УДК 519.872

# АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ СЕРВЕРАМИ И ОЧЕРЕДЯМИ

*Эсьмира Мехбалыева*

Сумгаитский Государственный Университет, Азербайджан

**Аннотация.** *Изучается математическая модель системы обслуживания с гетерогенными серверами и бесконечной очередью заявок одного типа. Назначения заявок к серверам осуществляется согласно рандомизированной схеме доступа. Разработан алгоритм расчета характеристик системы, основанный на методе производящих функций.*

**Abstract.** *A mathematical model of system with heterogeneous servers and an infinite queue of single type of calls is investigated. Servers are assigned in accordance to randomized scheme. An algorithm based on probability generating function is developed to performance analysis of the investigated system.*

**Введение.** Классическая теория систем массового обслуживания (СМО) базируются на ряде предположений, одним из которых является допущение о том, что серверы являются гомогенными, т.е. все серверы имеют одинаковые скорости обработки заявок, стоимости эксплуатации и степени надежности. Эти допущения являются оправданными для СМО, в которых обслуживания осуществляются с помощью машин (например, компьютерные и коммуникационные системы). Отметим, что даже в таких системах в ходе их обновления и расширения приходится использовать серверы с различными техническими и экономическими показателями (гетерогенные серверы, Heterogeneous Servers, HS). Более того СМО, где в процессе обслуживания заявок участвуют люди, как правило, адекватно могут описываться лишь с помощью моделей с гетерогенными серверами.

Кажется, что первая серьезная статья, посвященная к изучению моделей СМО с гетерогенными серверами является работа [1]. В дальнейшем подобные модели были изучены в многочисленных работах. Достаточно полный обзор доступных публикаций в данном направление можно найти в работах [2, 3].

В настоящей статье изучается модель СМО с гетерогенными серверами и бесконечной очередью заявок одного типа. Предложен алгоритм расчета ее характеристик с помощью метода производящих функций.

**Описание модели и постановка задачи.** Рассматриваемая система содержит два сервера: быстрый (*F*-сервер) и медленный сервер (*S*-сервер). В эту систему поступают пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Времена обслуживания заявок в этих серверах имеют показательные распределения со средними значениями $\mu_F^{-1}$ и $\mu_S^{-1}$ для *F*-сервера и *S*-сервера соответственно, при этом $\mu_F > \mu_S$. В системе принята схема рандомизированного выбора сервера (Random Chosen Server, RCS), согласно которой обслуживание заявок осуществляется следующим образом.

- Если в момент поступления заявки оба сервера свободны, то согласно схеме Бернули она с вероятностью $\alpha, 0 < \alpha < 1,$ направляется к *F*-серверу, а с дополнительной вероятностью $1-\alpha$ для обслуживания выбирается *S*-сервер.
- Если в момент поступления заявки лишь один сервер является свободным, то заявка занимает этот сервер независимо от его типа.
- Если оба сервера являются занятыми, то поступившая заявка присеодиняется к очереди бесконечной длины.

Задача состоит в нахождении средней длины очереди и среднее время ожидания в очереди.

**Математическая модель и метод решения задачи.** Состояния системы в произвольный момент времени определяются следующим образом: $(0,0)$ – оба серверы свободны; $(1,0)$ – $F$-сервер занят и $S$-сервер свободен; $(0,1)$ – $F$-сервер свободен и $S$-сервер занят; $n$ – оба серверы заняты и в очереди имеются $n-2$ заявок, $n \geq 2$. Иными словами, пространство состояний (ПС) модели определяются следеующим образом:

$$S = \{(0,0),(1,0),(0,1)\} \bigcup \{n : n \geq 2\}. \tag{1}$$

Поскольку входящие потоки являются простейшими и времена обслуживания разнотипных заявок имеют показательные распределения, то математическая модель изучаемой системы обслуживания представляет собой цепь Маркова (ЦМ) с ПС (1). Очевидно, что условием существования стационарного режима является $\lambda < \mu$, где $\mu := \mu_F + \mu_S$.

Положительные элементы производящей матрицы полученной ЦМ обозначим через $q(x, y), x, y \in S$. Исходя из описанной RCS-схемы доступа в каналы и дисциплины обслуживания заявок из очереди, заключаем, что эти величины определяются так:

$q((0,0),(1,0)) = \lambda\alpha$; $q((0,0),(0,1)) = \lambda(1-\alpha)$; $q((1,0),(0,0)) = \mu_F$; $q((0,1),(0,0)) = \mu_S$;

$q((1,0),2) = \lambda$; $q((0,1),2) = \lambda$; $q(2,(1,0)) = \mu_S$;

$$q(2,(0,1)) = \mu_F;\ q(n, n+1) = \lambda, n \geq 2;\ q(n, n-1) = \mu, n > 2. \tag{2}$$

Стационарную вероятность состояния $x \in S$ обозначим через $p(x)$. Эти величины находятся из системы уравнений равновесия (СУР). С использованием соотношений (2) заключаем, что эта СУР имеет следующий вид:

$$\lambda p(0,0) = \mu_F p(1,0) + \mu_S p(0,1); \tag{3}$$

$$(\lambda + \mu_F)p(1,0) = \lambda\alpha p(0,0) + \mu_S p(2); \tag{4}$$

$$(\lambda + \mu_S)p(0,1) = \lambda(1-\alpha)p(0,0) + \mu_F p(2); \tag{5}$$

$$(\lambda + \mu)p(2) = \lambda(p(1,0) + p(0,1)) + \mu p(3); \tag{6}$$

$$(\lambda + \mu)p(n) = \lambda p(n-1) + \mu p(n+1),\ n \geq 3. \tag{7}$$

К ним добавляется еще и уравнение нормировки. Среднее число заявок в очереди вычисляются так:

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} np(n+2). \tag{8}$$

Из (8) с помощью формулы Литтла находится среднее время ожидания в очереди:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q. \tag{9}$$

Для нахождения характеристик (8) и (9) используем метод производящих функций. Поскольку очереди заявок появляются в состояниях типа $n, n \geq 3$, (в этих состояниях число заявок в очереди равно $n-2$), то производящую функцию случайной величины число заявок в очереди определим следующим образом:

$$P(z) = R_0 + \sum_{n=0}^{\infty} p(n+3) z^{n+1}, \tag{10}$$

где $R_0 = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(2)$.

Из (7) имеем:

$$(\lambda + \mu) \sum_{n=3}^{\infty} p(n) z^{n-2} = \lambda z \sum_{n=3}^{\infty} p(n-1) z^{n-3} + \frac{\mu}{z} \sum_{n=3}^{\infty} p(n+1) z^{n-1}.$$

Отсюда после определенных преобразований получим:

$$\left(-\lambda z^2 + (\lambda + \mu) z - \mu\right)\left(P(z) - R_0\right) = \lambda z(я - 1) p(2).$$

Следовательно,

$$P(z) = R_0 + \frac{\lambda z (z-1) p(2)}{-\lambda z^2 + (\lambda + \mu) z - \mu}, \tag{11}$$

где $R_0 + \dfrac{2\lambda p(2) - \mu p(3)}{\mu - \lambda} = 1$.

После решения системы уравнений (3)-(5), (11), которая представляет собой систему линейных уравнений размерности 4x4, определяется неизвестная величина $p(2)$ в формуле (11), и таким образом, определяется производящая функция $P(z)$ случайной величины число заявок в очереди.

Далее при выполнении условия эргодичности среднее число заявок в системе $(L)$ определяется так:

$$L = P'(1). \tag{12}$$

Ввиду очевидности получения и громоздкости явный вид формулы (12) здесь не приводится (лишь отметим, что для ее получения правило Лопиталя применяется 2 раза).

**Заключение.** В работе изучена марковская система обслуживания с гетерогенными серверами, заявками одного типа и бесконечной очередью. В системе принята рандомизированная схема заятия серверов, т.е. если в момент поступления заявки оба серверы свободны, то она согласно схеме Бернулли занимает один из них. Считается, что при наличии лишь одного свободного сервера поступившая заявка независимо от его типа (т.е. быстрый или медленный) занимает свободный сервер. Показано, что математической моделью исследуемой системы является некоторая цепь Маркова, и построена ее производящая матрица. Разработан алгоритм расчета характеристик этой системы, основанный на использовании метода производящих функций. Предложенный подход решения задачи может быть успешно применен и для изучения аналогичных моделей с другими схемами доступа в гетерогенные сервера.

## Список использованных источников

1. *Gumbel H.* Waiting Lines with Heterogeneous Servers // Operations Research. 1960. V. 8. Issue 4. P. 504-511.

2. *Melikov A.Z., Mekhbaliyeva E.V.* Analysis and optimization of system with heterogeneous servers and jump priorities // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2019. Vol. 58. Issue 5. P. 718-735.

3. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Mekhbaliyeva E.V.* Analysis of models of systems with heterogeneous servers // Cybernetics and System Analysis. 2020. V. 56. Issue 1. P. 89-99.