duration of stages," in *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, (2018) 108084T (1 October 2018); doi: 10.1117/12.2501490.

[9] В. О. Краєвський і В. М. Михалевич, «Взаємозв'язок теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 5, с. 152-158. 2016.

[10] V. Kraievskyi, V.Mykhalevych, D. Sawicki and O. Ostapenko, «Modeling of the materials superplasticity based on damage summation theory ,» *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments,* (2018) 108084S (1 October 2018); doi: 10.1117/12.2501489.

Михалевич Володимир Маркусович – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, e-mail: vmykhal@gmail.com.

Краєвський Володимир Олександрович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, e-mail: kraila@ukr.net.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

V. Mykhalevych
V. Kraievskyi

The formulation and solution of the problem determining the least and largest values of the main characteristics of the particular class of two-link deformation

Vinnytsya National Technical University

The problem of determining the ultimate accumulated strain to fracture of a material for a particular class of the strain rate change according to the linear two-link trajectory is considered. All trajectories meet the following requirements: at the initial moment the strain rate is zero, reaches its maximum value at the break point and decreases during the second part of the trajectory until the material reaches its limit state. It is shown that for these trajectories the problem of determining the ultimate accumulated strain is reduced to a nonlinear programming problem with the target function and constraints that are nonlinear functions of three unknown parameters: the coordinates of the break point and the strain rate at the limit state. The case that is characterized by the simultaneous achievement of the limiting state of the material and zero strain rate is investigated in detail. It is shown that in two limited cases when the trajectory break tends to zero or to the time of fracture, the two-link trajectory degenerates into the single-link left and right limit trajectories. During defining for an analytical solution of the formulated nonlinear programming problem the theorem about the smallest and the largest values of the strain rate was formulated and proved. According to this theorem the maximum strain rate occurs for the left limit path and monotonously decreases with a gradual transition to the right limit path. The theorem is proved using elements of mathematical analysis and theory of functional series. Obtaining an analytical expression for the accumulated deformation together with the application of this theorem gave the possibility to find patterns of the ultimate accumulated strain variation depending from the moment of reaching the break point. It is shown that the patterns of the ultimate accumulated strain variation, which are determined on the basis of the entire two-link trajectory, are similar to the patterns of change in the strain rate at the break point. It is emphasized that similar problem formulation and the obtained results is absent in publications related to the theory of summing damage.

Key words: accumulated strain, strain rate, summing damage, variational problem, nonlinear programming.

Mykhalevych Volodymyr – Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Higher Mathematics, e-mail: vmykhal@gmail.com.

Kraievskyi Volodymyr – Ph. D. (Eng), assistant professor of Department of Higher Mathematics, e-mail: kraila@ukr.net.

В. М. Михалевич
В. А. Краевский

Постановка и решение задачи нахождения наименьшего и наибольшего значений основных характеристик частного класса двухзвенного деформирования

Винницкий национальный технический университет

Рассмотрена задача определения предельной накопленной деформации до разрушения материала для частного класса изменения скорости деформаций в соответствии с линейной двухзвенной траекторией. Все траектории соответствуют следующим требованиям: в начальный момент скорость деформации равна нулю, достигает максимального значения в точке излома и уменьшается в течение второго участка траектории вплоть до достижения предельного состояния материала. Показано, что для этих траекторий задача определения предельной накопленной деформации сводится к задаче нелинейного программирования, в которой целевая функция и ограничения являются нелинейными функциями трех неизвестных параметров: координат точки излома и скорости деформации в момент достижения предельного состояния. Подробно исследован случай, характеризующийся одновременным достижением предельного состояния материала и нулевого значения скорости деформаций. Показано, что в двух предельных вариантах стремления момента излома траектории к нулю или ко времени разрушения, двухзвенная траектория вырождается в соответствующие однозвенную левую и правую предельные траектории. Во время исследования и поиска аналитического решения сформулированной задачи нелинейного программирования сформулирована и доказана теорема о наименьшем и наибольшем значении скорости деформаций, согласно которой максимальная скорость деформаций имеет место для левой предельной траектории и монотонно уменьшается с постепенным переходом к правой предельной траектории. Теорема доказана с использованием элементов математического анализа и теории функциональных рядов. Получение для накопленной деформации аналитического выражения в замкнутом виде вместе с применением этой теоремы позволило найти закономерности изменения предельной накопленной деформации в зависимости от момента достижения точки излома. Показано, что закономерности изменения предельной накопленной деформации, которые определяются на основе всей двухзвенной траектории, аналогичны закономерностям изменения скорости деформаций в точке излома. Обращено внимание на отсутствие в литературе по теории суммирования повреждений подобных постановок задач и полученных результатов.

Ключевые слова: накопленная деформация, скорость деформации, суммирование повреждений, *вариационная задача, нелинейное программирование.*

.

Михалевич Владимир Маркусович – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: vmykhal@gmail.com.

Краевский Владимир Александрович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: kraila@ukr.net.