УДК 519.4

ОБ АЛГЕБРАХ МЕНГЕРА ФИКСИРОВАННОГО РАНГА

Мамедов Октай, Мехтиев Хиджран

Бакинский Государственный Университет

Аннотация

Для конечнопорожденной свободной алгебры Менгера ранга n показано существо-вание счетной цепи свободных подалгебр. Далее показано как гиперподстановки продол-жаются до эндоморфизмов этих алгебр. Гиперподстановки задают гипертождества; отсюда выводится относительная жесткость некоторых многообразий.

Abstract

The well-known connection between hyperidentities of an algebra and identities satisfied by the clone of this algebra is studied in a restricted setting, that of n-ary full hyperidentities and identities of the n-ary clone of term operations which are induced by full terms. Here we introduce a notion of (k)-full terms and we prove that the n-ary (k)-full terms form a Menger algebra of rank n. So, we obtain a counting chain of free algebras.

Рассматриваются алгебры, все операционные символы которых имеют одну и ту же арность n, т.е. алгебры n - арного типа. Пусть $\tau = (f_i \mid i \in I)$ есть такой n -арный тип. Через $W_\tau(X_n)$ обозначается множество всех n -арных термов типа τ («слов») над n -элементным множеством $X_n := \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ переменных. Множество $W_\tau(X_n)$ естественным образом наделяется структурой алгебры типа τ; а именно, если положить $\bar{f}_i : [W_\tau(X_n)]^n \to W_\tau(X_n)$, где

$$(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto \bar{f}_i(t_0, \dots, t_{n-1}) := f(t_0, \dots, t_{n-1}),$$

то $W_\tau(X_n)$ становится абсолютно свободной алгеброй типа τ («алгебра слов»), свободно порожденной множеством X_n: $\mathrm{F}_\tau(X_n) := (W_\tau(X_n), (\bar{f}_i \mid i \in I))$.

В работе [1] рассматривается некоторое подмножество в $W_\tau(X_n)$ так называемых *полных термов*, определяемых индуктивно. Пусть $H_n \subset n^n$ есть множество всех отображений $\{0,1, \dots, n-1\} = n \to n$ с непустым образом.

Определение [1] (a) Пусть $s \in H_n$ - произвольная функция и пусть f_i - опера-ционный символ типа τ. Тогда $f_i(x_{s(0)}, \dots, x_{s(n-1)})$ есть *полный терм* типа τ.

(b) Если $t_0, \dots, t_{n-1}$ - полные термы типа τ, то $f_i(t_0, \dots, t_{n-1})$ есть *полный терм* типа τ.

Пусть $W_\tau^F(X_n)$ есть множество всех n -арных полных термов типа τ; $W_\tau^F(X_n) \subset W_\tau(X_n)$. Это множество полных термов замкнуто относительно всех операций $\bar{f}_i$. Поэтому множество полных термов является подалгеброй абсолютно свободной алгебры $\mathrm{F}_\tau(X_n)$, порожденной n -элементным множеством. Помимо сигнатурных операций на абсолютно свободной алгебре (и ее подалгебрах) можно задать операцию суперпозиции; напомним определение суперпозиции для полных термов.

Определение [1] (a) $S^n(f_i(x_{s(0)}, \dots, x_{s(n-1)}), t_0, \dots, t_{n-1}) := f_i(t_{s(0)}, \dots, t_{s(n-1)})$,

(b) $S^n(f_i(r_0, \dots, r_{n-1}), t_0, \dots, t_{n-1}) := f_i(S^n(r_0, t_0, \dots, t_{n-1}), \dots, S^n(r_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1}))$.

Тогда получается алгебра $cl_F\tau := (W_\tau^F(X_n), S^n)$ с одной $(n+1)$-арной операцией, являющейся, как увидим ниже, *алгеброй Менгера ранга* n. В [1] индукцией доказано, что $cl_F\tau$ удовлетворяет тождеству суперассоциативности:

$$S^n(x_0, S^n(y_0, x_1, \dots, x_n), \dots, S^n(y_{n-1}, x_1, \dots, x_n)) = S^n(S^n(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}), x_1, \dots, x_n),$$

где x_i, y_j - переменные и S^n - $(n+1)$-арный операционный символ. Очевидно, что $cl_F\tau$ порождается множеством $Fund_\tau := \{f_i(x_{s(0)}, \dots, x_{s(n-1)}) \mid i \in I, s \in H_n\}$ так называемых *фундаментальных термов*.

Мы пользуемся определением алгебры Менгера, данным в широко известной работе Б.М.Шайна и В.С.Трохименко [2].

Определение [2] Алгебра $\mathrm{M} := (M, S^n)$ с одной $(n+1)$-арной операцией S^n называется *алгеброй Менгера ранга* n, если она удовлетворяет тождеству суперассоциативности.

Пусть V есть многообразие всех алгебр с одной $(n+1)$-арной операцией, удовлетворяющей тождеству суперассоциативности, т.е. многообразие всех алгебр Менгера ранга n. Обозначим свободную в V алгебру, свободно порождён-ную множеством $Y := \{y_j \mid j \in J\}$ через $\mathrm{F}_V(Y)$. Первым результатом [1] является

Теорема [1] Алгебра $cl_F\tau$ является свободной алгеброй в многообразии V алгебр Менгера ранга n, свободно порожденной множеством $Y := \{y_j \mid j \in J\}$, где $J = \{(i,s) \mid i \in I, s \in H_n\}$.

Следует отметить, что множество $W_\tau^F(X_n)$ получается посуществу из множества $W_\tau(X_n)$ выбрасыванием порождающего множества переменных X_n (“нулевого яруса”) и оставшееся множество $W_\tau^F(X_n)$ оказывается замкнутым относительно $(n+1)$-арной (менгеровской) операции S^n. Точно так же, если из алгебры $cl_F\tau$ выбросить порождающее множество $Fund_\tau$ фундаментальных термов (“первый ярус”), то оставшееся множество *(1)-полных термов* (обозначим его через $W_\tau^{(1)F}(X_n)$) вновь окажется замкнутым относительно типовых операций $\tau = (f_i \mid i \in I)$ и $(n+1)$-арной (менгеровской) операции суперпозиции S^n. Поэтому, аналогом предложения 1 из [1] служит следующее утверждение, для формули-ровки которого примем такое обозначение: $cl_F^{(1)}\tau = (W_\tau^{(1)F}(X_n), S^n)$; ясно, что $cl_F^{(1)}\tau$ является подалгеброй в $cl_F\tau$.

Предложение Алгебра $cl_F^{(1)}\tau$ удовлетворяет тождеству суперассоциативности.

Доказательство проводится индукцией по сложности термов. Этой же индукцией доказываем аналог вышеприведенной теоремы для следующего “яруса”.

Теорема Алгебра $cl_F^{(1)}\tau$ является свободной алгеброй, свободно порожденной неким конечным множеством, в многообразии V всех алгебр Менгера ранга n.

Можно продолжить этот процесс далее, каждый раз выбрасывая порождающее множество. Эти порождающие множества имеют увеличивающиеся на каждом этапе (“ярусе”) конечные мощности. В итоге получаем счетную убывающую цепь свободных в V подалгебр: $cl_F\tau \geq cl_F^{(1)}\tau \geq cl_F^{(2)}\tau \geq \cdots$.

Теперь предыдущую теорему можно распространить так.

Теорема Для каждого целого $k \geq 0$ алгебра $cl_F^{(k)}\tau = (W_\tau^{(k)F}(X_n), S^n)$ (*(k)-полных термов*) является свободной алгеброй, свободно порожденной в многообразии V некоторым конечным множеством.

Модифицируя понятие гиперподстановки, К.Денеке и П.Жампачон ввели понятие полной гиперподстановки. Обобщением последнего является следующее

Определение *(1)-полной гиперподстановкой σ типа τ* назовем любое отобра-жение $\sigma: \{f_i \mid i \in I\} \to W_\tau^{(1)F}(X_n)$.

Ясно, что σ можно продолжить до отображения $\check{\sigma}: W_\tau^{(1)F}(X_n) \to W_\tau^{(1)F}(X_n)$, полагая по индукции $\check{\sigma}[f_i(t_0, \dots, t_{n-1})] := S^n(\sigma(f_i), \check{\sigma}[t_0], \dots, \check{\sigma}[t_{n-1}])$. Пусть $Hyp_\tau^{(1)F}$ есть множество всех (1)-полных гиперподстановок. На этом множестве естественным образом определяется бинарная операция $\sigma_1 * \sigma_2 := \check{\sigma}_1 \circ \sigma_2$, где $\circ$ обозначает обычную композицию функций. Итак, это множество образует полугруппу $(Hyp_\tau^{(1)F},*)$. Так же, как в предложении 2 из [1], индукцией по слож-ности терма доказываем следующее

Предложение 1 Для любого $\sigma \in Hyp_\tau^{(1)F}$ отображение $\check{\sigma}$ является эндоморфизмом свободной алгебры $cl_F^{(1)}\tau = (W_\tau^{(1)F}(X_n), S^n)$.

Естественно, (k)-*полная гиперподстановка* есть любое отображение $\sigma: \{f_i \mid i \in I\} \to W_\tau^{(k)F}(X_n)$ и поэтому это предложение можно распространить так: для любого $\sigma \in Hyp_\tau^{(k)F}$ отображение $\check{\sigma}$ является эндоморфизмом свободной алгебры $cl_F^{(k)}\tau$. Для произвольного многообразия V типа τ пусть $Id^{(k)F}V := W_\tau^{(k)F}(X_n) \cap IdV$ есть множество всех тождеств многообразия V, состоящих из n -арных (k)-полных термов. Обобщением предложения 4 из [1] является

Предложение $Id^{(k)F}V$ является конгруэнцией алгебры $cl_F^{(k)}\tau$.

Доказательство основано на индукции. Рассмотрим общий случай; пусть $t = f_i(l_0, \dots, l_{n-1}) \in W_\tau^{(k)F}(X_n)$ и пусть для всех l_j $(0 \le j \le n-1)$ уже доказаны тождества $S^n(l_j, t_0, \dots, t_{n-1}) = S^n(l_j, r_0, \dots, r_{n-1}) \in Id^{(k)F}V$. Тогда

$$S^n(f_i(l_0, \dots, l_{n-1}), t_0, \dots, t_{n-1}) = f_i\big(S^n(l_0, t_0, \dots, t_{n-1}), \dots, S^n(l_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1})\big) =$$
$$= f_i\big(S^n(l_0, r_0, \dots, r_{n-1}), \dots, S^n(l_{n-1}, r_0, \dots, r_{n-1})\big) = S^n(f_i(l_0, \dots, l_{n-1}), r_0, \dots, r_{n-1}) \in$$

$\in Id^{(k)F}V$. Теперь для доказательства импликации

$$t = r \in Id^{(k)F}V \quad \Longrightarrow \quad S^n(t, r_0, \dots, r_{n-1}) = S^n(r, r_0, \dots, r_{n-1}) \in Id^{(k)F}V$$

достаточно заметить, что конгруэнция, определяемая тождествами многообразия, является вполне инвариантной конгруэнцией на абсолютно свободной алгебре $F_\tau(X_n)$.

(k)-полные гиперподстановки позволяют определить $(k)F$-гипертождества в любом многообразии V типа τ; напомним, что гипертождества были введены в работе Тейлора [3].

Определение Пусть V - многообразие типа τ и пусть $Id^{(k)F}V$ - множество всех тождеств многообразия V, состоящих из n -арных (k)-полных термов. Тогда тождество вида $s = t \in Id^{(k)F}V$ называется $n-(k)F$-*гипертождеством* в V, если $\check{\sigma}[s] = \check{\sigma}[t] \in Id^{(k)F}V$ для всех $\sigma \in Hyp_\tau^{(k)F}$. Многообразие V назовем $n-(k)F$-*жестким*, если всякое тождество из множества $Id^{(k)F}V$ выполняется в V как некоторое $n-(k)F$-гипертождество. Доказательство предл.2 следует из предл.1.

Предложение 2 Если $Id^{(k)F}V$является вполне инвариантной конгруэнцией алгеб-ры $cl_F^{(k)}\tau$, то многообразие V является $n-(k)F$-жестким.

Список использованных источников

1. Denecke K. and Jampachon P. Clones of full terms// Algebra and Discrete Math., 2004, v.4, p.1-11. 2. Schein B.M. and Trochimenko V.S. Algebras of multiplace functions //Semigroup Forum, 1979, v.17, p. 1-64. 3. Taylor W. Hyperidentities and hypervarieties// Aequationes Mathematicae, 1981, v.23, p. 30-49.