УДК 519.63

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Меладзе Гамлет[1], Давиташвили Тинатин[2]

[1]Грузинский технический университет, Институт вычислительной математики имени Н.И.Мусхелишвили
[2]Тбилисский государственный университет им. И.Джавахишвили

Аннотация

В предложенной работе исследуются нелокальные контактные залачи для уравнений теплопроводности с постоянными, а также с переменными коэффициентами. Для решения задачи в случае постоянных коэффициентов используется метод разделения переменных (метод Фурье). Доказывается существование и единственность регулярного решения этих задач. В случае переменных коэффициентов строится итерационная процедура, посредством которой решение начальной задачи сводится к решению последовательности классических начально-краевых задач.

Abstract

In the present paper the nonlocal contact problems for heat equation with constant, as well as variable coefficients are investigated. A method of separation of variables (Fourier method) is implemented for solving the problem in case of constant coefficients. Existence and uniqueness of regular solution is proved. In case of variable coefficients the iterative procedure is constructed, by means of which the solution of an initial problem is reduced to the solution of the sequence of classical initial-boundary problems.

Нелокальные краевые и начально-краевые задачи представляют весьма интересные обобщения классических задач математической физики и, в то же время, они естественным образом получаются при построении математических моделей реальных процессов и явлений в физике, в инженерии, в социологии, в экологии и.т.д.

История исследования нелокальных задач начинается в первой половине прошлого века и сейчас эти исследования быстро развиваются благодаря своей большой практической и теоретической ценности [1-5].

1. Рассмотрим нелокальную контактную задачу для одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами.

Найти функцию

$$u(x,t)=\begin{cases} u^-(x,t), & 0\le x\le c, \quad t\ge 0 \\ u^+(x,t), & c\le x\le l, \quad t\ge 0 \end{cases} \quad 0<c<l,$$

которая удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u^-}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2}+f^-(x,t), \quad 0<x<c, \quad t>0,$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial t}=a_2^2\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2}+f^+(x,t), \quad c<x\le l, \quad t>0,$$

начальным и граничным условиям

$$u^-(x,0)=0, \quad 0\le x\le c, \; u^+(x,0)=0, \quad c<x\le l,$$

$$u^-(0,t)=0, \; u^+(l,t)=0, \quad t\ge 0,$$

и нелокальному контактному условию

$$u^-(c,t)=u^+(c,t)=u(c,t)=\alpha_1 u^-\left(c^-,t\right)=\alpha_2 u^+\left(c^+,t\right)+\mu(t),$$

где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$, $0 < c^- < c < c^+ < l$.

Используя метод Фурье, решение этой задачи можно записать в следующем виде

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{c} - \dfrac{2\ln 2}{\pi}\right) u(c,t) + \int_0^t \int_0^c G^-(x,\xi,t-\tau) f^-(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^t k^-(t-\tau) u(c,\tau) d\tau, \\ \quad 0 \le x \le c, \quad t \ge 0 \\ \left(\dfrac{l-x}{l-c} - \dfrac{2\ln 2}{\pi}\right) u(c,t) + \int_0^t \int_0^c G^-(x,\xi,t-\tau) f^+(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^t k^+(t-\tau) u(c,\tau) d\tau, \\ \quad c \le x \le l, \quad t \ge 0 \end{cases}$$

где функция $u(c,t)$ является решением уравнения

$$u(c,\tau) - \lambda^{-1} \int_0^t k(t-\tau) u(c,\tau) d\tau = \lambda^{-1} \Phi(t),$$

а $\lambda = 1 - \dfrac{\alpha_1 c^-}{c} - \dfrac{\alpha_2 (l - c^+)}{l-c} + \dfrac{4\ln 2}{\pi}$, $\quad k(t-\tau) = \alpha_1 k^-(t-\tau) + \alpha_2 k^+(t-\tau)$,

$$G^-(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 a_1^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{c} x \sin\frac{\pi n}{c} \xi$$

$$G^+(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l-c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 a_1^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l-c}(l-\xi) \sin\frac{\pi n}{l-c}(l-x)$$

$$k^-(t-\tau) = \frac{2\pi_1^2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2 a_1^2 (t-\tau)},$$

$$k^+(t-\tau) = \frac{2\pi a_2^2}{(l-c)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-\left(\frac{\pi n}{l-c}\right)^2 a_2^2 (t-\tau)},$$

$$\Phi(t) = \alpha_1 \int_0^t \int_0^c G^-(c,\xi,t-\tau) f^-(x,\xi) d\xi d\tau + \alpha_2 \int_0^t \int_0^c G^+\left(c^+,\xi,t-\tau\right) f^+(\xi,t) d\xi d\tau + \mu(t)$$

Итак, если функции $f^-(x,t)$, $f^+(x,t)$ достаточно гладкие функции, существует единственное регулярное решение поставленной задачи. Заметим, что применимая методика очевидным образом распространяется на случае более общих задач.

2. Сейчас рассмотрим следующую задачу: найти функции

$$u^-(x,t) \in C^{2,1}(0 < x < c,\ 0 < t \le T) \cap C^{1,0}(0 \le x \le c,\ 0 \le t \le T),$$

$$u^+(x,t) \in C^{2,1}(c < x < l,\ 0 < t \le T) \cap C^{1,0}(c \le x \le l,\ 0 \le t \le T),$$

которые удовлетворяют уравнения

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k^-(x,t)\frac{\partial u^-}{\partial x}\right) - q^-(x,t) u^-(x,t) = f^-(x,t),\ 0 < x < c,\ 0 < t \le T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k^+(x,t)\frac{\partial u^+}{\partial x}\right) - q^+(x,t) u^+(x,t) = f^+(x,t),\ c < x < l,\ 0 < t \le T, \quad (2)$$

где $k^-(x,t)$, $k^+(x,t)$, $q^-(x,t)$, $q^+(x,t)$, $f^-(x,t)$, $f^+(x,t)$ - заданные достаточно гладкие действительные функции x,t, $0 < \sigma_1^- \le k^-(x,t) \le \sigma_2^-$, $0 \le x \le c$, $0 \le t \le T$, $0 < \sigma_1^+ \le k^+(x,t) < \sigma_2^+$, $c \le x \le l$, $0 \le t \le T$, и $q^-(x,t) \ge 0$, $q^+(x,t) \ge 0$.

Функции $u^-(x,t)$, $u^+(x,t)$ удовлетворяют начальным и граничным условиям

$$u^-(x,0)=u_0^-(x),\ -l\le x\le 0,\ u^+(x,0)=u_0^+(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{3}$$

$$u^-(-l,t)=\varphi^-(t),\ u^+(l,t)=\varphi^+(t),\ \ 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $u_0^-(x)$, $u_0^+(x,t)$, $\varphi^-(t)$, $\varphi^+(t)$ - заданные действительные функции, $\varphi^-(0)=u_0^-(0)$, $\varphi^+(l)=u_0^+(l)$.

Функции $u^-(x,t)$, $u^+(x,t)$ также удовлетворяют нелокальному контактному условию

$$u^-(c,t)=u^+(c,t)=u(c,t)=\alpha_1 u^-\left(c^-,t\right)=\alpha_2 u^+\left(c^+,t\right)+\mu(t),\ \ 0\le t\le T. \tag{5}$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Если $f^-(x,t)$, $f^+(x,t)$, $k^-(x,t)$, $k^+(x,t)$, $q^-(x,t)$, $q^+(x,t)$ - достаточно гладкие функции, то задача (1)-(5) имеет единственное регулярное решение.

Теорема доказывается при помощи специального итерационного процесса, который сводит решение начальной задачи к решению последовательности классических начально-краевых задач.

Результаты численных расчетов конкретной нелокальной контактной задачи согласуются с теоретическими выводами.

Список использованных источников

1. Canon J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy / Quart. Appl. Math. – 1963 – №21 – pp.155-160.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных элиптических задач / Докл. АН СССР – 1969 – т.185, №2 – стр.739-740.
3. Гордезиани Д.Г. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач / Изд. Тбил. гос. университета, Тбилиси. – 1981.
4. Makarov, V.L., Kulyev, D.T. Straight-line method for a quasilinear equation of parabolic type with nonclassical boundary condition / Ukr Math J - 37, 35–41 (1985).
5. I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk. Exponentially Convergent Method for the m-Point Nonlocal Problem for a First Order Differential Equation in Banach Space / Numerical Functional Analysis and Optimization - Vol. 31 (1) – 2010.