

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Т. М. Боровська**

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНУВАННЯ  
І РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ  
НА БАЗІ МЕТОДОЛОГІЇ  
ОПТИМАЛЬНОГО АГРЕГУВАННЯ**

**Монографія**

Вінниця  
ВНТУ  
2018

УДК 62-50+658.5+519.6

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 8 від 29.03.2018 р.)

Рецензенти:

**Р. Н. Квєтний**, доктор технічних наук, професор

**А. Я. Кулик**, доктор технічних наук, професор

**Боровська, Т.М.**

Математичні моделі функціонування і розвитку виробничих систем на базі методології оптимального агрегування : монографія / Т. М. Боровська. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 308 с.

ISBN 978-966-641-731-5

В монографії розглядаються математичні моделі функціонування і розвитку виробничих систем на базі методології оптимального агрегування. Побудовано декомпозиційну структуру для моделей виробничих систем упорядковану за ознаками: функція, структурна версія, рівень редукції. Обґрунтовано вибір ресурсного підходу для побудови моделей оптимізації виробничих систем. Виконано аналіз і класифікацію ресурсних зв'язків. На цій основі запропоновано, обґрунтовано і програмно реалізовано методологію оптимального агрегування для виробничих систем, що дозволяє звести багатовимірну задачу оптимізації до системи одновимірних задач.

УДК 62-50+658.5+519.6

ISBN 978-966-641-731-5

© Т. Боровська, 2018

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	7
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ .....	10
1.1 Еволюція процесів функціонування і розвитку виробничих систем.....	10
1.1.1 Аналіз аналогів і прототипів.....	13
1.1.2 Нові технології в проектуванні і управлінні виробничими системами – орієнтація на моделювання .....	24
1.2 Базові задачі моделювання і оптимізації виробничих систем.....	28
1.2.1 Задача розподілу .....	28
1.2.2 Багатокрокова задача розвитку .....	31
1.2.3 Задачі обміну ресурсами .....	36
1.3 Узагальнення на рівні теоретико-множинних моделей.....	45
1.4 Вибір структури системи моделей функціонування та розвитку виробничих систем.....	49
1.4.1 Вибір базової структури і границь об'єкта .....	50
1.4.2 Вибір структури системи моделей виробництва .....	51
Висновки до розділу 1 .....	54
РОЗДІЛ 2 РОЗРОБКА ОПТИМАЛЬНО АГРЕГОВАНИХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦІОНУВАННЯ І РОЗВИТКУ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ .....	56
2.1 Алгебраїзація задач оптимального агрегування.....	57
2.1.1 Постановка базової задачі оптимального агрегування ....	57
2.1.2 Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої виробничої системи з елементами, що функціонують паралельно .....	60
2.1.3 Алгебра оптимального агрегування.....	62
2.1.4 Реалізація і дослідження оператора оптимального агрегування.....	67
2.2 Узагальнення оптимального агрегування як еквівалентнісного методу для розподілених систем з довільною структурою .....	70

2.2.1 Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої виробничої системи з елементами, що послідовно функціонують .....	71
2.2.2 Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої виробничої системи з довільною структурою .....	76
2.3 Розробка базової моделі оптимального розвитку .....	84
2.3.1 Постановка задачі оптимального розвитку .....	85
2.3.2 Декомпозиція базової задачі оптимального розвитку .....	88
2.3.3 Точне розв'язання узагальненої задачі розподілу .....	92
2.3.4 Наближене розв'язання задачі розвитку .....	94
2.3.5 Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язків .....	96
2.4 Дослідження моделі оптимального розвитку .....	98
2.4.1 Аналіз процесів розвитку .....	98
2.4.2 Аналіз впливу невизначеностей .....	101
2.5 Розробка і дослідження моделі оптимального розвитку з урахуванням освоєння .....	103
2.5.1 Розробка моделі оптимального розвитку при урахуванні ефектів освоєння нового виробництва .....	103
2.5.2 Розробка моделі динаміки процесу розвитку виробництва .....	107
2.5.3 Отримання точного розв'язання задачі розвитку з урахуванням ефекту освоєння виробництва .....	111
Висновки до розділу 2 .....	119
<b>РОЗДІЛ 3 РОЗРОБКА СИСТЕМИ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>122</b>
3.1 Концептуальна модель децентралізованої розподіленої системи .....	124
3.1.1 Постановка задачі децентралізації управління .....	126
3.1.2 Аналіз структур децентралізованих систем .....	128
3.1.3 Аналіз і вибір функціональних субмоделей для децентралізованої моделі управління .....	129
3.1.4 Розробка інтерфейсу програми моделювання .....	133
3.1.5 Аналіз результатів моделювання децентралізованої системи .....	136
3.2 Узагальнення моделі локального управління .....	142



3.2.1	Технологія модифікації робочої моделі локального управління .....	144
3.2.2	Аналіз властивостей процесів розвитку децентралізованих систем .....	145
3.3	Побудова системи моделей для задачі термінального управління .....	149
3.3.1	Розробка базової моделі системи з термінальним управлінням .....	150
3.3.2	Дослідження термінальної САУ при паралельній роботі приводів .....	151
3.4	Побудова системи моделей для об'єкта з паралельними інформаційними каналами .....	153
3.4.1	Синтез та дослідження імпульсної динамічної системи з ідентифікатором стану .....	153
3.4.2	Розробка програмних модулів для синтезу та моделювання стійкої до відмов вимірювачів системи .....	157
3.5	Побудова системи моделей для задачі оптимального управління розподіленою технологічною системою .....	162
3.5.1	Система оптимального управління синтезом стиролу .....	162
3.5.2	Розробка системи оптимального управління синтезом стиролу .....	164
3.5.3	Розробка альтернативної системи управління реакторами .....	166
3.5.4	Дослідження системи управління реакторами .....	168
3.6	Узагальнення: трирівнева декомпозиція .....	172
3.6.1	Формалізація і обґрунтування трирівневої декомпозиції .....	172
3.6.2	Синтез декомпозиційної структури для систем К-класу і Д-класу .....	178
	Висновки до розділу 3 .....	182
<b>РОЗДІЛ 4 МЕТАМОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ .....</b>		<b>184</b>
4.1	Визначення метамоделей – моделей процесів побудови моделей розподілених виробничих систем .....	185
4.2	Розробка імітаційної моделі для систем класу «виробники, продукти, користувачі» .....	192

4.2.1 Лінгвістична і графова моделі системи «виробники, продукти, користувачі».....	192
4.2.2 Розробка моделі лінійки продуктів.....	194
4.2.3 Розробка моделі вибору користувача на лінійці продуктів.....	196
4.2.4 Розробка моделі вибору і навчання користувача.....	200
4.2.5 Розробка програми випадкового вибору користувача з навчанням.....	204
4.2.6 Розробка моделі системи «виробники, продукти, користувачі».....	205
4.3 Розробка імітаційної моделі для систем класу «виробники, продукти, агреговані користувачі».....	207
4.3.1 Вибір концептуальної моделі динаміки лінійки продуктів.....	209
4.3.2 Побудова агрегованої моделі динаміки лінійки продуктів.....	211
4.3.3 Розробка моделей локальної динаміки лінійки продуктів.....	214
4.4 Декомпозиційні структури. Узагальнення і класифікація імітаційних моделей розподілених систем.....	221
Висновки до розділу 4.....	227
<b>РОЗДІЛ 5 ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНИХ МОДЕЛЕЙ І МЕТОДІВ.....</b>	<b>229</b>
5.1 Агреговані моделі: приклади застосування результатів.....	231
5.2 Моделі адаптивних систем: приклади застосування.....	239
5.3 Імітаційні моделі систем: аналіз результатів моделювання.....	241
5.4 Розробка мультимедійних посібників, орієнтованих на моделювання і створення моделей.....	245
5.5 Робочі моделі оптимального однокрокового і багатокрокового розподілу ресурсів.....	248
5.6 Технологія створення базової версії метамоделі.....	250
5.7 Аналіз адекватності розроблених моделей.....	260
Висновки до розділу 5.....	267
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>268</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>271</b>

## ВСТУП

Як видно з назви, в монографії розглядається досить обмежений напрям в дійсно актуальному і добре опрацьованому наукою і практикою напрямі. Дійсно: «математичні моделі» – об'єкт та інструмент для теоретиків і практиків з усіх напрямків і галузей; «моделі функціонування і розвитку» – що можна додати до напрацювань видатних економістів, математиків і великих науково-дослідних установ; «виробничі системи» – задачі сучасного високотехнологічного і комп'ютеризованого виробництва забезпечені фірмовими програмними продуктами; «методологія оптимального агрегування» – а це дійсно нове і занадто просте у використанні вирішення проблем моделювання і оптимізації систем великої розмірності.

Перше важливе питання: чому це не з'явилося в епохи Ейлера і Лагранжа, Месаровича і Форрестера? – Відповідь: з часів Ейлера суттєво змінювався зміст понять «модель», «моделювання», математика: – докомп'ютерна епоха: математична модель – формули і креслення; – епоха мейнфреймів: математична модель – формули, креслення і результати обчислень за цими формулами на «великому калькуляторі»; – епоха математичних платформ: математична модель – формули, креслення, «моделі-калькулятори», робочі моделі породжені програмними платформами. За терміном «породжені» стоять операції векторизації, функції користувача з параметрами, символні обчислення. Робоча модель – певний гібрид класичної математики і програмування. Саме такі моделі не тільки дозволяють легко розв'язувати відомі складні задачі, але і ставити і розв'язувати нові. Все подане вище відображено предметно в розділах монографії.

Сучасні виробничі системи характеризуються високою параметричною та структурною динамічністю, суттєвими нелінійностями і високою невизначеністю зовнішнього оточення. Характерні риси виробничих систем – використання ефективних високих технологій, що створюються у великих науково-дослідних комплексах. Потім виробничі системи фактично будуються навколо вибраної технології. Самі технології можуть розроблятися десятиріччями, але після створення реалізуються швидкими темпами під тиском глобальних факторів.

Особливо слід виділити виробництва, в яких домінуючими факторами є енерговитратність та екологічність використаних технологій. Типові приклади виробничих систем – металургійні виробництва, системи теплопостачання, багатопродуктові та розподілені системи, системи біореакторів для переробки різноманітних відходів. Структури таких систем є відображенням структури технологічних процесів. Це вертикально інтегровані згідно з етапами техпроцесів структури, структури з виробничими елементами, що працюють паралельно, ієрархічні структури та структури зі зворотними і параметричними зв'язками. Наявні математичні моделі для оптимізації розподілів навантажень і ресурсів не складають цілісної системи, є занадто спрощеними. Динамічність сучасних виробничих систем обмежує можливості отримання і використання статистичних даних.

Сучасні виробничі системи фактично не мають довгих періодів функціонування з незмінними технологіями, номенклатурою і потребами. Тому стратегічне управління розвитком переходить з категорії бажаного в категорію необхідного. Наявні математичні моделі та методи оптимального розвитку теж є одиничними і занадто спрощеними для використання в системах управління розвитком виробництва. Дослідження та побудова моделей функціонування і розвитку ведеться більше п'ятдесяти років, але цілісної системи моделей і методів функціонування і розвитку для використання в системах оперативного і стратегічного управління не створено. Тому розробка цілісного комплексу ефективних моделей і методів, які могли б працювати з реальними функціями виробництва, а не тільки з лінійними та квадратичними наближеннями, є актуальною.

У цілому комплексний аналіз літератури показав, що вибрано дійсно актуальний напрям досліджень, однак є ціла низка відкритих питань: розробка обчислювальних методів моделювання, придатних для систем з довільними функціями виробництва і освоєння виробництва; упорядкування та узагальнення відомих результатів з декомпозиційного підходу до моделювання розподілених систем, ефективні методи побудови нових моделей для нових виробничих систем. Для сучасних виробничих систем характерні процеси інтеграції та децентралізації. Тому для практики потрібні системи моделей-предикторів для відо-

браження поведінки як системи в цілому, так і кожного елемента. Також відсутні методи отримання оптимальних еквівалентних моделей для великих розподілених виробничих систем (методи оптимального агрегування), відсутня цілісна система моделей і методів для використання в системах оперативного і стратегічного управління.

Для подолання неповноти наявних моделей і методів відносно специфіки сучасних виробничих систем необхідно вирішити актуальну науково-практичну проблему відсутності методологічної основи для побудови цілісного підходу до моделювання процесів функціонування та розвитку розподілених виробничих систем, що зумовлює недостатню ефективність функціонування і розвитку таких систем.

Розроблені моделі і методи дозволяють ефективно розв'язувати актуальні складні задачі прогнозування, контролю і управління сучасними виробничими системами. Розроблені моделі дозволяють користувачу будувати персональні системи підтримки рішень і використовувати «що буде якщо аналіз» і «ризик аналіз».

Отже, теоретичні дослідження, направлені на вирішення цієї важливої наукової і практичної проблеми, мають важливе значення і постійну актуальність.

# **РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ**

Методи створення математичних моделей в усі часи привертали увагу вчених з різних галузей науки. Напрямки в моделюванні і конструюванні математичних моделей технічних систем не мають чітких границь, тому важко ввести якусь однозначну і вичерпну класифікацію моделей. В даній роботі відібрано і упорядковано літературні джерела, що є прототипами за тематикою, з цих прототипів відібрано базові прототипи за методологією аналізу і синтезу математичних моделей функціонування і розвитку виробничих систем. Моделі з базових прототипів вивчались «предметно», тобто були реалізовані в середовищі математичного пакета і досліджені. В підсумку відібрані дійсно фундаментальні моделі і класичні. Класичні моделі відібрані як приклад принципових обмеженостей аналітичних моделей і методів. Згадаємо назви методів оптимізації: лінійне, квадратичне, випукле, цілочислове програмування, гаусівська статистика.

## **1.1 Еволюція процесів функціонування і розвитку виробничих систем**

Сьогодні рівень використання знань та високий рівень «засобів виробництва знань» є необхідною умовою стійкого розвитку суспільства. Змінилися структура і процеси функціонування виробничих систем (ВС). Зміст звичних термінів «проектування», «виробництво», «виробнича система», «продукт виробництва», «адекватність моделі» відповідно змінився [272, 273]. Зокрема, проектування виконується як 3Д-проектування зі створенням «віртуального об'єкта» виробництва, «віртуального заводу». В суттєво інноваційному проекті створюються «об'єкти-демонстратори» для ключових елементів і підсистем проекту. Однак очевидно, що вимоги до математичних моделей в умовах швидкого, і досить стихійного розвитку виробництва, змінюються в напрямку можливостей прогнозування функціонування ще не побудованих виробничих систем. Розглянемо стисло зміст еволюції виробничих систем від індустріального суспільства до «суспільства знань». Це дозволить чітко визначити місце математичних моделей функціонування і розвитку виробничих систем (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 – Стан і тенденції розвитку виробничих систем

Сучасні виробничі системи є інформаційно і ресурсно інтегрованими. В певних випадках виконується і територіальна інтеграція в «мегазаводи» з індивідуально-масовим виробництвом. В мегазаводах інтегруються: виробництво, логістика, сервіс, розвиток, інновації для забезпечення випуску динамічної лінійки продуктів. Новіша тенденція у виробництві – подрібнення і територіальне розосередження виробництва кінцевого продукту. Це обумовлене появою принципово нових матеріалів і технологій – «суперклей», «графен», «діамагнітна левітація», «адитивні технології». Особливість цих напрямів – надвисокі технології досліджень і виробництва нових матеріалів і простота виготовлення кінцевої продукції – виготовлення на «3D-прінтерах». Соціо-екологічні переваги нових технологій і виробництв – якісні робочі місця в малих територіальних утвореннях, безвідходні виробництва, умови для демонтажу мегаполісів. Така еволюція виробничих систем вимагає зміни в методології і технології створення математичних мо-

делей ВС. Для виробництв, що розвиваються, необхідно побудувати ефективні процеси розвитку моделі виробництва.

Інформатизація та мережі спричинили перехід від домінуючого матеріального виробництва до виробництва з суттєвою взаємодією інформаційних та матеріальних процесів і технологій. Сучасні виробничі системи динамічні параметрично і структурно. Важкою для науки і практики є проблема прогнозування коливань потреб в певній продукції: необхідно не просто регулювати обсяги виробництва, а також постійно модифікувати продукцію і технології виробництва. Сучасні виробничі системи є розподіленими, однак структура зв'язків між елементами – суттєво нелінійна і динамічна. Комплексна динамічність виробничих систем породжує нові проблеми прогнозування і оптимізації. Це в першу чергу стосується статистичних методів. 60 років тому Норберт Вінер писав, що його статистичні моделі і методи непридатні для індустріальних систем – там «занадто короткі статистичні ряди». 40 років тому Джей Форрестер писав, про непридатність лінійних методів статистики до аналізу і прогнозування виробничих систем через суттєві нелінійні технологічні процеси і зв'язки між підсистемами. Він назвав це «хибні кореляції». Тому потрібні нові підходи до аналізу і прогнозування на основі інтеграції неповної реальної статистики, і статистики віртуальної реальності, отриманої на імітаційних моделях функціонування і розвитку ВС. Потрібна методологія створення адекватної імітаційної моделі об'єкта, що тільки проектується і будується. На практиці ця проблема досить задовільно вирішена: створення нового об'єкта починається з системи моделей, на базі якої створюється реальна система «об'єкт виробництва – виробництво». Класичний постулат: «модель є відображенням суттєвих для дослідника властивостей реального об'єкта» майже не порушується при створенні спочатку моделі, потім об'єкта: коефіцієнт новизни нових зразків типових технічних систем 2–5 %, для принципово нових технічних систем, наприклад, космічних апаратів – не більший 10–15 %. Елементи таких принципово нових систем беруться з уже існуючих систем і потім адаптуються і модернізуються до нового використання. Евристики є рідкісними, але важливими елементами в процесах розвитку і вони спочатку базуються на існуючих технологіях.



### 1.1.1 Аналіз аналогів і прототипів

Очевидна проблема моделювання ВС – висока розмірність об'єктів. Методологія вирішення проблеми розмірності в даній роботі є розвитком методології, створеної Р. Беллманом для розв'язання однокрокових та багатокрокових, детермінованих і стохастичних задач [24–26]. Загальну спрямованість своїх досліджень Беллман охарактеризував як заміну задачі вибору точки в багатовимірному фазовому просторі системою задач вибору точки в фазових просторах меншої розмірності. Розвиток теорії математичного моделювання в останні десятиріччя все більше орієнтується на ефективне використання можливостей комп'ютерів. Можна виділити два напрямки: – реалізація моделей і методів створених в докомп'ютерну епоху; – створення нових моделей і методів, що використовують можливості програмно апаратних засобів. Р. Беллман зумів поєднати аналітичні методи оптимізації з числовими методами. Так з'явився метод динамічного програмування. В даній роботі методологія Р. Беллмана [24] стала аналогом методологічної основи оптимального агрегування для декомпозиції багатовимірної однокрокової задачі оптимізації в систему одновимірних задач. Для розв'язання багатокрокових задач використано метод принципу максимуму Л. С. Понтрягіна [249, 250]. Метод принципу максимуму для певних класів задач є більш ефективним ніж метод динамічного програмування. В. Г. Болтянський [31] знайшов розв'язання для системи задач оптимального за швидкодією управління. В цій роботі критерій оптимального розвитку – інтегральний першого роду, а інтерпретація – накопичений випуск, «прибуток» за плановий період розвитку. Це обумовило розробку і дослідження алгебраїчного підходу до розв'язання варіаційної задачі розвитку виробництва.

Детально були досліджені на робочих моделях методи оптимального розподілу ресурсів у виробничих системах на базі теорії активних систем з робіт В. І. Опойцева [239] і В. М. Буркова [157]. В математичному плані методи відкритого управління є еквівалентною заміною багатовимірної задачі оптимізації сумарного виробництва системою одновимірних задач оптимізації виробничих елементів за своїми локальними критеріями. Управління в системі дворівневе: перший рівень однакове для всіх елементів управління з «центру» – «правила

гри»; другий рівень – локальні управління елементів – «заявки на ресурси». Калька з англійської назви методу: «чесна гра» – всі елементи знають правила, мають власні цілі, міри досягнення цілей – критерії. Необхідна умова для таких управлінь – збіжність, стійкість і оптимальність стану рівноваги для «центру» і всіх елементів. На відміну від інших робіт в цій області в [239] подано строгі математичні доведення існування, оптимальності і стійкості стану рівноваги. Зокрема, доведено існування параметричного класу «мінімально розумних управлінь» (МРУ), що забезпечують стійкість і оптимальність ВС. Цінними для побудови ефективних комп'ютерних моделей в цих роботах теоретичні дослідження задач розпаралелювання багатовимірних оптимізаційних задач – продуктивний напрям в теорії управління розподіленими системами. Свій час випереджувала робота В. М. Глушкова, В. В. Іванова, В. М. Яненка [173], де для дискретних, нелінійних виробничих систем запропоновано замість диференціальних рівнянь дискретизовані інтегральні згортки. Важливі методологічні підходи знайдені в роботах Е. А. Берзіна [27, 28] – підхід до оптимального агрегування виробництв і користувачів, А. В. Горбаня [174, 175] – раціональна технологія системного виробництва проектних образів: структура баз знань. Спроби модифікувати робочу модель відкритого управління для випадку невиконуваних функцій виробництва (ФВ) показали його непрацездатність для відомих і запропонованих алгоритмів управління [206, 211, 212]. Змістовно невиконуваних ФВ – наявність у ФВ виробничого елемента інтервалів із зростаючою ефективністю. Невиконуваних ФВ для багатьох сучасних виробництв не дозволяє реалізувати на практиці методи дворівневого координаційного управління, які запропоновані М. Месаровичем [228–230]. З цієї ж причини неадекватні реальності функції класичної економіки Кобба–Дугласа і CES-функції.

Серед сучасних робіт в області моделювання і оптимізації технічних систем найближчим аналогом з тематикою і методологічними основами є роботи А. В. Усова в області моделювання технічних систем і аналізу стійкого функціонування і розвитку [268]. Відмінності від великої кількості робіт за такою тематикою – новизна і конструктивність. Подібна тематика і методологія – в роботах Е. Г. Петрова [245]. Ці роботи дозволили знайти підходи до вирішення окремих проблем побудови моделей виробництв, виробничих систем виробників галузі

регіону: відділити технічні задачі виробництва і сервісні економічні задачі. Згідно з теоремою Коуза функції економіки – юридичне і бухгалтерське забезпечення транзакцій. Задачі розподілу ресурсів виробництва і розвитку в просторі і часі є технічними. Цей аспект розвитку та інновацій, який досліджений в роботах М. З. Згуровського в області моделювання регіональних соціо-техніко-економічних систем, в області технологічного передбачення та регіонального розвитку [186, 187], був в даній роботі одним із інформаційних факторів створення метамоделі – моделі сумісного розвитку імітаційної моделі виробничої системи і реальної виробничої системи. Другий інформаційний фактор в створенні метамоделі в даній роботі – робота Л. М. Любчика, де подано фундаментальний і конструктивний підхід до важливої проблеми побудови спостерігачів і динамічних компенсаторів збурень для оптимального та адаптивного управління [225]. Логіка досліджень процесів функціонування і розвитку технологічних систем привела до необхідності побудови моделей нелінійних систем з керованими параметрами та інтелектуальних систем управління. Найбільш результативно та фундаментально ці питання досліджені в роботах О. І. Михальова, зокрема, [233, 234].

Оригінальним і фундаментальним є запропоноване в роботі В. В. Романюка [337] підвищення точності вимірювань зношення вузлів тертя в технічних системах, де невизначеності мають декілька породжуючих механізмів. Використано двошаровий перцептрон. В моїй роботі подібні породжуючі механізми мають місце при моделюванні виробничої системи в оточенні інших виробників. Універсальність, гнучкість, потужність комп'ютеризованих математичних методів системного аналізу продемонстрована в роботах В. Я. Данилова – від системного аналізу стану і параметрів глибоких нафтових свердловин акустичного зондування, до систем підтримки прийняття рішень великих страхових компаній та системного аналізу показників стратегічного менеджменту великої організації [176]. Першими концептуальними першоджерелами і методологічними зразками при виконанні цієї роботи були наукові праці Б. І. Мокіна, В. Б. Мокіна [236–238], де розвинута методологія аналізу і синтезу та ідентифікації стохастичних і нечітких систем, І. В. Кузьміна, де проаналізовано питання критеріальної оцінки [219], роботи В. А. Лужецького [224] з надійних обчислень, праці В. М. Дубового [180–182], в яких сформовано строгий формалізований

підхід до побудови моделей і моделювання в умовах невизначеності. Саме на базі цих робіт розроблено підхід до аналізу адекватності моделей систем, що розвиваються.

Зразки застосування класичних і сучасних методів оптимізації до складних технічних задач подані в роботах Р. Н. Кветного [192, 193], де розглядаються проблемно-орієнтовані комп'ютерні системи, моделювання телекомунікаційних мереж і задачі апроксимації сплайнами, сплесками. Поєднання практичних і методологічних аспектів побудови моделей технологічних процесів і методів управління процесами подано в монографії В. М. Лисогора [223]. Приклади створення гібридних – лінійних і нелінійних методів аналізу і синтезу систем управління складними динамічними системами зі спостерігачами – та створення нових підходів до визначення впливу неполадок елементів в мережах масового обслуговування подані в роботі С. Ф. Теленика [264]. Методи аналізу і синтезу на базі нечіткої логіки і нейронечітких мереж є лідерами в рейтингах. На фоні маси публікацій з цієї тематики виділяються глибиною і якістю досліджень роботи С. Д. Штовби [338, 339] і О. П. Ротштейна [336]. Ці роботи були прикладами розв'язання задач для цієї роботи – розмивання обмежень в оптимізаційних задачах і в моделях вибору користувачів на лінійці продуктів одного призначення, які упорядковані за цінністю.

Проведено аналіз англомовної літератури з питань моделювання, аналізу та синтезу виробничих систем. Проведено змістовний і статистичний аналіз публікацій у виданнях IEEE, найбільше аналогів з тематики роботи знайдено в: *Intelligent Systems, Automatic Control, Automation Science and Engineering*. Стійко зростає кількість публікацій з проблем побудови інтелектуального управління для розподілених транспортних, інформаційних і виробничих систем, зокрема: [319, 332, 343, 344]. Загальна особливість публікацій – висока математична культура в постановці і розв'язанні задач управління для нелінійних, нестационарних, невизначених об'єктів за допомогою класичних методів, базованих на обмеженнях: лінійності, випуклості, неперервності та гаусівської статистики; інтенсивне використання апроксимацій, вбудованих функцій розв'язання систем рівнянь, оптимізації та ін. Такі вбудовані «сервіси» були непрацездатними для не випуклих, негладких, розривних функцій. Це обумовило розробку власних методів, алгоритмів і програмних модулів оптимізації.

У роботі [298] сформульовано проблему оптимального розподілу ресурсів для збирання даних і запропоновано два евристичних алгоритми на базі структур Байеса для оптимізації прогнозування. Аналогом для алгоритму оптимізації розподілу навантаження між нелінійними підсистемами – хімічними реакторами і біореакторами є робота [299], де розглянуто задача ідентифікації і управління нелінійною системою з відносно незалежними підсистемами. Сформульовано теорему збіжності для випадків нелінійних зв'язків. Роботи [291, 305, 322, 330] охоплюють комплекс актуальних практичних задач і відповідних теоретичних методів, а саме: адаптивні розподілені алгоритми управління децентралізованими системами; формалізовані моделі з п'ятиелементних мережевих систем з позитивними біквадратичними функціями, що дозволяють алгебраїзувати задачі синтезу таких систем; проблему сумісної мінімізації суми випуклих функцій, кожна з яких подає локальні цільові функції елементів-агентів, за умови, що кожен агент має інформацію про його локальну функцію, і має зв'язки з іншими агентами згідно з нестационарною топологією мережі; задачу оптимального управління кінцевим станом при змінному горизонті управління для класу гібридних неперервно-дискретних динамічних систем з детермінованими і стохастичними переходами.

У роботах [313, 325, 335] досліджуються задачі оптимального розподілу ресурсів в технологічних системах, системах «розробники–користувачі», в системах з паралельним і послідовним поєднанням елементів. У великій кількості публікацій висвітлюються проблеми системної надійності, живучості, плавної деградації технологічних систем в цілому, систем управління, інформаційно-вимірювальних систем та систем масового обслуговування [288, 292, 302, 307, 308, 327, 328, 334, 346]. Як засоби побудови моделей в переглянутих статтях використовуються дискретні спостерігачі невизначеностей, тривимірні нейронні мережі, метод найменших квадратів, мережі Петрі, функціональна і цінова декомпозиції. В роботі [309] розглянуто дворівневу систему планування виробництва, але на базі лінійного програмування. В роботі [293] – розроблено інноваційну, децентралізовану, відмовостійку і відновлювану систему управління потоками багажу в аеропортах.

Задачі оптимізації для складних, багатовимірних технічних систем подано в [302, 306, 317, 333] на базі генетичних алгоритмів та штуч-

них нейронних мереж, без намагань спростити велику систему через агрегування і декомпозицію. В роботах [286, 301, 318, 342] для оптимізації виробничих систем використовуються декомпозиційні методи.

Загальна проблема моделювання виробничих систем у поєднанні в одній математичній моделі аспектів, що відносяться до різних галузей знань – техніки, технології, мікробіології (біотехнологічні системи), економіки, соціальних аспектів споживання, навчання персоналу та розробки інновацій. Важливими є питання отримання оптимальних стратегій розвитку для нечітких, стохастичних об'єктів з параметричними зв'язками, якими є виробничі системи.

З напрямку «методології і методи побудови математичних моделей виробничих систем» в якості зразків методології вибрано роботи Я. З. Ципкіна [276] – концепція автоматної оптимізації; М. Пешеля [246] – єдиний підхід до моделей механіки, термодинаміки, фізики, нечітких моделей, моделей з параметричними зв'язками і принципи декомпозиції моделей складних систем; Л. Г. Раскіна – оптимальний розподіл ресурсів у виробничих системах при наявності невизначеностей [252]; М. Д. Месаровича [228–230] – моделі координаційного управління в багаторівневих ієрархічних системах; Н. Н. Моїсеєва [235] і Дж. Форрестера [272, 273] – створення багаторівневих систем моделей динаміки – від окремого підприємства до глобальних систем. Підхід Форрестера до розробки моделей виробничих систем, міст і світової динаміки суттєво відрізняється від загальноприйнятого: модель створюється на базі виявлення «породжуючих механізмів» від законів фізики для технологічних процесів до закономірностей функціонування малих груп конструкторів, менеджерів, вчених – потенційних центрів зародження інновацій. Для цього залучаються текстові і графічні документи, а статистика використовується на етапі параметричної настройки і верифікації моделі. Форрестер показав, що методи на базі гаусівської статистики неадекватні реальності, вони створюють «хибні кореляції». Недолік моделей Форрестера – відсутність ефективних методів оптимізації нелінійних систем великої розмірності, відсутність системи моделей різної точності і агрегування.

В даній роботі розроблено математичні моделі виробничих систем. Це неможливе без використання декомпозиції, агрегування і оптимізації. Розглянемо групу фундаментальних робіт в області агрегування, декомпозиції і оптимізації великих техніко-економічних

систем. Цей напрямок більше п'ятдесяти років залишається одним з актуальних напрямів наукових досліджень. В цій області можна виділити певні спеціалізовані за класами задач, методологій і методів напрямки. Приклади задач: транспортна задача, міжгалузевий баланс, виробнича задача. Характерна особливість об'єктів оптимального управління – висока розмірність. Розглянемо значимі роботи з декомпозиції, агрегування і оптимізації.

Робота А. А. Первозванського з розвитку математично строгих процедур декомпозиції і агрегування на основі відмови від повної еквівалентності початкової і перетвореної задач, опублікована в [241]. В цій роботі в якості формальної бази використовується метод малого параметра (теорії збурень). Розробляються конкретні схеми наближеного агрегування і декомпозиції задач техніко-економічного характеру.

В дослідженні вибрано ресурсний підхід до виробничих систем та їх елементів і на цій основі будується алгебра оптимального агрегування, що подібна до алгебри передаточних функцій в теорії лінійних динамічних систем, з однією відмінністю – в бінарні операції агрегування паралельних, послідовних, кільцевих та ін. структур вбудовано оптимізацію розподілу ресурсів між виробничими елементами. Запропонована в моїй роботі методологія оптимального агрегування оперує з відносно вузьким колом практичних задач, але дозволяє строго формалізовано отримати рішення практичних задач.

В монографії Л. С. Лесдона [220] виконано узагальнення робіт з розвитку принципу декомпозиції Данцига–Вульфа. Багато уваги приділено оберненню матриць, технологіям роботи з розрідженими матрицями великої розмірності, структурним особливостям великих систем, що дозволяють виконати лінеаризацію. Виконана формалізація статичних і динамічних моделей «витрати, випуск» Леонт'єва. Однак, прикладні розділи втратили актуальність через швидкий розвиток обчислювальних і програмних засобів. Нелінійний варіант принципу Данцига–Вульфа не має обчислювальних переваг – можливість декомпозиції залежить від структури системи, а метод оптимізації – пошуковий.

Суттєва відмінність вибраного напрямку даного дослідження від аналогів в алгебраїзації оптимізаційних задач – побудова алгебри функцій «витрати, випуск», усунення типових проблем багатовимірної оптимізації. Тобто в монографії досліджується клас задач

виробництва іншими методами. Спільне з аналогами – базові поняття і терміни («декомпозиція», «агрегування», «оптимізація»); базові математичні моделі (узагальнені функції «витрати, випуск»). Однак ці терміни не мають єдиного строгого визначення і мають сотні інтерпретацій. В даній монографії ці терміни означають такі об'єкти і операції:

– декомпозиція об'єктів – виробничих систем, опис реальних елементів і реальних зв'язків між елементами для певного класу реальних систем: металургійних, нафтохімічних, агропереробних, електронних;

– агрегування – заміна заданої виробничої системи (структури) еквівалентним за входом–виходом елементом. Особливість агрегування в монографії – збереження інформації про функції «витрати, випуск» агрегованих елементів у структурі операнда результату. Для тривіальної операції агрегування двох виробничих елементів в даній роботі вибрано інший підхід – вбудовування в оператор агрегування «пам'яті» попередніх операцій оптимального агрегування.

В монографії М. Сінгха [262] головна увага приділяється нелінійним системам, розглянуті класичні методи нелінійного програмування від градієнтного методу до декомпозиційно-координаційних методів, а саме: метод цільової координації, координації моделей і комбінований метод. Для порівняння з методологією оптимального агрегування розглянемо постановку задачі оптимізації і зміст трьох методів декомпозиції. Складна система вважається вже розділеною на підсистеми, кожна підсистема має три вектори входів і два вектори виходів. Цільова функція системи є адитивно-сепарабельною функцією від вектора управління для підсистеми і не конкретизованого вектора входів від інших елементів. Ставиться задача визначити матрицю векторів входів кожного елемента, що максимізує критерій – цільову функцію при врахуванні заданих обмежень. Розв'язання починається записом лагранжіану. Для всіх функцій, що входять в лагранжіан, ставляться умови: неперервні функції з неперервними першими похідними. Якщо розмірності кожного вектора досить великі, то виникають труднощі у прямому розв'язанні системи нелінійних рівнянь. Запропоновані декомпозиційно-координатні методи базуються на двох підходах: модифікація цільових функцій субзадач оптимізації для елементів; прогнозування взаємодій. Подібні методи з робіт



М. Месаровича [230] були предметно досліджені з результатами: неадекватність реальності вимог випуклості і неперервності функцій виробництва, квадратичних критеріїв оптимізації, проблеми розмірності декомпозиційно-координаційних методів і стійкості алгоритмів оптимізації, пріоритет інформаційних зв'язків перед ресурсними зв'язками. Месарович подав розв'язання для прикладу системи з двох елементів і визначив практичну неможливість застосування таких методів для систем вищих порядків.

В роботах В. І. Цуркова [275, 277] розглянуто один з центральних аспектів теорії великих систем – проблему декомпозиції. Подані відомі на той час декомпозиційні підходи для задач оптимізації систем і спеціальні методи розкладення для конкретних задач. Більш детально розглянуто метод декомпозиції на базі агрегування змінних, що входять в різні блоки, кінцевий результат якого – алгоритми з організацією паралельних обчислень. В монографії [321] розглядаються переважно лінійні моделі, лінійне програмування, задачі міжгалузевого балансу.

В роботі Ю. М. Павловського [240] проблеми декомпозиції, агрегування, оптимізації, розглядаються в аспекті управління великими динамічними системами. В цій роботі вводиться трирівнева структурно-функціонально-редукційна декомпозиція математичних моделей виробничих систем. Формалізація такої декомпозиції виявилась проблемною. Саме робота Ю. М. Павловського виявилась методичним і методологічним зразком формалізації понять з практики – збалансованим між строгою формалізацією і збереженням зв'язків-інтерпретацій з актуальними задачами практики. У роботі В. С. Танаєва [263] розглядаються основні підходи до побудови процедур декомпозиції і агрегування, призначених для розв'язання великорозмірних задач лінійного програмування. У роботі А. В. Матіна [226] розглядається проблема моделювання узгодження народногосподарських планів і декомпозиційний підхід до її вирішення. В статті В. А. Геловані [170] розглядається агрегування лінійних керованих динамічних систем, в статті В. Л. Вена [163, 164] – агрегування лінійних динамічних моделей класу «міжгалузевий баланс».

За результатами аналізу робіт [163, 164, 170, 220, 226, 240, 241, 262, 263, 275, 277, 321] можна виділити такі декомпозиційні підходи:

1. Декомпозиція Данцига–Вульфа. Лінійне програмування (ЛП), блочно-діагональна матриця.
2. Декомпозиція Корнаї–Ліптака. ЛП, розбиття матриці в «підсистеми», оптимальний розподіл ресурсу.
3. Декомпозиція на базі розділення змінних. ЛП, оптимізація при малому числі обмежень, потім їх збільшення.
4. Параметрична декомпозиція. ЛП, нелінійне програмування (НЛП), введення в цільову функцію і обмеження вектора параметрів для отримання автономних локальних задач.
5. Декомпозиція і агрегування. ЛП, агреговані змінні – суми, зважені суми. Ітерації.
6. Декомпозиція на базі модифікації симплекс-методу (СМ). ЛП, розбиття задачі на підзадачі СМ.
7. Декомпозиція на базі принципу Беллмана. Задача ЛП подається як багатокроковий процес методу динамічного програмування.
8. Декомпозиція і числові методи оптимізації. Випуклі гладкі функції. Ітеративні числові методи є фактично декомпозиційними.
9. Декомпозиція в обчислювальній математиці – лінійні системи, диференціальні рівняння.

Порівняння вище зазначених декомпозиційних підходів із запропонованим в монографії декомпозиційним підходом на базі оптимального агрегування наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Порівняльний аналіз декомпозиційних підходів

№	Постановка задач	Аналоги	Моделі використані в монографії
1.	Об'єкт	Організаційно-виробничі системи	Виробничі системи + сервісні системи
2.	Математична модель	Лінійна, нелінійна	Нелінійна
3.	Обмеження моделі	Лінійні і випуклі, гладкі, монотонні функції	Нестрого монотонно зростаючі обмежені функції
4.	Задачі оптимізації	ЛП, НЛП	НЛП
5.	Результат декомпозиції	Задачі меншої розмірності	Одновимірні задачі
6.	Методи оптимізації	Пошукові ітеративні методи	Метод прямого перебору
7.	Результат оптимізації	Вирішення точкової задачі ЛП, НЛП	Отримання оптимальних еквівалентних ФВ системи
8.	Алгебризація оптимізаційних задач, векторизація	Нереалізовані можливості	Алгебра оптимального агрегування (аналог – $W(s)$ )

Сьогодні виробництва пропонують користувачу для вибору лінійку продуктів одного призначення, але з різними цінами і невизначеними цінностями. Класичні моделі «виробництво – використання» не працюють. З'явилися спрощені моделі для ринків з «асиметричною інформаційною структурою» [3, 4]. Математична модель з [3] була предметно досліджена (програмно реалізована) і розширена введенням субмоделей вибору користувача на лінійці продуктів і навчання вибору за рахунок накопичення досвіду використання – власного та інших користувачів [39]. Соціальна компонента соціо-техніко-екологічних систем (СТЕС) не зводиться до аналізу індивідів як користувачів. Ефективність виробництва суттєво залежить від характеристик персоналу виробничої системи. Як базовий аналог цієї області вибрано роботи Р. Аккофа [4, 5], де моделі індивіда, особистості, соціальних груп від малої формальної групи до держави аксіоматично виводяться з моделей фізики і математики. Цінність моделей Р. Аккофа – можливість створення на їх основі нових моделей для нових проблем функціонування і розвитку виробництва. Ціль і методологія створення цих моделей – в назві монографії [5]: «Ідеалізоване проектування: Як вирішити завтрашню кризу сьогодні».

Найближчими за методологією і математичним обґрунтуванням виявились роботи Р. Фейджина [295–296], де подано цілісне поєднання методології, математичного обґрунтування системою теорем, орієнтація на актуальне практичне застосування оптимального агрегування запитів до великих баз даних, інтеграція класичної математики і прикладного програмування. В даній роботі розроблено і досліджено оптимальне агрегування для виробничих систем.

В результаті аналізу виконано деталізацію методологічних основ і визначено місце роботи в існуючих наукових дослідженнях (рис. 1.2).

В цілому комплексний аналіз літератури показав, що вибрано дійсно актуальний і перспективний напрям досліджень, однак майже всі знайдені аналоги, крім роботи Р. Фейджина, використовують метои і підходи з використанням формальних математичних обмежень, мета яких – ввести задачу в рамки відомих моделей і методів. Задача моделювання процесів розвитку розподілених виробничих систем має низку відкритих питань: розробка обчислювальних методів моделювання, придатних для систем з довільними функціями виробництва і «навчання» елементів; упорядкування і узагальнення

відомих результатів з декомпозиційного підходу до моделювання, розробка моделей процесів розвитку виробничих систем з урахуванням ефектів освоєння. Все це в комплексі обумовлює актуальність даної монографії.

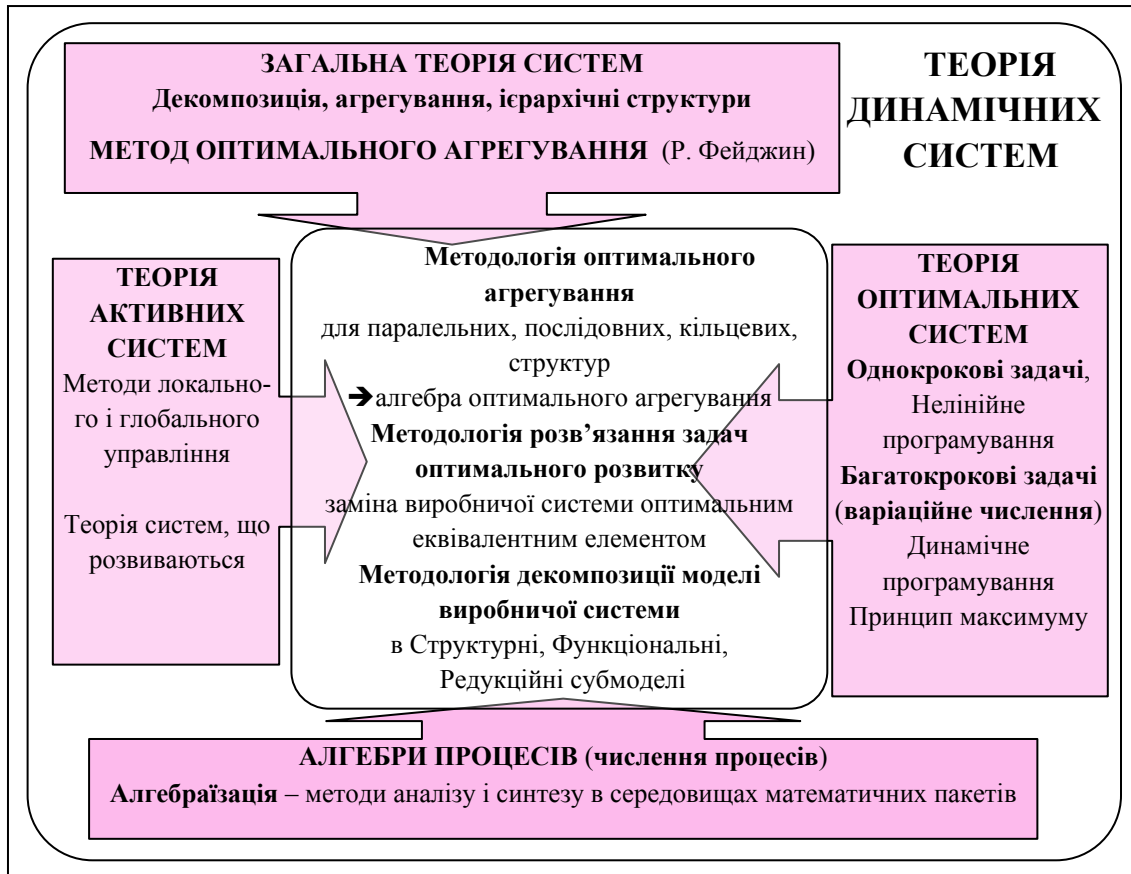


Рисунок 1.2 – Місце роботи в наукових дослідженнях процесів функціонування і розвитку виробничих систем

### 1.1.2 Нові технології в проектуванні і управлінні виробничими системами – орієнтація на моделювання

Нові вимоги до створення нових моделей для нових виробів і виробничих систем обумовлюють необхідність нових методологій розробки і адаптації моделей до змін об'єкта моделювання в процесі його розвитку. Виконано узагальнення численних публікацій різного рівня з цієї тематики.

У високорозвиненому суспільстві математики, софтверні дизайнери і, взагалі, спеціалісти з вищою освітою – стратегічний ресурс. Зокрема, названі професії входять до першої десятки рейтингового списку з

2000 професій, складеного в 2000 році в США. За останні 50 років наука, техніка і технологія пройшли і проходять через низку структурних, не завжди прогнозованих змін. Це високі технології, високі темпи зміни моделей виробів, глобалізація виробництва і ринків. У зв'язку з великою швидкістю зміни технологій, потреб, невизначеністю, великим попитом користуються персональні аналітичні системи прогнозування: «порадники», «помічники», «агенти», «експерти», «бізнес-аналітики», «предиктори». Масові програми такого призначення з багатьох причин є фактично іграшками. Для того, щоб вижити, спеціаліст повинен вміти на дуже обмеженому статистичному матеріалі створювати моделі для прогнозування. Першим призначенням систем моделей – об'єктів даної роботи, є виробничі системи, другим – засоби навчання на базі створення моделей виробничих систем.

Створення сучасної технічної системи можна подати як два паралельних взаємодіючих процеси: процес створення, уточнення, модифікації імітаційної моделі системи і процес підвищення ступеня реальності системи, що проектується. На рис. 1.3 подано узагальнену схему орієнтованого на комп'ютер процесу проектування. Сьогодні 80–90 % проектування та випробувань виконуються в режимі імітаційного моделювання. Реально в процесі проектування використовується складний комплекс моделей, що взаємно доповнюються і контролюються, можуть замінювати будь-який компонент реальної системи.

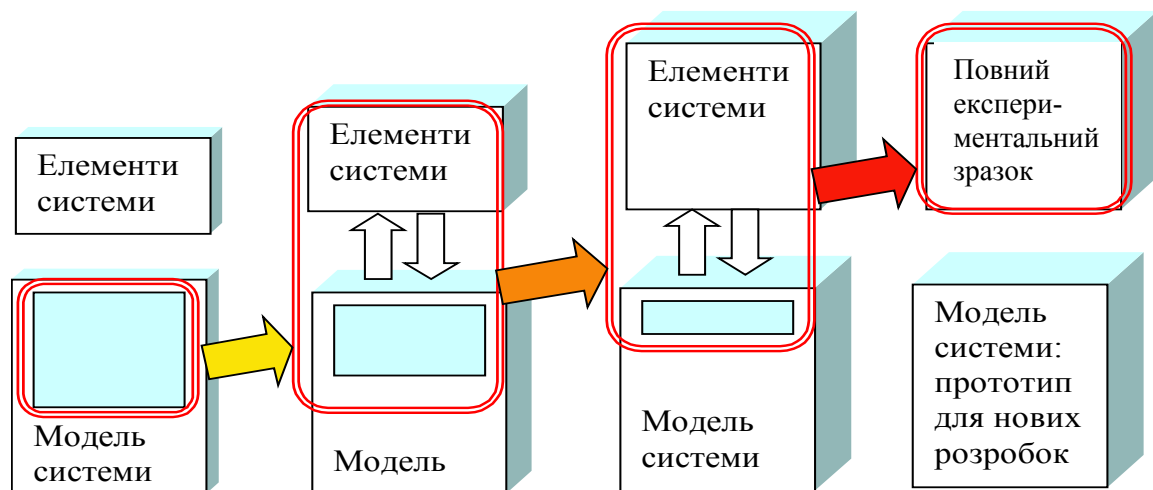


Рисунок 1.3 – Узагальнена схема процесу проектування

Проблема тут зовсім не в тому, щоб навчити спеціаліста користуватись якимись існуючими моделями. Сучасний спеціаліст повинен бути певним чином конструктором і технологом моделей, потрібних на його робочому місці. Одним з важливих аспектів цієї проблеми є розробка орієнтованих на комп'ютеризовані робочі місця і комп'ютеризоване навчання з використанням спеціалізованих програмних засобів для моделювання соціо-техніко-екологічних систем, ядром яких є виробничі системи [268], а також розробка раціональних технологій створення програмно-методичного забезпечення.

Причини широкого використання моделей і моделювання в проектуванні і управлінні виробничими системами – суттєві ускладнення виробничих систем і потенційно необмежені можливості програмно-апаратних засобів. Сучасні виробничі системи якісно відрізняються від систем епохи індустріального виробництва 1900–1970 років. Введемо класифікацію, де усі змінні класифікаційного простору систем мають одну розмірність – час. Виробничі системи класифікуються за їх локалізацією в просторі параметрів:  $\tau_1 = Tn/T\zeta$  – середній період компенсації наслідків середньої аварії (або просто помилки в управлінні системою);  $\tau_2 = T_3/T\zeta$  – запізнення реалізації рішень;  $\tau_3 = T_m/T\zeta$  – період зміни системи (напівоновлення);  $\tau_4 = T_2/T\zeta$  – часовий горизонт прогнозування. В цих залежностях:  $T\zeta$  – тривалість життєвого циклу системи;  $Tn = Cn/O\upsilon$  – середній час компенсації наслідків середньої помилки;  $Cn$  – середня вартість втрат від помилки;  $O\upsilon$  – темп повернення капіталовкладень;  $T_3$ ,  $T_m$ ,  $T_2$  – розмірні значення відповідних параметрів. За останні десятиріччя змінились відношення у тріаді  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$  (запізнення реалізації, період напівоновлення, горизонт прогнозування). Так деякі із існуючих систем мають  $\tau_2 > \tau_4$ , тобто: запізнення реалізації > горизонту прогнозування і  $\tau_3 > \tau_4$ , період напівоновлення > горизонту прогнозування (рис. 1.4).

Розглянемо приклад задекларованого «предметного» підходу до вивчення і дослідження моделей – аналогів. На рис. 1.5 послідовно подані робочі моделі:

- модель макроекономічного циклу Самуельсона–Хікса;
- імітаційна модель «розорення гравця»;
- імітаційна модель «М виробників, один продукт», зібрана на базі стандартних економетричних моделей [1, 5, 10, 20, 21, 166, 183].

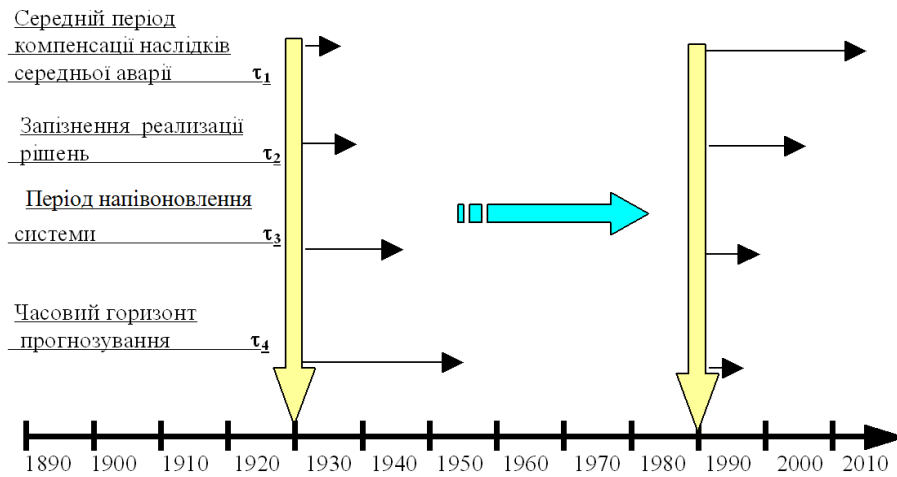


Рисунок 1.4 – Еволюція характеристик виробничих систем

Модель 1 – агрегована, лінійна апроксимація, моделі 2 і 3 – імітаційні, в них відтворюється поведінка кожного елемента з урахуванням невизначеностей. На 3D-графіках подані сумісно процеси для кожного елемента і всієї системи. Моделі техніко-економічних циклів, досліджених Н. Кондратьєвим [316] і С. Кузнецом [317] були створені в епоху індустріального виробництва, коли не було комп'ютерів. Н. Кондратьєв використовував нелінійні моделі росту з обмеженням, коли ще не було створене лінійне програмування.

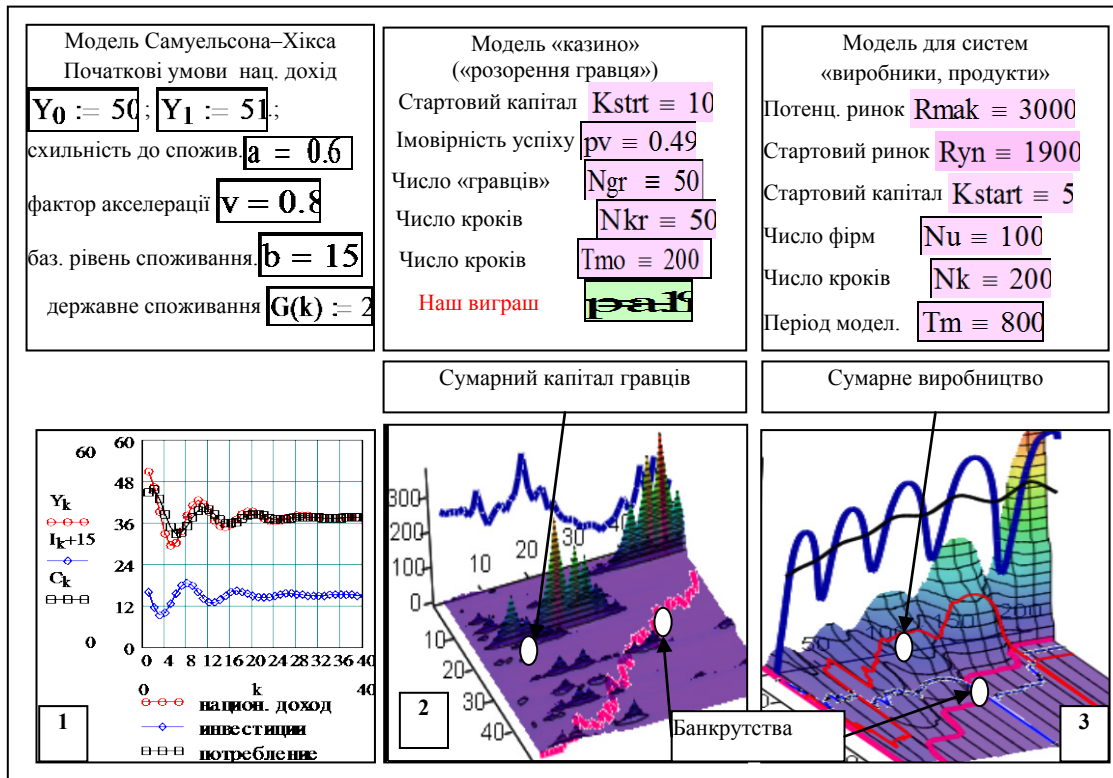


Рисунок 1.5 – Інформаційна технологія конструювання моделей: приклад предметного аналізу аналогів і прототипів

Сьогодні на базі коректних словесних моделей СТЕС можливо зібрати коректну робочу модель, що відтворює коливання, подібні «довгим хвилям Кондратьєва» (див. графік 3 для моделі 1 на рис. 1.5).

## 1.2 Базові задачі моделювання і оптимізації виробничих систем

Будь-яка працездатна система конструювання базується на бібліотеці базових елементів і попередніх розробок. Для задач розвитку виробничих систем в якості базових моделей за результатами аналізу літератури вибрано моделі Р. Беллмана: задачу розподілу, багатокрокову задачу розвитку, задачу постачання при невизначеності потреб. Далі наведено «предметний аналіз» цих моделей, результати якого дозволили створити нові моделі розвитку.

### 1.2.1 Задача розподілу

Р. Беллман назвав задачу розподілу ресурсу в багатокрокових процесах «задачею розподілу» [25]. Саме ця задача є у нього наскрізним прикладом для методу динамічного програмування. По суті це задача оптимізації розвитку виробничих систем, яка була досить повно досліджена 50 років тому Р. Беллманом і особливо актуальною стала сьогодні через підвищення темпів технічного прогресу.

**Постановка одновимірної задачі.** Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J(y) = \int_0^T F(x, y) dt, \quad (1.1)$$

де функції  $x(t), y(t)$  зв'язані диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} x(t) = G(x(t), y(t)), \quad x(0) = c > 0, \quad (1.2)$$

і на функцію  $y(t)$  накладено обмеження

$$0 \leq y \leq x. \quad (1.3)$$

Функції  $F(x, y)$  та  $G(x, y)$  вважаються заданими. За відсутності обмежень – це класична задача варіаційного числення, за наявності обмеження – це окремий випадок задачі Больца.



Розглядаючи розв'язання окремих випадків задачі можна побачити, що розв'язання може мати три інтервали («все в розвиток», «пропорційно», «все в накопичення»). Розглянемо логіку розв'язання узагальненої задачі розподілу. При виконанні певних «природних» умов розв'язання має такий вигляд:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) & \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1 & - \text{«все в розвиток»}; \\ 0 < y(t) < x(t) & \quad \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 & - \text{«ейлерова ділянка»}; \\ y(t) = 0 & \quad \text{при } t_2 \leq t \leq T & - \text{«все в накопичення»}. \end{aligned}$$

Припускаємо, що функції  $F(x, y)$  та  $G(x, y)$  задовольняють такі умови:

а) функції  $F$  та  $G$  належать до класу  $C^2$ , тобто мають неперервні частинні похідні другого порядку;

б) існують константи  $p, q, r$  такі, що  $p \cdot x < G(x, y) < q \cdot x + r$  при  $x > 0, 0 < y < x$ ;

в) функція  $G_y$ , тобто частинна похідна  $\frac{\partial G(x, y)}{\partial y}$ , набуває значення тільки одного знаку: або  $G_y > 0$ , або  $G_y < 0$  при усіх значеннях  $x, y$ , що задовольняють умови  $x > 0, 0 < y < x$ .

Умова б) означає, що на інтервалі  $(0, T)$  функція  $x(t)$  буде (в силу диференціального рівняння (1.2)) обмежена додатними константами

$$0 < m \leq x(t) \leq M. \quad (1.4)$$

**Постановка багатовимірної задачі.** Багатовимірна задача не створює принципово нових проблем крім чисто кількісної проблеми розмірності. Розглядаємо задачу визначення максимуму функціоналу

$$J = \int_0^T F(x(t), y(t)) dt, \quad (1.5)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  – вектор стану (темпи виробництва),  
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  – вектор управління.

Вектор-функції  $x(t), y(t)$  зв'язані системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}x_i = G_i(x(t), y(t)), x_i(0) = c_i > 0, i = 1..N \quad (1.6)$$

і на вектор-функцію управління  $y(t)$ -накладено обмеження

$$0 \leq y_i \leq x_i, i = 1..N. \quad (1.7)$$

Функції  $F(x, y)$  та  $G(x, y)$  вважаються заданими.

Розв'язання багатовимірної задачі в загальному випадку теж має ділянки «все в розвиток», «ейлерова ділянка», «все в накопичення» [24, 25]. Окремий випадок – задача Марковиця–Беллмана [26]. В даному випадку критерій і обмеження є адитивними функціями. Більшість актуальних практичних задач належать саме до цього підкласу задач розподілення.

В децентралізованій системі виробляються  $N$  видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ . Продукція може йти або в накопичення, або на збільшення виробничих потужностей. Задано рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \text{fin}_i(y_i(t)) = \text{fin}_i(xs(t) \cdot u_i),$$

де  $\text{fin}_i(y_i(t))$  – функція розвитку для  $i$ -го виробництва, що належить до класу невід'ємних функцій, що зростають не строго монотонно;  $xs(t) = \sum_{j=1}^N x_j(t)$  – сумарне виробництво в момент  $t$ ;  $0 \leq u_i(t) \leq 1$  – управління, відповідно, це частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей по  $i$ -му продукту.

Для управлінь виконується умова нормування (обмеження на управління):  $\sum_{j=1}^N u_j(t) + \text{unak}(t) = 1$ , де  $0 \leq \text{unak} \leq 1$  – частка ресурсів, що йде в накопичення. Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку – вектор-функцію  $uop(t)$ , що максимізує інтегральний критерій – сумарний накопичений випуск за плановий період  $T$

$$J_N = \int_0^T \left( \sum_{j=1}^N x_j(t) \right) \cdot \text{unak}(t) dt .$$

На відміну від більшості робіт з оптимізації того часу і сучасних Беллман не обмежувався випадком випуклих і гладких функцій  $F$  та  $G$ . Він отримав і проаналізував розв'язання задачі розподілення для випадків випуклих та невивуклих функцій і отримав загальні розв'язання задачі альтернативними методами – варіаційного числення і динамічного програмування. Беллман знайшов загальний метод розв'язання таких задач для випадку лінійних рівнянь динаміки виробничих потужностей. Оптимальні управління (стратегії) в цьому випадку є розривними – вони складаються з двох інтервалів – «все в розвиток», «все в накопичення». Складність рівнянь для визначення відповідних моментів переключення управління швидко зростає з ростом розмірності виробничої системи.

### 1.2.2 Багатокрокова задача розвитку

Розглянемо спочатку одновимірну (однопродуктову) задачу розподілу. Задано:

– диференціальне рівняння процесу розвитку виробництва

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11} \cdot y_1(t), a_{11} > 0; \quad (1.8)$$

– початкове значення темпу виробництва  $t = 0$ :  $x_1(0) = c_1$ ;

– критерій оптимізації (функціонал)

$$J_1 = \int_0^T (x(t) - y(t))dt; \quad (1.9)$$

– ціль оптимізації: максимум функціоналу (1.9);

– змінна управління  $y(t)$ , обмеження управління  $y(t) \leq x(t)$  (розвиток за рахунок власних поточних ресурсів).

Розв'язання задачі. Розв'яжемо диференціальне рівняння процесу відносно  $x$ :

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11} \cdot y_1(t); dx_1 = a_{11} \cdot y_1(t) \cdot dt; \text{ інтегруємо та отримуємо}$$

$$x_1(t) = c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1(t) \cdot dt. \quad (1.10)$$

Підставимо (1.10) у функціонал (1.9):

$$J_1 = \int_0^T \left( c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1(t_1) dt_1 - y_1(t) \right) \cdot dt, \quad (1.11)$$

де  $y_1(t)$  задовольняє умову:

$$0 \leq y_1(t) \leq c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1(t) dt. \quad (1.12)$$

Очевидно, права частина нерівності – це вираз для  $x_1$  (1.10). Змінюємо порядок інтегрування в (1.11) і отримуємо

$$J_1 = c_1 \cdot T + \int_0^T (a_{11} \cdot (T - t) - 1) \cdot y_1(t_1) \cdot dt_1. \quad (1.13)$$

Множник  $(a_{11} \cdot (T - t) - 1)$  в (1.13) – функція часу. За умови:  $t = 0$ , та  $a_{11} \cdot T > 1$ , ця функція спочатку є додатною, але в певний момент  $t = T_1$  стає меншою нуля. Неважко визначити момент переключення управління

$$a_{11} \cdot (T - T_1) - 1 = 0; \quad T_1 = \frac{a_{11} \cdot T - 1}{a_{11}}.$$

При заданих нами додаткових умовах відносно  $a_{11}$  і  $T$ , що є природними, функція  $y_1(t)$  повинна бути максимально можливою на інтервалі, де перший множник додатний, і нульовою, там де він від'ємний. Тобто, в момент часу  $T_1$  має місце «переключення» управління з стратегії «усе в розвиток виробництва» в стратегію «усе в накопичення». Записуємо вираз для оптимального управління

$$y_1(t) = \begin{cases} c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1(t) \cdot dt, & 0 \leq t \leq T_1; \\ 0, & T_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.14)$$

Отримаємо явний вираз для  $y(t)_1$ . Диференціюємо (1.14):

$$y_1(t) = c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1(t) \cdot dt; \quad \frac{d}{dt} y_1(t) = a_{11} \cdot y_1(t);$$

$$\frac{d}{dt} y_1(t) - a_{11} \cdot y_1(t) = 0.$$

Розв'язання цього рівняння  $y_1(t) = c_1 \cdot e^{a_{11}t}$  – до моменту переключення  $T_1$ . Після того, як оптимальне управління знайдено, його реалізація та моделювання процесів розвитку однопродуктової системи є тривіальними.

**Двовимірна задача Марковиця–Беллмана.** Розв'язання багатовимірних задач такого класу має ту ж структуру і властивості, але відповідно воно більш трудомістке і складне. Оцінимо вплив розмірності на конкретному прикладі двовимірної задачі.

Задано: – систему диференціальних рівнянь процесу розширення виробництва

$$\frac{d}{dt} x_1 = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2; \quad \frac{d}{dt} x_2 = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2, \quad (1.15)$$

– коефіцієнти якої задовольняють обмеження  $a_{ij} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2;$

– початкові значення темпів виробництва  $t = 0: x(0)_1 = c_1; x(0)_2 = c_2;$

– критерій оптимізації (функціонал)

$$J_2 = \int_0^T (z_1 + z_2) dt, \quad (1.16)$$

де  $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2;$  ціль оптимізації: максимум функціоналу (1.16); змінні управління  $y_1(t), y_2(t),$  обмеження управління  $y_1(t) \leq x_1(t), y_2(t) \leq y_2(t).$  Далі за замовчуванням записуємо  $x_1, y_1,$  замість  $x_1(t), y_1(t).$

Подаємо розв'язання системи диференціальних рівнянь процесу розвитку [25] (1.15). Інтегруємо і отримуємо:

$$x_i(t) = c_i + a_{i1} \cdot \int_0^t y_1(t) dt + a_{i2} \cdot \int_0^t y_2(t) dt, \quad i = 1, 2. \quad (1.17)$$

Підставимо (1.17) у функціонал (1.16):

$$J_2 = \int_0^T \left( c_1 + a_{11} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{12} \cdot \int_0^t y_2 dt - y_1 \right) dt \dots \\ + \int_0^T \left( c_2 + a_{21} \cdot \int_0^t y_1 dt + a_{22} \int_0^t y_2 dt - y_2 \right) dt, \quad (1.18)$$

де  $y(t)_i$  задовольняє умову

$$0 \leq y_i(t) \leq c_i + a_{i1} \cdot \int_0^t y_i(t) dt, \quad i=1,2. \quad (1.19)$$

Праві частини нерівностей (1.19) – це вирази (1.17) для  $x_1, x_2$ .

Змінюємо порядок інтегрування у (1.18) і отримуємо

$$J_2 = (c_1 + c_2) \cdot T \cdot \int_0^T [(a_{11} + a_{21})(T-t) - 1] \cdot y_1 dt + \int_0^T [(a_{12} + a_{22})(T-t) - 1] \cdot y_2 dt.$$

У цьому виразі множники  $[(a_{11} + a_{21})(T-t) - 1]$ ,  $[(a_{12} + a_{22})(T-t) - 1]$  є функціями часу, що не залежать від управління. Тому для максимізації функціоналу потрібно управління  $y_1$  та  $y_2$  вибирати так, щоб величина їх була максимально можливою, коли вирази у дужках додатні, і нульовими, коли – від’ємні. Таким чином, стратегія управління має бути такою: спочатку всі ресурси системи йдуть на розширення виробництва, після певних моментів  $T_1, T_2$  все вже йде у накопичення, а виробничі потужності залишаються постійними. Визначимо моменти переключення управління за допомогою символного блока розв’язання систем рівнянь.

*Given* – початок блока, вводимо систему рівнянь

$$(a_{11} + a_{21})(T - T_1) - 1 = 0; \quad (a_{12} + a_{22})(T - T_2) - 1 = 0;$$

– кінець блока, виводимо розв’язання у символному вигляді

$$Find(T_1, T_2) \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{(T \cdot a_{11} + T \cdot a_{21} - 1)}{(a_{11} + a_{21})} \\ \frac{(T \cdot a_{12} + T \cdot a_{22} - 1)}{(a_{12} + a_{22})} \end{array} \right], \quad T_1 = \frac{(a_{11} + a_{21}) \cdot T - 1}{a_{11} + a_{21}}, \\ T_2 = \frac{(a_{12} + a_{22}) \cdot T - 1}{a_{12} + a_{22}}. \quad (1.20)$$

За рахунок перестановки рівнянь можна зробити  $T2 > T1$ . В [25] доведено, існування моменту  $T3$ :  $T1 \leq T3 \leq T2$  переключення другого управління. Визначити аналітично цей момент для систем вище третього порядку майже неможливо. Однак для практики досить знання про інтервал для  $T3$ . Таким чином, максимум критерію за період часу  $T$  при заданих обмеженнях досягається при стратегії:

- накопичення першого продукту  $z_1 = 0$  при  $0 \leq t \leq T3$ ;
- накопичення другого продукту  $z_2 = 0$  при  $0 \leq t \leq T2$ ;
- витрати на розширення першого виробництва  $y_1 = 0$  при  $T3 \leq t \leq T$ ;
- витрати на розширення другого виробництва  $y_2 = 0$  при  $T2 \leq t \leq T$ .

У підсумку ми можемо побудувати систему оптимального управління, де на кожному кроці процесу знаходяться  $y_1$  та  $y_2$ , що забезпечують максимум критерію (1.19). На рис. 1.6 подано приклад результатів моделювання.

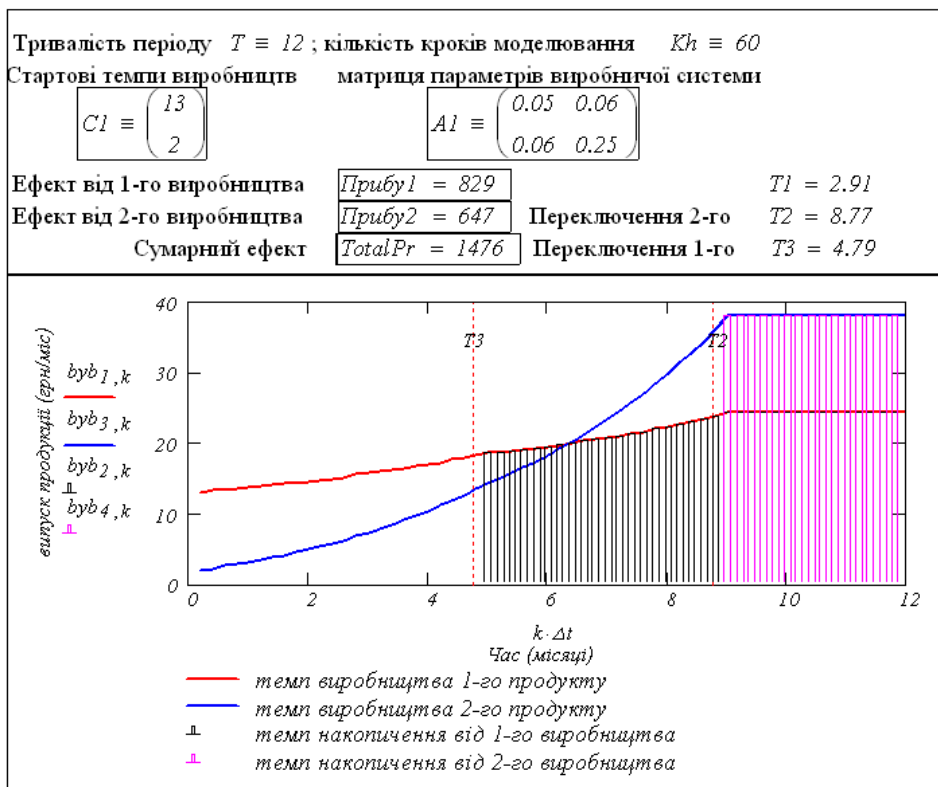


Рисунок 1.6 – Моделювання оптимального процесу розвитку виробничої системи

За результатами дослідження моделі розвитку (1.15)–(1.20) розроблено узагальнену модель для систем довільного порядку з довільними функціями розвитку і виробництва, з урахуванням кредитів і обмежень потреб в продукті виробництва. Для оптимізації вибрано метод принципу максимуму.

### 1.2.3 Задачі обміну ресурсами

Сучасні виробничі системи працюють в специфічних режимах, зміст яких – суттєва залежність конкретного виробника від потреб споживачів в продукті і дій інших виробників. Це вимагає розширення границь виробничої системи, відповідного перевизначення самого поняття «виробнича система», і потім побудови нових математичних моделей. Розширення границь об'єкта «виробнича система» не є формальною процедурою, а обумовлена також реальними змінами в структурі виробничих організацій. Зокрема, сьогодні в певних галузях мають місце тенденції до вертикальної інтеграції – включення до складу виробничої системи підрозділів постачання продукції, обслуговування споживачів, постачальників сировини і комплектуючих. Процеси взаємодії між виробниками, постачальниками, користувачами описуються узагальненими математичними моделями обміну – продуктами, ресурсами, інформацією. Загальні особливості цих моделей – суттєва нелінійність, наявність декількох станів рівноваги, залежність перехідних процесів, стійкості від початкових умов.

**Задача балансу потреб і обсягів виробництва.** Були реалізовані і досліджені відомі моделі обміну ресурсами, зроблено власні модифікації цих моделей. Результати досліджень увійшли в навчальні посібники [35–40]. Розглянемо задачі управління розподіленими, нелінійними дискретними системами класу «потреби-випуск». Ціль моделювання – визначення стану рівноваги, ціль управління – утримання системи в стані рівноваги з малими помилками і малими витратами ресурсів на управління.

**Постановка задачі, інтерпретації.** Подаємо словесний опис елементарної задачі класу «потреби–випуск». В системі є два елементи  $As$ ,  $Ad$ , один з яких виробляє певний ресурс, другий – використовує цей ресурс. Ресурс характеризується «ціною»  $p$ , яка залежить від стану системи. Обсяги обміну ресурсами визначаються функціями  $Fd(p)$ ,  $Fs(p)$  ( $d$  – demand,  $s$  – supply). Вважаємо, що виробництво одразу встановлюється на рівні потреби, що потреби при зміні ціни змінюються згідно з функцією «ціна–потреби». Це ідеалізація – зміна потреби і випуску проходить не миттєво, а з певною інерційністю та запізненням, що приводить до коливань цін, потреби і випуску і, навіть, до нестійкості системи обміну.

У [190, 197, 200] розглядаються спрощені, лінійні моделі «виробництво–потреби». Поставимо задачу побудови узагальненої моделі



«виробництво – потреби»: для довільних функцій потреби і виробництва; з урахуванням запізнень; з урахуванням випадкових збурень; з урахуванням ажіотажних потреб.

На рис. 1.7 подано приклад перехідного процесу встановлення рівноваги потреби і випуску. Ключові параметри системи – крок оновлення цін  $Dt$  та «коефіцієнт підсилення»  $Kc$  – величина корекції ціни на кожному кроці процесу.

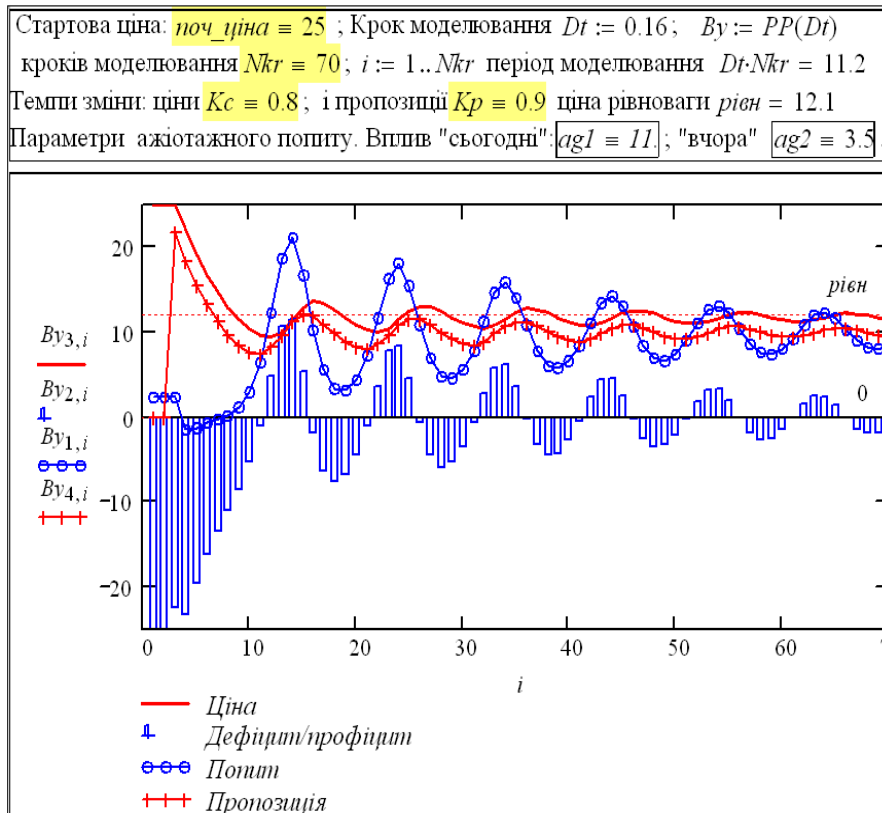


Рисунок 1.7 – Процеси встановлення рівноваги в системі «потреби-випуск» з урахуванням інерційності та ажіотажних ефектів»

Неважко побачити, що ми маємо типову задачу аналізу і синтезу нелінійної динамічної системи методами теорії автоматичного управління. Для нелінійних систем такого класу звичайно використовують методи фазового простору. Можемо бачити, що запізнення реакції та ефекти ажіотажу та раціональної поведінки споживачів дестабілізують систему. Це відомо, але моделювання дає інструмент для кількісної оцінки усталених значень параметрів процесу.

**Задачі обміну з симетричною інформаційною структурою.** Спеціалісти з фізики, біології, екології, різних галузей техніки можуть знайти в своїй професійній області задачі, що досить адекватно відображуються моделями обміну узагальненими ресурсами. Тому «виро-

бники», «споживачі», «продукти», «ресурси» – звичні етикетки для абстрактних понять, що можуть мати різні інтерпретації в різних галузях науки і техніки.

Наприклад, обчислювальну мережу авіаносця можна побудувати за принципами децентралізованої системи з «ринком» задач, що потрібно виконувати в мережі. Елементи обчислювальної мережі «купають» і «продають» задачі, «обмінюються» задачами. Така структура використана для забезпечення відмовостійкості системи. В [10, 11, 33, 35, 41, 42, 45, 61, 63, 74, 90, 91] розглянуто задачу моделювання відмовостійкої автоматизованої системи управління виробництвом на основі концепції обміну ресурсами між елементами обчислювальної мережі.

**Моделі натурального обміну.** Зазвичай моделі обміну ресурсами між технічними системами зводяться до введення цін, попиту, пропозиції, тобто категорій економіки. Натуральний обмін вважається давно минулим, пройденим етапом. Однак глобалізація і екологізація виробництв вимагають використання і розробки моделей безпосереднього обміну ресурсами.

Розглянемо приклад моделювання і дослідження системи «натурального обміну». Ця модель [195] може мати багато інтерпретацій. Нас цікавить математична структура і властивості розв'язання для системи з таким механізмом обміну. В сучасних умовах натуральний обмін є більш природним і прогресивним ніж звичний грошовий обмін, що вже став причиною катастрофічних нестабільностей глобалізованого світу.

Словесна постановка задачі: елементи на кожному періоді виробляють продукти А і Б в кількостях відповідно  $x_1$  і  $x_2$ . Вони обмінюються продуктами за правилом: кожний віддає іншому  $q$ -ту частку свого продукту ( $0 < q < 1$ ). Після обміну вони матимуть набори продуктів:  $(1-q) \cdot x$ ,  $q \cdot y$  і  $(1-q) \cdot y$ ,  $q \cdot x$ . У кожного виробника залишається частка  $p = 1 - q$  свого продукту, тоді отримуємо такі вирази для часток продуктів, що їх отримують перший і другий виробники  $p \cdot x$ ,  $q \cdot y$  і  $p \cdot y$ ,  $q \cdot x$ . Треба розробити модель для дослідження динаміки і статички процесів обміну.

Диференціальні рівняння темпів виробництва задані такими [159]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{p}{p \cdot x_1 + q \cdot x_2 + 1} - \frac{p}{2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{p}{q \cdot x_1 + p \cdot x_2 + 1} - \frac{p}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Отримано робочу модель в формі, що відповідає стандартам мови математики. Для проведення досліджень і об'єднання робочих моделей в більш складні системи розроблено робочу модель в формі програмного модуля або функції користувача, що бере певні вхідні параметри і повертає те, що обумовлено цільовим призначенням програми. На рис. 1.8 подано приклад дослідження нелінійної системи обміну для чотирьох наборів вхідних даних:

- пропорції обміну  $pn: = 0,6$ ;  $qn: = 1 - p$ ;  $pm: = 0,14$ ;  $qm: = 1 - p$ ;
- початкові стани  $xn_1: = 3,5$ ;  $xn_2: = 3$ ;  $xm_1: = 3$ ;  $xm_2: = 10$ .

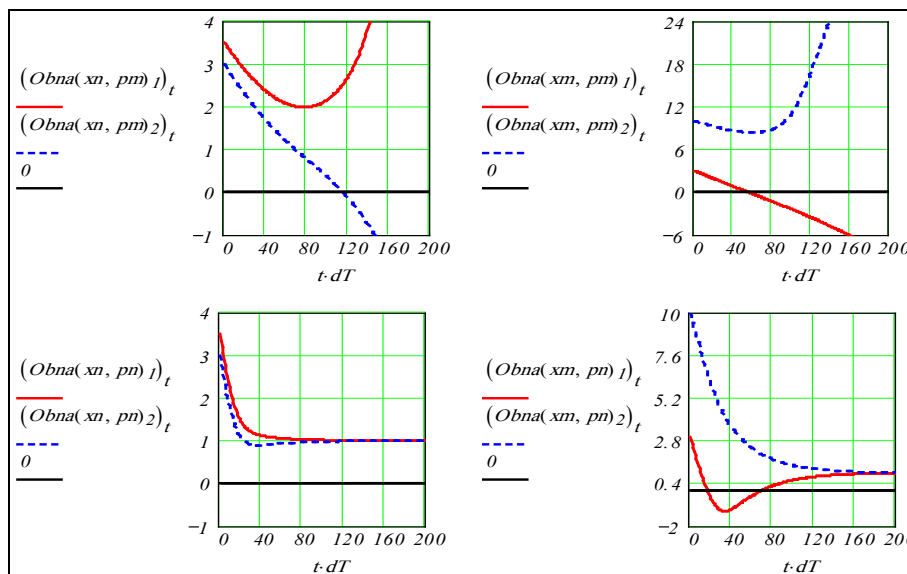


Рисунок 1.8 – Аналіз впливу початкових умов на процеси в системі з «натуральним» обміном

Ця найпростіша за механізмом розподілу і за складністю реалізації система має досить складну, іноді антиінтуїтивну поведінку:

- при певних початкових умовах, один з елементів припиняє виробництво;
- при певних пропорціях розподілу система приходиться до стану рівноваги.

Ця абстрактна модель – основа для задач обміну, де поняття ціни не має інтерпретації, а вирішальними факторами можуть бути цінність, витрати, накопичення і трансформації ресурсів. Одна з інтерпретацій цієї задачі: країни А і Б обмінюють нафту на пепсіколу. Дослідити результати такого обміну. Сьогодні актуальними є задачі імпортозаміщення, експортнезалежності, управління комплектацією виробництва і управління конфігурацією продукту виробництва.

**Методи оптимізації на базі принципів ринкового обміну.** Розглянемо задачі управління розподіленими, нелінійними дискретними системами класу «обмін ресурсами». Розподілені системи з обміном ресурсами – це певний клас задач теорій оптимізації і управління, що давно завоював право на існування як клас абстрактних математичних моделей і задач. Як і всякий фундаментальний напрямок, абстрактні задачі обміну ресурсами, має численні ефективні і ефектні практичні застосування. Призначення цих моделей – бути базою для побудови методів оптимізації складних розподілених систем.

**Постановка базової задачі обміну ресурсами.** Розглядається система з  $M$  елементів, що обмінюються за певними правилами деякими ресурсами  $N$  видів. Кожен елемент має початковий запас ресурсів  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ , де  $y$  –  $N$ -вимірний вектор. На кожному кроці функціонування системи кожен елемент намагається поміняти вектор запасів  $y$  на  $x$  так, щоб максимізувати свою функцію корисності  $uk(x)$  за умови, що ціна бажаного набору (вектору) ресурсів  $x$  в поточних цінах дорівнює ціні початкового набору  $y$ .

Функція корисності  $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$  – монотонно зростаюча, додатна функція від усіх  $N$  аргументів – кількостей відповідних видів продуктів чи ресурсів  $x_i$ . Функції корисності є математичною моделлю для ситуації обміну продуктів: елемент має вектор ресурсів  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  і бажає поміняти на вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , такий що максимізує функцію корисності  $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$  при обмеженні

$$p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2 + \dots + p_N \cdot y_N = Cap, \quad (1.22)$$

де  $(p_1, p_2, \dots, p_N)$  – «вектор цін» – змінних, що формуються за певними процедурами.

В математичному аспекті кожний елемент розв'язує задачу знаходження максимуму функції  $N$  змінних при «бюджетному обмеженні». В більшості наукових робіт функції корисності апроксимують випуклими (вгору) функціями, мультиплікативними, або адитивними:

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}; \quad u_2(x_1, x_2) = \alpha_1 \cdot \ln(x_1) + \alpha_2 \cdot \ln(x_2), \quad (1.23)$$

Як було показано В. Опойцевим, І. Екландом [239, 281], суттєвим для задач обміну є топологічний характер функції корисності, яка певним чином фіксує відношення переваги. Деталізуємо тепер процедури, що виконуються в системі з обміном ресурсами після того, як усі елементи визначили бажані вектори ресурсу  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Назвемо

їх «заявками». Після цього визначаються сума наявних в системі ресурсів  $Y$ , та сума заявок  $X$ :

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N); \quad Y_j = \sum_{i=1}^M y_i; \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_N); \quad X_j = \sum_{i=1}^M x_i.$$

Основне положення для систем з обміном ресурсами в тому, що швидкість зміни вектора «цін»  $p$  на види ресурсів пропорційна різниці  $Z = X - Y$ . Ця різниця може бути і додатною і від'ємною. Назвемо її, незалежно від знаку, – «дефіцит». Класичне рівняння для задачі встановлення цін в системі обміну записується так:

$$\frac{dp}{dt} = Z(p), \quad (1.24)$$

де  $p$  – вектор цін;  $Z(p)$  – вектор дефіцитів.

Таким чином результатом подання заявок є зміни у векторі цін згідно з (1.24). На кожному кроці процесу елементи коректують свої заявки з урахуванням зміни цін, а саме, зменшують кількість тих ресурсів, що подорожчали, і навпаки. Дефіцит повинен зменшуватись і ціни прийдуть до стану рівноваги. Обсяг заявок стане рівним реальній кількості ресурсів і по досягненню такого стану рівноваги виконується реальний перерозподіл ресурсів згідно з останніми заявками. В цьому стані усі елементи одночасно досягають максимуму своїх функцій корисності. Звичайно система в цілому має певний критерій оптимальності (цільову функцію) і при виконанні певних умов сумісності (що розглядаються далі) в стані рівноваги досягається також екстремум критерію оптимальності в цілому.

Тобто задача обміну ресурсами має іншу інтерпретацію – це алгоритм і процес пошуку екстремуму функції багатьох змінних:

знайти значення екстремуму функції  $N \times M$  змінних  $F_{oo}(MX)$ , де  $MX$  – матриця з  $M$  стовпців, кожний з яких вектор з  $N$  компонентів, що трактується як ресурси, що виділені певному елементу системи, при певному початковому розподілі ресурсів.

Головна відмінність такого підходу до оптимізації від традиційних методів нелінійного програмування в тому, що ми паралельно розв'язуємо  $M$  задач оптимізації функцій корисності від  $N$  змінних. Зрозуміло, що знаходження екстремумів для  $M$  функцій від  $N$  змінних, набагато легша задача, ніж безпосереднє знаходження екстремуму функції  $N \times M$  змінних. Перша головна перевага методу оптимізації на

базі обміну ресурсами – узгодженість цього методу з логікою і структурою великої кількості важливих практичних задач. Друга перевага – самооптимізація: реальні елементи реальної системи, якщо вони функціонують за певними правилами, через певний час придуть у стан, що буде оптимальним для кожного елемента і системи в цілому [239]. Третя перевага методу – ефективне використання багатопроцесорних систем, можливість розподілу задачі по комп'ютерній мережі.

**Розробка програми моделювання процесів обміну з довільними цільовими функціями корисності.** В даній роботі реалізовані певні відомі моделі в середовищах пакетів для моделювання, проведені дослідження на цих робочих моделях. Розглянуті моделі обміну отримані за безкомп'ютерними технологіями. Для більшості випадків аналітичне розв'язання для задачі моделювання систем з обміном не існує. Узагальнимо розглянуті моделі – зробимо їх незалежними від виду функцій корисності елементів, розширимо їх для урахування запізнь, виробництва, невизначеностей та ін. Розробимо інтерфейси для проведення досліджень і проведемо дослідження, щоб потім свідомо відмовитись від моделей такого класу.

**Дворівнева модель обміну.** Реальні зв'язки між виробничими системами звичайно мають складну структуру, що частково є відображенням регіональної та глобальної структури виробництва – вертикальну та горизонтальну інтеграцію/декомпозицію. Розглянемо простий приклад побудови моделі системи з дворівневим обміном [218].

Система складається (рис. 1.9) з поставника певного первинного ресурсу, двох підприємств, що виробляють два види продуктів для кінцевих споживачів, що розподіляють свій власний ресурс для обміну так, щоб максимізувати власні функції корисності. Обмін ведеться через систему «аукціон».

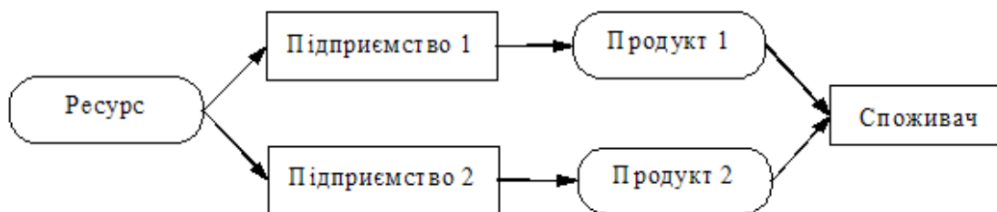


Рисунок 1.9 – Схема матеріальних потоків в системі

Сформулюємо проблему оптимального розподілу ресурсу для такої системи. Умова для відношення попиту і пропозиції продукції має вигляд

$$Ys_i = Fi(Ld_i) \geq Yd_i; \quad i = 1, 2.$$

Умова для попиту і пропозиції продукції ресурсів

$$Ld_1 + Ld_2 \leq Ls.$$

Функція корисності, яку максимізує споживач (покупець),

$$fko(Yd_1, Yd_2) \rightarrow \max.$$

В цих виразах прийняті такі позначення:  $Ys_i$  – обсяг пропозиції (виробництва) по  $i$ -у продукту;  $Yd_i$  – обсяг попиту (з боку споживача) на  $i$ -й продукт;  $Ls$  – пропозиція ресурсу, яку поки вважаємо постійною;  $Ld_i$  – обсяг попиту на ресурс від  $i$ -го виробництва (підприємства);  $Fi(Ld_i)$  – виробнича функція  $i$ -го підприємства;  $fko(Yd_1, Yd_2)$  – функція корисності споживача.

На рис. 1.10 подано блок введення і графіки перехідних процесів.

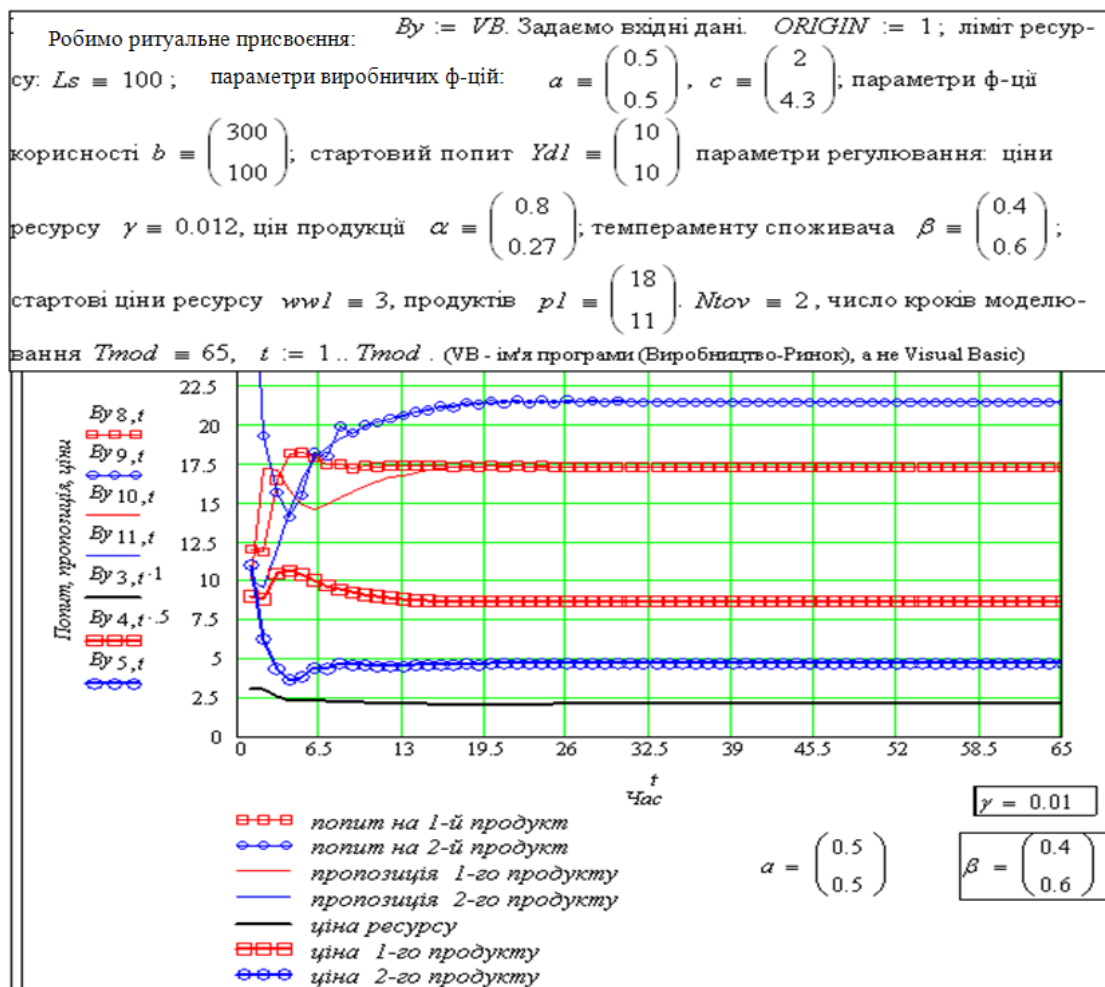


Рисунок 1.10 – Перехідний процес в дворівневій системі обміну. Стійкий процес

При вибраних значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  маємо стійкі процеси встановлення цін, баланси попиту і пропозиції, розподіл ресурсів між виробництвами. Фактично ми маємо нелінійну імпульсну екстремальну двоконтурну систему автоматичного регулювання цін сировини і продуктів із умови балансу попиту і пропозиції по всіх продуктах в системі: сировині, продукту 1, продукту 2 (див. рис. 1.10). Вибір параметрів системи регулювання – це окрема задача синтезу регулятора. Стійкі процеси на рис. 1.10 суттєво змінюються при незначній зміні параметрів регулятора (рис. 1.11).

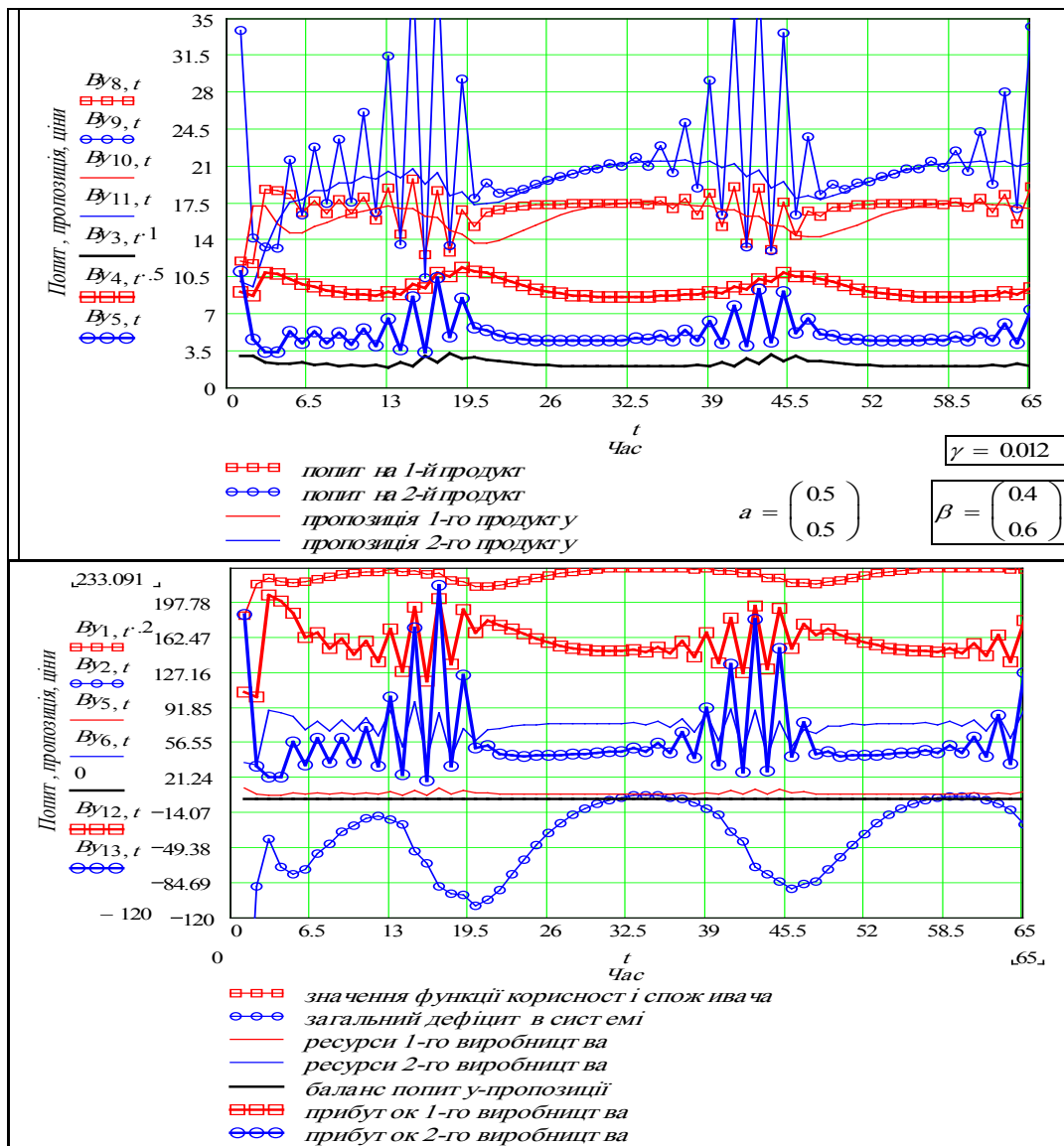


Рисунок 1.11 – Приклади періодично нестійких перехідних процесів в дворівневій системі обміну



В системі виникає складний режим з ділянками відносної стабільності і нелінійними коливаннями великої амплітуди. В [218] та інших подібних джерелах виникнення нестійкості при малих змінах параметрів не згадується. У підсумку, розробка робочої математичної моделі і проведення на ній більш широких досліджень, ніж в першоджерелі, привела до створення нового «генератора результатів», задач і понять. Таким чином модель в ситуаціях інноваційних проектів стає джерелом нових знань про властивості майбутнього об'єкта. Бачимо певну подібність форми коливань загального дефіциту в системі до «довгих хвиль Кондратьєва», особливість яких – довгий період стабільності певної змінної і короткий період її суттєвого падіння, обумовлений модернізаціями виробництва. Розглянуті приклади «предметних» досліджень – незначна частка реалізацій певних базових моделей, що увійшли до монографій [33, 34] і навчальних посібників [35–40]. Можливості таких робочих моделей виходять за рамки конкретного призначення – це елементи інтеграції навчання, наукових досліджень і практики, що аналізуються в [202, 203, 206, 207].

### **1.3 Узагальнення на рівні теоретико-множинних моделей**

В попередніх підрозділах ми розглянули типові задачі побудови моделей і моделювання для розподілених виробничих систем. Особливості відібраних задач в тому, що вони всі були реалізовані в середовищах математичних пакетів і доведені до кінцевих результатів – процесів функціонування і розвитку.

Виділимо, класифікуємо і узагальнимо постановки задач моделювання. Почнемо з найбільш загальних і найменш конструктивних – теоретико-множинних моделей. Ці моделі – перший етап структурування системи [155–158, 175, 228–230, 239, 244]. Саме на цьому етапі можна побачити спільне в задачах оптимізації процесів в системі при невизначеностях, відмовах і в номінальних умовах. Сьогодні в техніці задачі забезпечення ефективності в номінальних умовах розділені на дві задачі, що розв'язуються послідовно і окремо: спочатку розробка системи оптимальної для номінальних умов, потім – забезпечення надійності вже розробленої технічної системи. Така декомпозиція задач розробки системи. Однак сьогодні не існує завершених моделей проектування одночасно ефективною і надійною системи. Для найбільш загаль-

ного опису проблеми використовуватимемо таку систему абстрактних відношень [32, 263, 264]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } S \subset V \times U \times Y \times Y, \\ \text{б) } P \subset Y \times W \times U, \\ \text{в) } F \subset U \times Y \times J, \\ \text{г) } G \subset K \times J \times I, \\ \text{д) } T \subset V \times V, \\ \text{е) } D \subset K \times K, \\ \text{ж) } R \subset I \times I, \end{array} \right. \quad (1.25)$$

де відповідні відношення стосовно вирішуваної проблеми інтерпретуються як відношення: а) об'єкта  $S$  з входами: управлінням  $U$ , збуренням  $V$  і виходом (станом)  $Y$ ; б) регулятора  $P$  з входами  $Y$  і  $W$  та виходом  $U$ ; в) критеріальної оцінки  $F$  з входами  $U$  і  $Y$  та виходом  $J$  ( $J$  – множина функціональних критеріальних оцінок або простір критеріальних станів); г)  $G$  агрегування з входами  $K$  та  $J$  ( $J$  – множина узагальнених вагових параметрів) і виходом  $I$ ,  $I$  – множина агрегованих критеріальних оцінок (станів), потрібних для комплексної характеристики системи; д) та е) специфікації входів – множин  $V$  і  $K$  відповідно – припустимих; ж) відношення  $R$  глобальної цілеспрямованості або глобальної задовільності системи.

Для початкової класифікації ситуацій будемо вважати, що змінні  $Y$ ,  $U$ ,  $V$  можуть бути доступними, або недоступними для безпосереднього вимірювання (спостереження), і відношення  $S$ ,  $P$ ,  $F$  можуть бути відомими ( $F$  – математична модель (ММ) збурень) або невідомими. Тоді в інформаційному аспекті проблему управління виробничою системою можна подати двома наборами: а) змінних:  $Yn \in Y$ ;  $Un \in U$ ;  $Vn \in V$ ; б) відношень (математичних моделей)  $S$ ,  $P$ ,  $F$  де  $Y$ ,  $U$ ,  $V$  – множини станів об'єкта, управлінь і збурень відповідно;  $S$ ,  $P$ ,  $F$  – математичні моделі відповідно об'єкта, регулятора, збурень. Таким чином, подання системи (1.25) породжує функціональну декомпозицію задачі побудови системи моделей функціонування керованої і збурюваної виробничих систем. Декомпозиція традиційно розглядається як засіб спрощення математичних моделей, для забезпечення можливості застосування розвинених методів аналізу і синтезу лінійних динаміч-

них систем. Декомпозиція заснована на розбитті розширеного простору стану  $G \subset X \times U \times T$  початкової ММ системи

$$\dot{\bar{X}} = f(t, \bar{x}, \bar{u}), t \in T; \bar{u} \in U; \bar{x} \in X$$

на підобласті  $G_1, G_2, \dots, G_1 = X_1 \times U_1 \times T_1$  в межах яких об'єкт може бути представлений лінійною нестационарною  $\Delta \bar{x}_1 + B(t, \bar{x}_0, \bar{u}_0) \cdot \Delta \bar{u}$  або лінійною з параметрами, що лінійно змінюються в часі, або лінійною стаціонарною ММ:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\bar{X}}_1 &= A(t, x_0, u_0) \cdot \Delta \bar{X}_1 + B(t, x_0, u_0) \cdot \Delta U; \\ \Delta \dot{\bar{X}}_2 &= A(t, x_0, u_0) \cdot \Delta \bar{X}_2 + B(t, x_0, u_0) \cdot \Delta U + \\ &\quad + \frac{\partial A}{\partial T} \Big|_{t_0, x_0, u_0} \cdot \Delta t \cdot \Delta \bar{X}_2 + \frac{\partial B}{\partial T} \Big|_{t_0, x_0, u_0} \cdot \Delta t \cdot \Delta U; \\ \Delta \dot{\bar{X}}_3 &= A \cdot \Delta \bar{X}_3 + B \cdot \Delta \bar{U}; \end{aligned} \right\}$$

де  $x_0, u_0, t_0$  – «центри» областей визначення відповідних моделей;  $\Delta \bar{U}, \Delta \bar{X}$  – малі відхилення керованих змінних, що управляють;  $\Delta t$  – інтервал часу, в межах якого зберігається лінійність зміни параметрів лінеаризованої ММ.

Задача ідентифікації реального об'єкта зводиться до добре відпрацьованих задач ідентифікації лінійних моделей в їх областях визначення  $G_1, G_2, \dots$ . На жаль, такий підхід може бути застосований тільки до «гладких» динамічних систем [230], тоді як для реальних об'єктів характерні дискретність, негрубість, невишуклість і негладкість характеристик. Найбільш зручними в сенсі адаптації структури моделей по входу-виходу об'єкта є ортогональні моделі:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot W_i(p) \cdot U(t); p = \frac{d}{dt}.$$

У них невідомі параметри  $\beta_i$  входять лінійно, а оператори  $W_i(p)$  перетворюють вхідний сигнал  $U(t)$  у систему ортогональних функцій  $\varphi_i(t) = W_i(p) \cdot U(t)$ . В залежності від інтервалу  $T$ , ваги  $\omega_j(t)$ , з яким ортогональні функції  $\varphi_i(t)$ , тобто

$$\int_0^t \omega_j(t) \cdot \varphi_i(t) dt = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ C, i = j, \end{cases}$$

розрізняють різні оператори  $W_i(p)$ . У роботі [228] детально розглядається проблема ідентифікації як проблема побудови адекватних ММ об'єкта шляхом агрегування інформації, що знаходиться в часткових і спрощених моделях. Причому, розглядаються моделі двох типів, що відображають: а) функціонування частин системи (функціональна декомпозиція); б) різні «проекції» функціонування системи («стратифікаційна» декомпозиція).

Характерна особливість сучасного етапу розвитку системно-теоретичних методів аналізу і синтезу складних систем – глибокий аналіз раніше інтуїтивно ясних понять розбиття системи на частини. Порівняно новий результат – обґрунтування редукційної схеми [32, 46]. При такому спрощенні відношення спрощення породжує ММ об'єкта тієї ж природи, що і початкова. При декомпозиційному спрощенні породжуються моделі, що описують зв'язки тільки для підмножин змінних і параметрів. Термін декомпозиція вживається в різних сенсах: у вузькому, як розбиття системи на підсистеми з просторами станів, що є підпросторами повного простору станів початкової моделі; в широкому, як деяка процедура породження множини моделей, пов'язаних з початковою моделлю [46] деяким відношенням, що задовольняє певні вимоги. Критерієм ефективності для декомпозиції у вузькому сенсі є міра об'єму зв'язків між підсистемами. У Месаровича змістовно і формалізовано розглянуті структури «страт», «шарів», «ешелонів» [230], дано доведення теореми про декомпозиції на 30 сторінках [231]. У змістовному плані М. Месарович під декомпозицією розумів розв'язання такої проблеми: для цієї глобальної задачі знайти задачі, які могли б бути поставлені перед вищим і нижчими вирішальними елементами так, щоб виконувався постулат сумісності. Проблема декомпозиції зводилася до підпроблеми: синтезу координуючого елемента і відшукування самої процедури координації. Не існує загальних регулярних методів і для генерації декомпозицій з необхідними властивостями. Тому пошук «хороших» декомпозицій для систем, задач, проблем відноситься до логіко-евристичних етапів науково-інженерних досліджень, що тільки частково формалізуються.

## 1.4 Вибір структури системи моделей функціонування та розвитку виробничих систем

Підведемо підсумок виконаному аналізу аналогів і прототипів. Дана робота базується на великій кількості робочих моделей, реалізованих в середовищах математичних пакетів (VisSim, SimuLink, Mathcad і ін.). Підхід на базі реалізації і дослідження моделей і методів, прототипів в середовищах пакетів для моделювання, дозволив не тільки об'єктивно оцінити досліджувані моделі, але і розробити нові модифікації цих моделей. Виявилось, що математичні моделі з монографій Р. Беллмана безпроблемно реалізуються. Наприклад, модель управління запасами при невизначеності [24].

За результатами аналізу літератури побудована (рис. 1.12) класифікація моделей функціонування і розвитку виробничих систем.

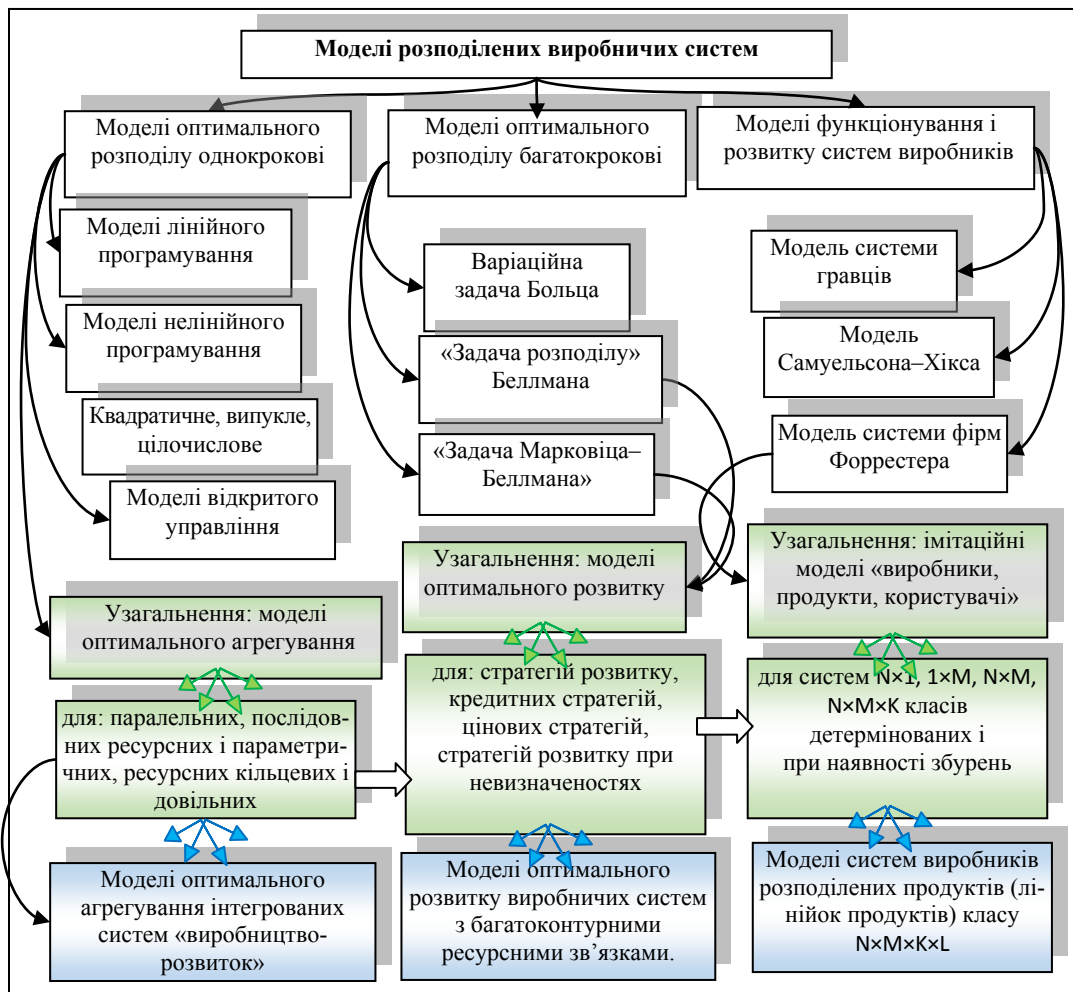


Рисунок 1.12 – Класифікація моделей розподілених виробничих систем

Це, в свою чергу, дозволило вибрати структуру системи моделей і конкретизувати вибір наукових і практичних напрямків, що досліджуються в наступних розділах. Існує велика кількість класифікацій математичних моделей виробничих систем. За основу класифікації взято концепцію Беллмана – «математичні моделі виробництва і бізнесу – засоби підтримки прийняття управлінських рішень». Тому моделі поділені на три класи – однокрокові моделі, багатокрокові моделі виробничої системи і моделі системи виробників певного сегмента виробництва.

Моделі трьох класів розділені на три рівні – класичні моделі, узагальнені моделі, комплексні робочі моделі для вирішення актуальних задач функціонування і розвитку виробничих систем. Приклади актуальних задач практики виробництва: оптимально агреговані моделі «виробництво, розвиток», «виробництво, логістика», екологізоване виробництво з ресурсними зворотними зв'язками», «виробництво розподілених (лінійок, модельних рядів) продуктів».

#### **1.4.1 Вибір базової структури і границь об'єкта**

Будь-яка модель призначена для адекватного відображення суттєвих для дослідника властивостей. Для даної роботи суттєві властивості – це перетворення ресурс – продукт в технологічних елементах, ресурсні та інформаційні зв'язки між технологічними елементами. Результати аналізу і вибору структури подані на рис. 1.13. Підсистеми виробничої системи впорядковані за трьома координатами: продукт, територіальний підрозділ, етап технологічного процесу. Місце елемента в системі визначається трьома індексами. Вибрана структура ієрархічна. Розширюємо границі виробничої системи – включаємо до неї підсистеми розвитку і освоєння з такою ж структурою (див. середину рис. 1.13). В нижній частині рис. 1.13 подано ще одне розширення меж виробничої системи – включаємо її в систему виробників певного сегмента виробництва. Проведена формалізація об'єкта моделювання відображує сучасні реалії глобалізованого, високотехнологічного і динамічного виробництва, зокрема, інтеграцію виробничої системи і користувачів. Система користувачів складається з постійних (Constsumer), професійних (Prosumer) та некластеризованих (Consumer) користувачів.

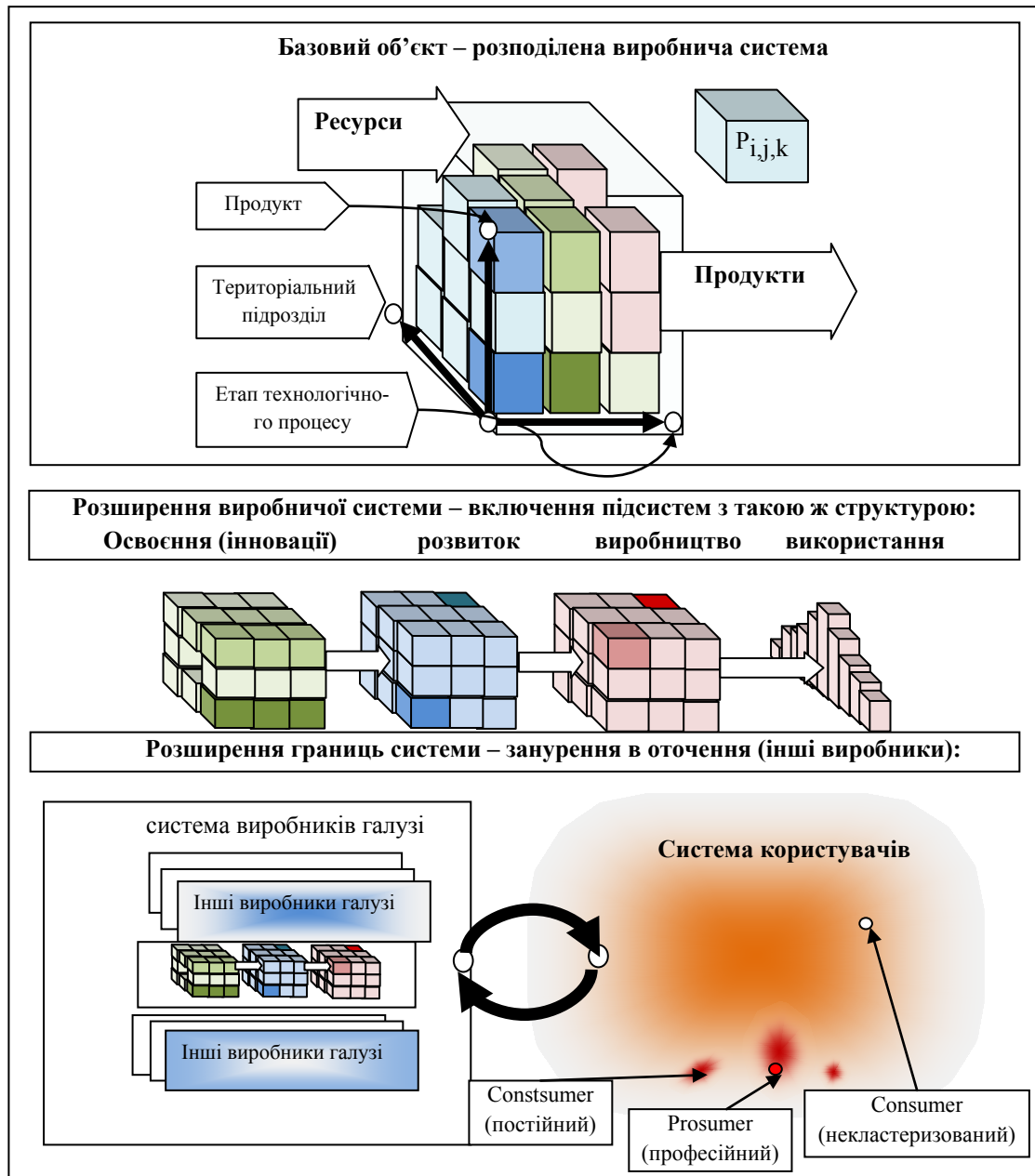


Рисунок 1.13 – Вибір структури і границь об'єкта

### 1.4.2 Вибір структури системи моделей виробництва

Вибір структури і границь об'єкта дозволяє зробити такий крок – вибрати структуру для системи моделей об'єкта (рис. 1.14).

Відповідно до методології Р. Беллмана, Дж. Форрестера, М. Пешеля описуємо об'єкт системою моделей і методів. Базова модель виробничого елемента – тривимірна структура. Кожний елемент структури результат застосування послідовності декомпозицій – структурної, функціональної, редукційної.

Зауваження: тривимірні структури на рис. 1.13 та 1.14 – різні:

- в першій «координати»: продукт, підрозділ, етап техпроцесу;
- в другій: структурний клас моделі, функція, властивість відображена моделлю, рівень редукції моделі.

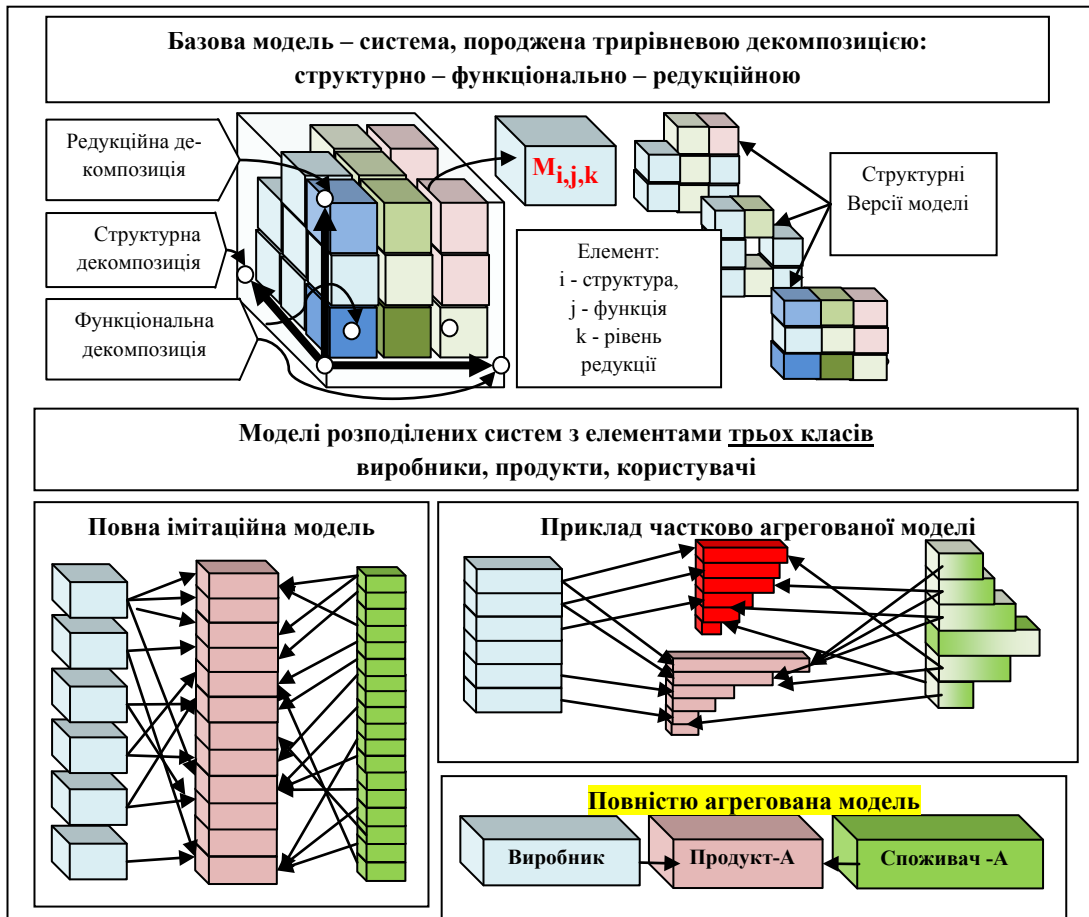


Рисунок 1.14 – Вибір структури системи моделей об'єкта

У даній роботі досліджуються імітаційні моделі з різними рівнями агрегування: з імітацією кожного елемента; частково агреговані, агреговані. Вибір такої структури обумовлює і конкретизує відповідні задачі дослідження. Вибрані структура об'єкта моделювання та структура моделі об'єкта без створення ефективних методів агрегування часткових моделей в єдину еквівалентну модель і дезагрегування єдиної моделі в систему субмоделей будуть лише неконструктивними абстракціями.

Головні фактори підвищення ефективності розробки моделей: суттєве скорочення термінів розробки нових моделей для нових задач, підвищення адекватності моделей, зменшення ризиків розвитку. Проведений аналіз сучасних розробок показав зміну відносин в парі



«об’єкт моделювання – математична модель об’єкта». Ситуації, коли одночасно створюються об’єкт і модель мало досліджені в науці. Проведений пошук показав відсутність прямих аналогів наукових досліджень за вибраними напрямками роботи. Відповідно до практики виділено моделі функціонування, розвитку; функціонування і розвитку в активному оточенні інших виробників та користувачів (рис. 1.15).

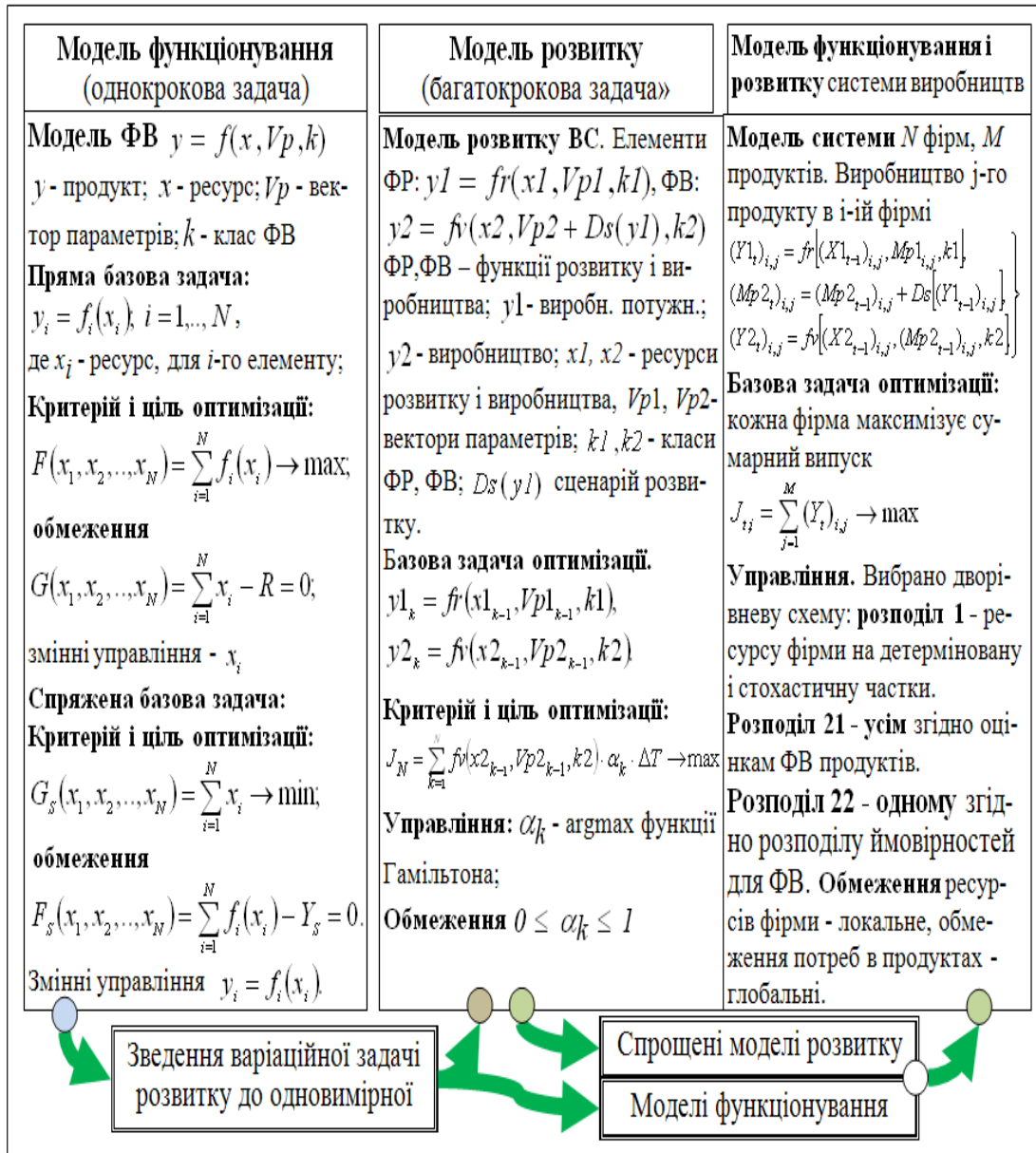


Рисунок 1.15 – Декомпозиція моделі функціонування і розвитку ВС

Відмінність запропонованої в роботі декомпозиції від аналогів у відношеннях елементів. В аналогах елементи є складовими до моделі системи, в даній роботі елементи утворюють послідовну структуру, де

кожен попередній елемент входить до наступного, як ключовий елемент ефективності. При цьому кожна субмодель може використовуватись автономно. Такий підхід, коли з певних субмоделей збирається цілісна модель, але субмоделі не «розчиняються» в загальній моделі і можуть використовуватись самостійно, названо композитним. Кожна модель містить в собі оптимізаційну задачу певного класу: задачу нелінійного програмування (розподіл ресурсу між виробництвами); варіаційну задачу (розподіл ресурсу між розвитком і накопиченням); задачу локального управління в активній системі (розподіл ресурсу елементом системи виробників між продуктами виробництва). Ці три моделі визначають структуру роботи: дослідження цих моделей розглядається в розділах 2, 3, 4.

### **Висновки до розділу 1**

За результатами аналізу актуальних задач моделювання і оптимізації виробничих систем та існуючих моделей для цих задач проведено узагальнення структур ВС і моделей процесів функціонування і розвитку ВС, а саме: концепція паралельного створення виробничих систем та їх моделей. Вибрана композитна структура для моделі функціонування і розвитку.

Типові об'єкти застосування результатів роботи – малі і середні підприємства з багатомонокультурною продукцією, що швидко оновлюється, наприклад: крупорушки, овочечистки, машини для очищення часнику і цибулі, міні-трактори, неметалічні ємності для ракет і біореакторів, бронекабіни для літальних апаратів та інше – все на одному підприємстві при істотних змінах потреб. Ще один напрям – металургійні підприємства, системи теплопостачання, екологізовані виробництва з переробкою відходів в біореакторних системах.

Визначена форма реалізації і використання результатів цієї роботи: системи підтримки рішень, що на базі авторських програм [124, 125, 136–139, 144] дозволяють отримувати та аналізувати оптимальні плани виробництва і розвитку, виконувати стандартний ризик-аналіз.

Виконано аналіз процесів розвитку виробничих систем, показано зростання частки процесів розвитку при відставанні засобів управління: моделей-предикторів, моделей для аналізу ризиків, моделей для планування і управління. Головний елемент процесів розвитку не матеріальні цінності, а інформація, зокрема, – знання в формі математи-

чної моделі. Моделі сьогодні – якісно нова і головна форма зберігання знань у виробничих системах.

Здійснено системний аналіз процесів розвитку та еволюції технічних систем, виділено і формалізовано базові задачі моделювання і оптимізації технічних систем – задачі розподілу, задачі розвитку і задачі обміну. Проаналізовано існуючі декомпозиційні підходи до створення моделей розвитку і запропоновано використання узагальненого декомпозиційного підходу – методу тривимірної декомпозиції. Запропоновано ще один крок узагальнення декомпозиційного підходу на базі симетрії двох процесів створення моделей – «згори вниз» – декомпозиція і «знизу вгору» – композиція, агрегування. Проаналізовано методологію розбиття багатовимірних задач управління в часі – основу методу динамічного програмування Беллмана.

Розроблено класифікації моделей процесів розвитку розподілених ВС. Проаналізовано існуючі моделі розподілу ресурсів на базі відкритого управління, показано роль декомпозиційного методу відкритого управління як засобу управління процесами розвитку в умовах суттєвих невизначеностей.

Виконано синтез базових класів моделей: імітаційних та інтегрованих, стохастичних – функціонування в активному оточенні. В результаті аналізу виявлено, що відомі моделі процесів функціонування і процесів розвитку не є цілісними і мають обмеження на класи функцій виробництва та базуються в основному на гаусівській статистиці. Це обумовило проблему роботи – відсутність методологічної основи для побудови цілісного підходу до моделювання процесів функціонування та розвитку розподілених виробничих систем, що зумовлює недостатню ефективність функціонування і розвитку таких систем.

## РОЗДІЛ 2

### РОЗРОБКА ОПТИМАЛЬНО АГРЕГОВАНИХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦІОНУВАННЯ І РОЗВИТКУ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ

У розділі 1 на базі аналізу існуючих підходів до розробки моделей розподілених виробничих систем запропоновано класифікацію моделей виробничих систем (ВС) як елементів певної цілісної динамічної структури – еквівалентної за входом–виходом моделі. Для дослідження, проектування і управління ВС бажано мати можливість працювати як з моделями підсистем, так і з певною агрегрованою моделлю, що при певних вхідних діях має такий же вихід, як і неагрегована модель. Для виконання операцій агрегування і дезагрегування, які задовольняють умову еквівалентності за входом–виходом, повинен існувати певний математичний апарат. Приклад такого математичного апарату – лінійна теорія управління, де елементи технічної системи подаються їхніми передаточними функціями, і певною множиною типів зв'язків: паралельних, послідовних, зворотних, для яких існують відповідні бінарні оператори: сума для паралельного поєднання, добуток – для послідовного і відома формула для зворотного зв'язку. Властивості цих операторів дозволяють довільну систему елементів, пов'язаних трьома класами зв'язків, замінити однією передаточною функцією системи для заданих точок входу і виходу.

В цьому розділі будується і досліджується подібна алгебраїчна система, в якій бінарні оператори оптимального агрегування для паралельних, послідовних і кільцевих поєднань виробничих елементів дозволяють довільну систему виробничих елементів, пов'язаних трьома класами зв'язків, замінити одним оптимальним еквівалентним елементом. Побудова алгебри для об'єктів (функцій виробництва) вирішує разом дві проблеми: проблему ефективного агрегування і дезагрегування виробничих систем і проблему ефективної багатовимірної оптимізації. *Суть новації даної роботи поєднання операцій агрегування і оптимізації.*

Тобто в оператори агрегування вбудовується оптимізація розподілу ресурсів виробництва і розвитку між елементами. Метод оптимального агрегування є ключовим для побудови ефективних методів розв'язання варіаційних задач оптимального розвитку.

## 2.1 Алгебраїзація задач оптимального агрегування

Алгебраїзація математичних моделей і методів оптимізації в методичному плані дозволяє наблизити теорію виробничих систем до теорії лінійних динамічних систем, в практичному плані – усунути обмеження – вимоги лінійності, випуклості, неперервності присутні в існуючих моделях і методах.

### 2.1.1 Постановка базової задачі оптимального агрегування

Запишемо постановку і узагальнення однокрокової задачі оптимального розподілу ресурсу.

Модель функції виробництва:

$$y = f(x, Vp, k),$$

де  $y$  – продукт;  $x$  – ресурс;  $Vp$  – вектор параметрів;  $k$  – клас ФВ.

Пряма базова задача:

$$y_i = f_i(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

де  $x_i$  – ресурс, для  $i$ -го елемента.

Критерій, ціль оптимізації і обмеження, змінні управління:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_i f_i(x_i) \rightarrow \max; \quad G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_i x_i - R = 0, \quad (2.1)$$

де  $x_i$  – змінні управління.

Спряжена задача. Критерій, ціль оптимізації і обмеження:

$$Gs(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_i x_i \rightarrow \min; \quad Fs(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_i f_i(x_i) - Ys = 0, \quad (2.2)$$

де  $Ys$  – заданий темп виробництва;  $y_i = f_i(x_i)$  – змінні управління.

Узагальнення. Шукаємо не точкове розв'язання, а функцію – залежність оптимального розподілу ресурсу від величини обмеження.

Форма розв'язання задачі:  $Ys = fops(Xs)$  – оптимальна ФВ системи,  $Dop(X)$  – вектор-функція оптимального розподілу ресурсу;  $x_i = Dop_i(Xs)$  – частка ресурсу для  $i$ -го елемента виробничої системи.

Форма розв'язання бінарної задачі (двохелементна система):  $y_2 = f2op(Xs)$  – оптимальна ФВ системи;  $x_1 = \alpha o \cdot Xs$ ;  $x_2 = (1 - \alpha o) \cdot Xs$  – розподіл ресурсу. Бінарний оператор оптимального розподілу бере дві

ФВ елементів і повертає оптимальну ФВ системи:  $f2op = F2o(f1, f2)$ . Якщо  $F2o$  – асоціативний, то багатовимірна задача нелінійного програмування може бути розбита в систему одновимірних задач оптимального розподілу ресурсу між елементами розподіленої виробничої системи. Для системи з чотирьох елементів еквівалентна оптимальна ФВ:

$$fops = F2op(f1, F2op(f2, F2op(f3, f4)))$$

Реалізація підходу на базі оптимального агрегування розбивається в послідовність етапів, на кожному з яких виконується формалізація задач і побудова відповідних програмних модулів, що трансформують абстрактні математичні моделі в активну форму – «живу математику» за термінологією математичних пакетів.

В рамках ресурсного підходу виконано аналіз і формалізацію реальних структур ВС. Результати цього етапу зібрані в інформаційний блок (рис. 2.1).

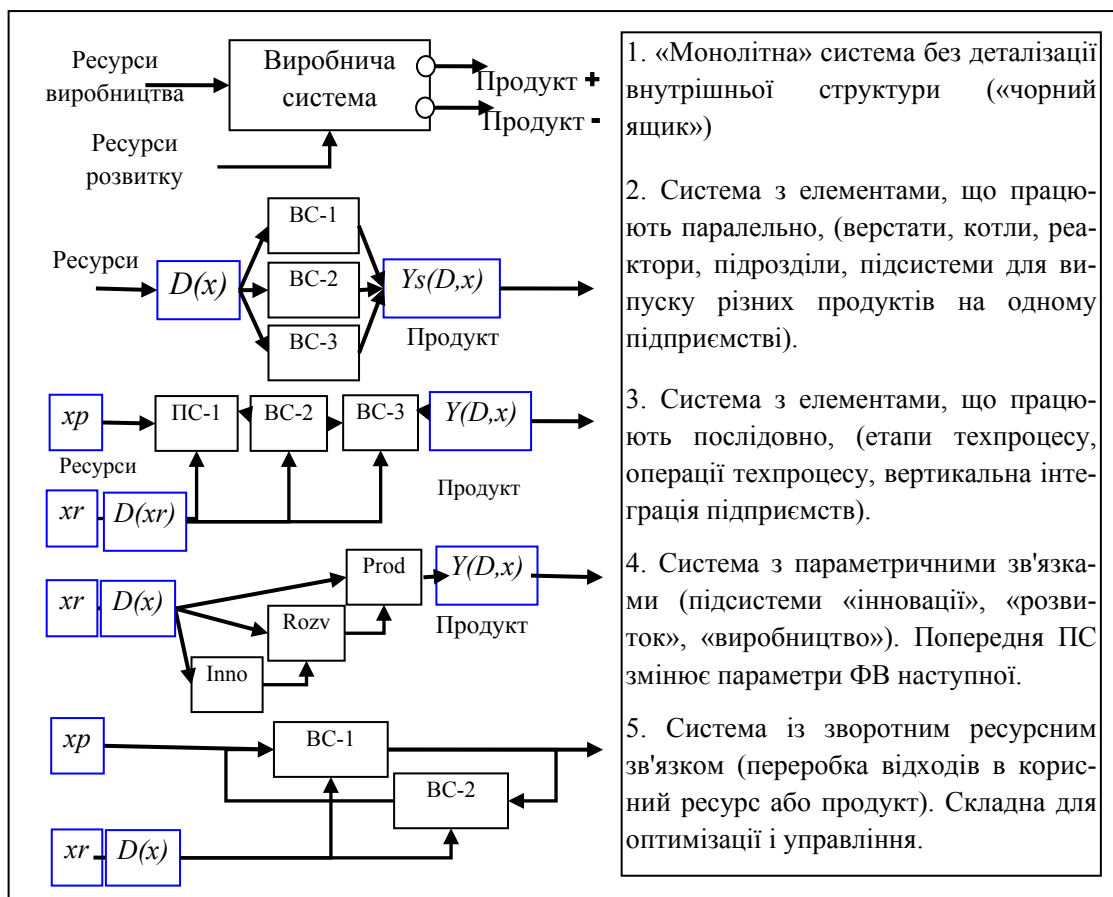


Рисунок 2.1 – Базові структури виробничих систем

На рис. 2.2 подано інформаційний блок «бібліотека базових функцій виробництва і розвитку».

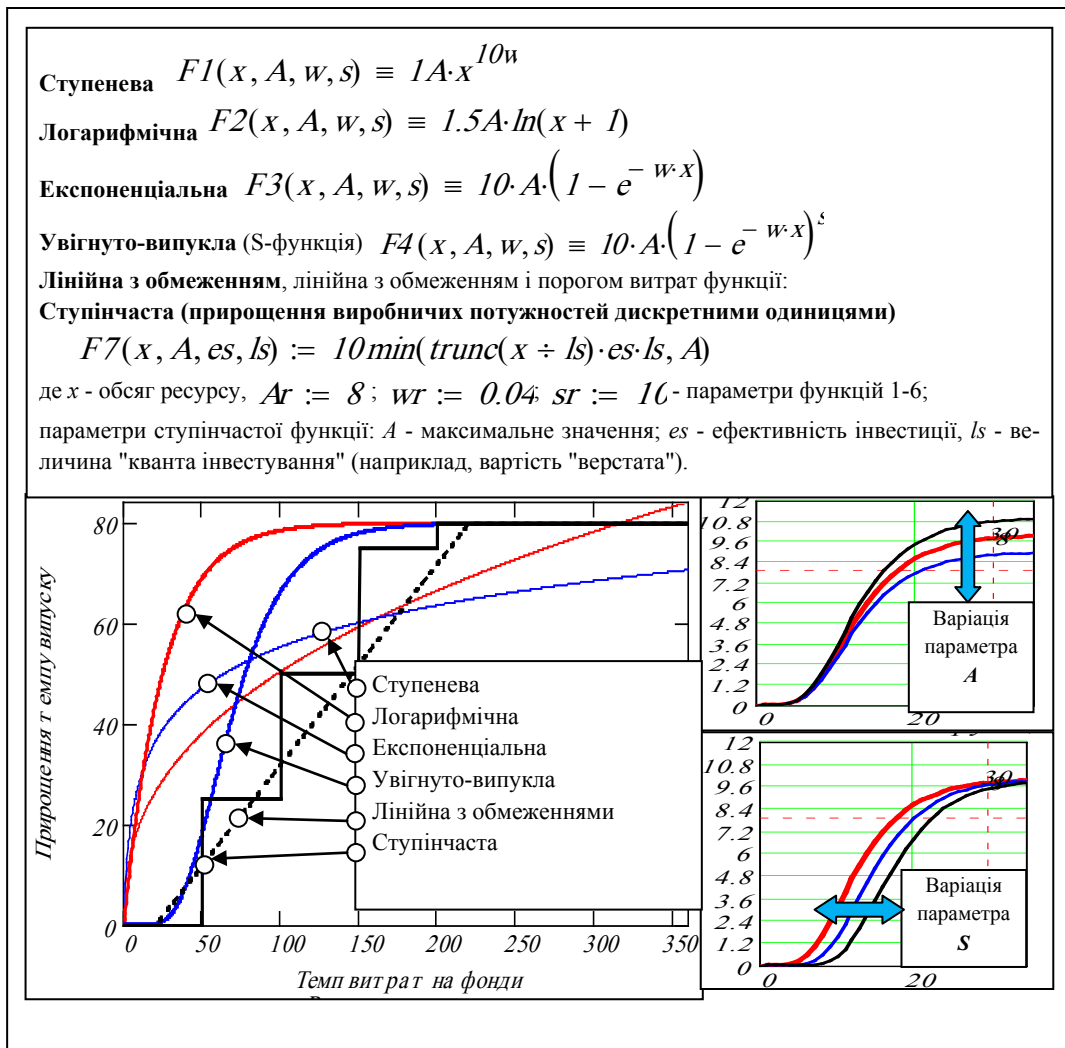


Рисунок 2.2 – Бібліотека базових функцій виробництва і розвитку

Моделі базових структур – основа моделей функціонування і розвитку, що розглядаються в наступних розділах. Виконаємо аналіз і формалізацію залежностей «витрати–випуск». Поняття виробничої функції часто ототожнюють з класичними моделями з економічної науки – функцією Кобба–Дугласа, функцією CES. Функції виробництва в економіці неадекватні з багатьох причин – вони випуклі, вони оперують з цінами, а не натуральними вимірами ресурсів. Причини неадекватності були проаналізовані в [206].

Розроблена базова трипараметрична модель ФВ з параметрами  $A$ ,  $w$ ,  $s$  – що характеризують максимальну виробничу потужність, максимальну ефективність і порогові витрати відповідно. Розширена модель

має ще один параметр – структурний клас ФВ: логарифмічна, S-функція, ступінчаста, лінійна з обмеженням і порогом. Розширена модель відкрита – можливо додавати нові структурні класи. В даній роботі розглядаються первинні ФВ – технічні і технологічні. Наприклад, підприємство виробляє металеві конструктивні елементи, головні ресурси – енергія і металеві заготовки. Для наявних технологій і конструкцій обладнання можна побудувати конструктивні процедури вимірювання *витрат* металу і енергії на *випуск* тони, метру певних профілів, труб.

### 2.1.2 Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої виробничої системи з елементами, що функціонують паралельно

Деталізуємо задачу максимізації сумарного виробництва при обмеженні ресурсів для ВС з елементами, що функціонують паралельно, з використанням методу оптимального агрегування. Розглядається система з  $N$  виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількості  $x_i$  і виробляють продукцію у кількостях

$$y_i = f_i(x_i); \quad i = 1, \dots, N,$$

де  $x_i$  – кількість ресурсу, виділеного  $i$ -му елементу.

Треба розподілити ресурс  $R$  так, щоб максимізувати сумарне виробництво,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \rightarrow \max$$

за умови, що

$$G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i - R = 0$$

Змінні управління –  $x_i$ .

Метод оптимального агрегування дозволяє виконати декомпозицію задачі пошуку екстремуму функції  $N$  змінних послідовністю з  $(N-1)$  задач знаходження екстремуму функцій однієї змінної. Коректність методу оптимального агрегування доведено теоремами і підтверджено моделюванням [49, 102, 129, 184]. Метод має такі обмеження на функції виробництва: нестрого монотонно зростаюча, нестрого позитивна. Типові обмеження в аналогах – випуклість, неперервність похідних.



Вводимо вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу  $Dop(R)$ ,  $0 \leq R \leq R_{\max}$ , де  $R_{\max}$  – границя інтервалу припустимих значень ресурсу. Компоненти вектор-функції  $Dop(R)$  – частки ресурсів для кожного елемента ВС.

Властивості  $Dop(R)$ : для припустимих функцій виробництва (ФВ) елементів  $\forall i \in 1..N$  за наявності в складі виробничої системи (ВС) хоч одного елемента з невіпуклою ФВ оптимальний розподіл ресурсу матиме розриви. На інтервалах між розривами компоненти  $Dop(R)_i$  нестрого монотонні функції  $R$ .

Вводимо оптимальну еквівалентну ФВ виробничої системи

$$Yop(R) = \sum_{i=1}^N f_i(Dop_i(R)). \quad (2.3)$$

Властивості  $Yop(R)$  з нестрого позитивними і нестрого монотонними ФВ елементів:

- неперервність, та нестрога монотонність  $R_2 > R_1 \rightarrow Yop(R_2) \geq Yop(R_1)$ ;
- точкам розриву  $Dop(R)$  відповідають розриви похідної  $\frac{\partial}{\partial R} Yop(R)$ .

Вводимо множину  $\alpha$ -функцій для двоелементної системи

$$fd2(x, \alpha) = f1(x \cdot \alpha) + f2(x \cdot (1 - \alpha)), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (2.4)$$

де  $f1(\cdot)$ ,  $f2(\cdot)$  – ФВ елементів.

**Теорема 2.1.** Оптимальна еквівалентна ФВ системи з двох елементів з довільними ФВ буде обвідною системи  $\alpha$ -функцій. Функція  $fd2(x, \alpha)$  є неперервною функцією змінних  $x$  та  $\alpha$ . Кожний переріз цієї функції має максимум або точну верхню грань. Годограф цих точок – неперервна функція  $x$ . Виділення обвідної  $F2og(x) := \max(fd2(x, \alpha_1), fd2(x, \alpha_2), \dots)$  для скінченної множини значень  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_K\}$ , що рівномірно покриває інтервал визначення  $\alpha$ , дає наближення оптимальної еквівалентної ФВ системи, яке збігається до ОФВ при  $K \rightarrow \infty$ .

Доведення теореми базується на властивостях монотонних функцій.

### 2.1.3 Алгебра оптимального агрегування

Метод оптимального агрегування паралельних структур створює алгебраїчну систему:  $\langle A; WF; WR \rangle$ , де  $A$  – множина дискретизованих ФВ – носій алгебри;  $WF$  – множина операцій алгебри, визначених на  $A$  (оператори оптимального агрегування для паралельних, послідовних і кільцевих структур);  $WR$  – множина відносин, визначених на  $A$  (для двох і довільного числа ФВ – відносини домінування, аналоги підмножин Парето).

Бінарний оператор  $f2o(f1, f2)$  оптимального агрегування бере дві дискретизовані ФВ, представлені матрицями з фіксованим числом рядків і змінним числом стовпців; а повертає об'єкт того ж класу – дискретизовану оптимальну ФВ, подану матрицею тієї ж структури.

Властивості оператора оптимального агрегування для паралельних структур: асоціативність і комутативність

$$f2o(f1, f2o(f2, f3)) = f2o(f2, f2o(f3, f1)).$$

Декомпозиція багатовимірної задачі оптимального розподілу обмеженого ресурсу в послідовність одновимірних оптимізаційних задач – наслідок асоціативності бінарного оператора  $f2o(f1, f2)$ .

Виконаємо дослідження оптимального агрегування спрямоване на реалізацію оператора оптимального агрегування – ключового елемента методу оптимального агрегування. Введемо множину  $\alpha$ -функцій (2.4)

$$f\alpha(f1, f2, \alpha, x) := f1(\alpha \cdot x) + f2[(1 - \alpha) \cdot x].$$

Оптимальна виробнича функція системи з двох елементів буде обвідною системи функцій  $f\alpha(f1, f2, \alpha, x)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , тобто результатом застосування операції  $\max(\cdot)$ , яка є комутативною і асоціативною:

$$\begin{aligned} \max(x1, x2) &= \max(x2, x1); \max(x1, \max(x2, x3)) = \max(x2, \max(x3, x1)) \Rightarrow \\ f2o(f1, f2) &= f2o(f2, f1); f2o(f1, f2, f3) = f2o(f1, f2o(f2, f3)) = \\ &= f2o(f2o(f1, f2), f3). \end{aligned}$$

Існування асоціативності операції оптимального агрегування важливе для методу оптимального агрегування. Якщо в аналогу – алгебрі передаточних функцій – асоціативність лише дозволяє довільно вибрати порядок виконання операцій типу:

$$\text{sum}(W1, W2, W3) = W1(s) + W2(s) + W3(s);$$

$$\text{sum}(W1, W2, W3) = \text{sum}(W1, \text{sum}(W2, W3)) = \text{sum}(\text{sum}(W1, W2), W3),$$

то в методі оптимального агрегування асоціативність дає радикальну перевагу над іншими методами нелінійного програмування – заміну  $N$ -вимірної задачі послідовністю з  $N$  одновимірних задач.

Введена в даній роботі бінарна операція оптимального агрегування принципово відрізняється від аналогів, наприклад, отримання передаточної функції паралельного поєднання двох елементів тим, що крім власне композиції виконується певна оптимізація системи. Виникає питання строгого доведення тотожності екстремуму цільової функції, отриманого певним еталонним методом багатовимірної оптимізації і екстремуму, отриманого методом оптимального агрегування – як системи одновимірних задач оптимізації. Були досліджені два напрямки доведення асоціативності і оптимальності операцій оптимального агрегування.

Емпіричний напрямок. Певна множина тестових оптимізаційних задач виконується методом оптимального агрегування і альтернативними методами з перевіркою тотожності результатів. Ця альтернатива не є математичним доведенням, але вона використовувалась на всіх етапах дослідження як засіб контролю «непомітних» помилок. Далі подано приклади такого контролю. Для тестових задач третього порядку в якості еталонного використовувався метод багатовимірного прямого перебору. В множину тестових задач входили задачі, для яких взагалі не було знайдено альтернативних методів, наприклад, для оптимального агрегування ступінчастих і невіпуклих «гладких» (з неперервною похідною) ФВ, для яких розв'язки є розривними і немонотонними на інтервалах неперервності. Р. Беллман подібні задачі подавав як задачі пошуку границь інтервалів неперервності [25] і отримав конкретні розв'язки для загальнотеоретичних і прикладних задач (задача розподілу, задача управління запасами при невизначеностях).

Математичне доведення. Загальна база доведення: – принцип оптимальності, характер зв'язків і впливів між елементами виробничої системи і властивості алгебри монотонних функцій (сума, добуток, степінь). Методологічний аналог у використанні властивостей монотонних функцій – геометричне програмування [178].

Форма доведення. З двох форм доведення – для неперервних і дискретизованих і дискретних функцій виробництва вибрано останню тому, що всі переваги отримані ціною повної дискретизації оптимізаційної задачі. Розглядаємо систему з  $N$  виробничих елементів, що працюють паралельно, з нестрого монотонними і нестрого позитивними ВФ, визначеними на інтервалі припустимих значень змінної управління  $0 \leq X \leq Xm$  – поточного ресурсу виробничої системи. Вибираємо для одновимірної оптимізації метод прямого перебору. Це знімає проблему розмірності: обчислювальні витрати зростають приблизно лінійно в функції розмірності задачі, одновимірна оптимізація знімає всі проблеми пошуку глобального екстремуму, обробки розривів цільової функції. Одновимірна оптимізація створює можливості для застосування векторизації обчислень. Асоціативність операції оптимального агрегування породжує комбінаторну множину еквівалентних структур оптимального агрегування системи з  $N$  паралельно поєднаних елементів. Доведемо, що всі можливі варіанти є тотожними за результатами оптимального агрегування, а цей результат є тотожним результату виконання оптимізації еталонним методом багатовимірної оптимізації методом прямого перебору.

**Теорема 2.2.** Бінарний оператор оптимального агрегування для виробничої системи (ВС) з  $N$  паралельно поєднаних елементів, які мають нестрого монотонно зростаючі ФВ і адитивним критерієм оптимальності ВС є асоціативним і комутативним, що дозволяє замінити  $N$ -вимірну задачу оптимізації системою одновимірних задач оптимізації, що потребує  $(N-1)$  застосувань бінарних операцій оптимального агрегування паралельної структури, і в підсумку дає оптимальну еквівалентну функцію «витрати–випуск» виробничої системи.

Доведення. Маємо цільову функцію від  $N$  змінних і обмеження ресурсу

$$Y_S = \sum_{n=1}^N f_n(x_n); \sum_{n=1}^N x_n - X_S = 0.$$

З множини виробничих елементів виділимо довільну пару  $(f_p(x_p), f_d(x_d))$ . Розглянемо розподіл ресурсу для довільного значення сумарного ресурсу  $Xs: 0 \leq Xs \leq Xm$ . Методом прямого перебору для довільних ФВ з класу нестрого монотонних і нестрого позитивних, з обмеженими значеннями в інтервалі визначення, завжди можливо знайти з точністю до величини кроку квантування максимум або точну верхню грань функції  $Y_S$  і відповідний оптимальний розподіл ресурсу

$$(x_{o_1}, x_{o_2}, \dots, x_{o_p}, \dots, x_{o_d}, \dots, x_{o_N}); \sum_{n=1}^N x_{o_n} = Xs.$$

Сумарний ресурс для виділеної пари виробничих елементів  $(f_p, f_d)$  в оптимальному розподілі буде  $Xpd = x_{o_p} + x_{o_d}$ .

Виконаємо задачу оптимального розподілу для виділеної пари при обмеженні ресурсу  $Xpd$  і отримаємо локально оптимальний розподіл

$$(f_p(xl_p) + f_d(xl_d)) \rightarrow \max; xl_p + xl_d = Xpd.$$

Для доведення теореми про асоціативність оператора оптимального агрегування необхідне виконання умови (друга умова – надлишкова)

$$(xl_p = x_{o_p}), (xl_d = x_{o_d}).$$

Припустимо, що ця умова не виконується (результати локальної і глобальної оптимізації відрізняються):  $xl_p \neq x_{o_p}$ .

У рамках постановки задачі оптимального агрегування, розв'язання локальної задачі при заданому обмеженні ресурсу  $Xpd$  існує і єдине. Це забезпечується монотонністю ФВ і гарантованим методом прямого перебору знаходженням максимального значення цільової функції – екстремуму, або точної верхньої грані. Для глобальної задачі оптимізації розподілу ресурсу оптимальне розв'язання теж існує і єдине. Згідно з моделлю виробничої системи, оптимальний розподіл ресурсу в певній підсистемі залежить тільки від ресурсу, виділеному цій підсистемі, і не впливає на розподіл ресурсу в другій частині системи. Тому припущення  $xl_p \neq x_{o_p}$  – суперечливе. Теорема доведена.

Розглянемо більш детально певні елементи доведення теореми 2.2. Подамо формули операції агрегування в структурному вигляді (рис. 2.3).

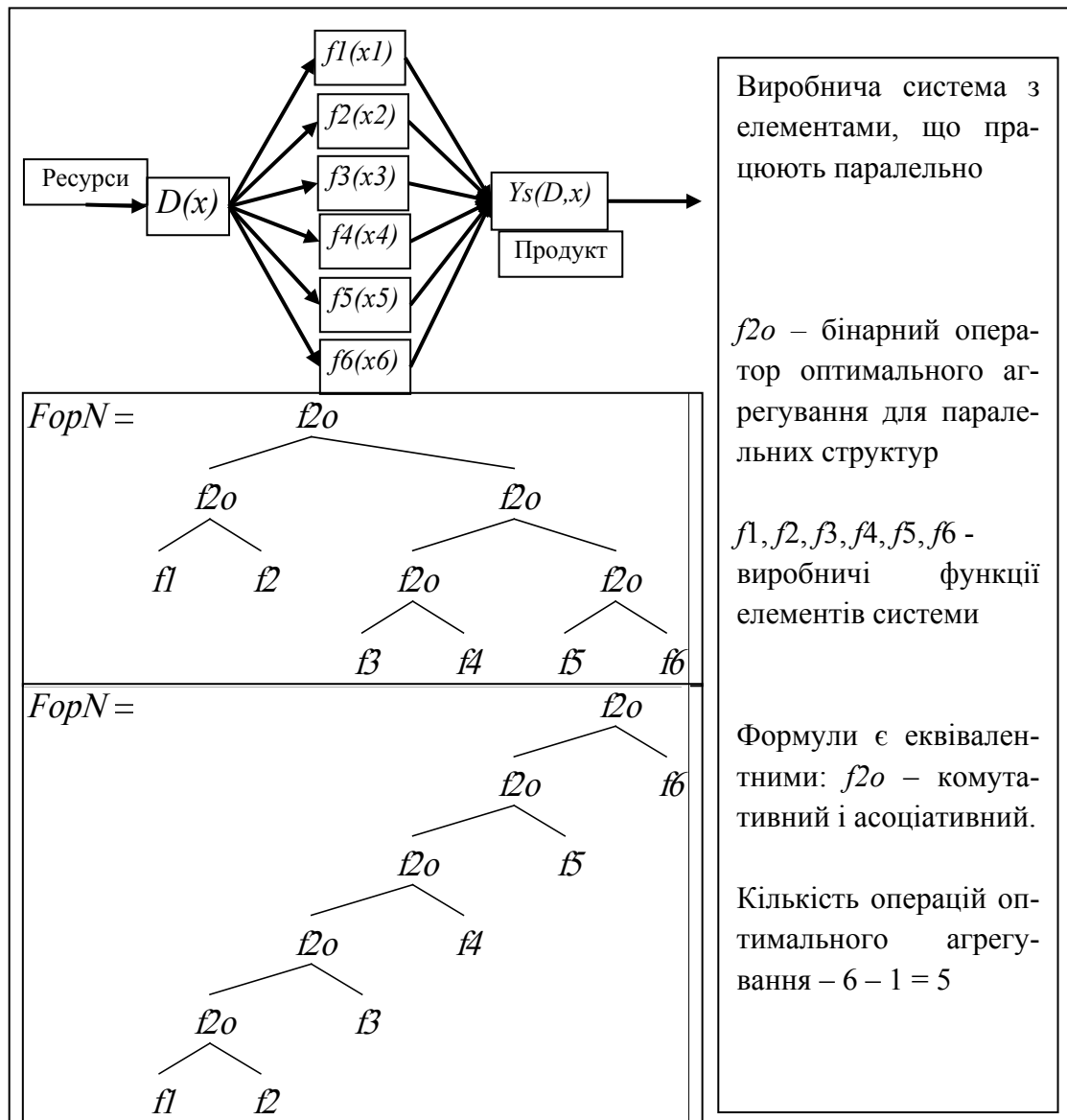


Рисунок 2.3 – Формули оптимального агрегування виробничої системи. Приклад

У реальних виробничих системах можуть виникати позитивні і негативні зв'язки через обмін інформацією, технологіями. Це враховано в метамоделі інноваційного розвитку (розділ 4).

Існування альтернативних структур виконання бінарних операцій агрегування дає певні можливості в побудові нових моделей і алгоритмів. Прикладом можуть бути два варіанти агрегування на рис. 2.3. В першому варіанті агрегування пар  $(f1, f2), (f3, f4), (f5, f6)$  можуть виконуватись паралельно.

#### **2.1.4 Реалізація і дослідження оператора оптимального агрегування**

Для побудови цілісної алгебраїчної системи і для практичного використання виходом оператора оптимального агрегування повинен бути не тільки вектор – дискретизована ФВ, але і відповідні вектори розподілу ресурсу для кожного елемента агрегованої системи. Результатом застосування бінарного оператора повинен бути об'єкт того ж класу, що і вхідні операнди. Для цього операнди повинні мати «пам'ять попередніх агрегувань» – містити в собі функції розподілу ресурсів попередніх агрегувань. Операнд з «нульовою історією» формуємо додаванням до вектора значень функції вектор з одиниць, що інтерпретується як: «ресурс завжди повністю використовується цим елементом».

Таке ускладнення структури операндів обумовлено не тільки забезпеченням повноти алгебраїчної системи, але потребами практичного застосування – для визначення часток ресурсу всіх елементів на всіх рівнях ієрархії реальної виробничої системи. Назвемо операцію розрахунку часток ресурсу для кожного елемента виробничої системи, що виконується після отримання оптимальної еквівалентної ФВ виробничої системи «дезагрегуванням».

В алгебрі оптимального агрегування передбачаємо операцію «обнулення пам'яті» попередніх агрегувань. Введення цієї операції обумовлено потребами практичного застосування методу для побудови ефективних ієрархічних структур ІУС великих виробничих систем.

Останній крок в розробці методу і, потім методології оптимального агрегування – конкретна програмна реалізація оператора оптимального агрегування, тестування і дослідження. На рис. 2.4 подано приклад реалізації бінарного оператора оптимального агрегування. Це одночасно програмний модуль, записаний в мові програмної платформи, і математичний вираз, що повністю відповідає стандартам математики. За своїми алгебраїчними властивостями він належить до таких бінарних операторів як оператори суми, максимуму, згортки в теорії ймовірностей та теорії лінійних динамічних систем: оператор суми бере два числа і повертає число, оператор згортки розподілів ймовірностей бере два розподіли і повертає об'єкт того ж класу – розподіл ймовірностей. Названі оператори є комутативними і асоціативними.

<pre> <i>f2o</i>(<i>mf1</i>, <i>mf2</i>) =   <i>rlev</i> ← <i>submatrix</i>(<i>mf1</i>, 1, <i>Xto</i>, 2, <i>klev</i>)   <i>rpri</i> ← <i>submatrix</i>(<i>mf2</i>, 1, <i>Xto</i>, 2, <i>kpri</i>)   for <i>i</i> ∈ 1.. <i>Xto</i>       <i>mak</i> ← 0       for <i>j</i> ∈ 1.. <i>Xto</i>           <i>i1</i> ← <math>\max\left(\text{round}\left(\frac{j \cdot i}{Xto}, 0\right), 1\right)</math>           <i>i2</i> ← <math>\max[(i - i1), 1]</math>           <i>Vs</i> ← <i>mf1</i><sub><i>i1</i>, 1</sub> + <i>mf2</i><sub><i>i2</i>, 1</sub>           if <i>Vs</i> &gt; <i>mak</i>               <i>jm</i> ← <i>j</i>               <i>mak</i> ← <i>Vs</i>           <i>Vyrod</i><sup>(1)</sup> ← <i>stack</i>(<i>mak</i>, <i>jm</i>, <i>d1</i>)       <i>Vyx</i> ← <i>Vyrod</i><sup>T</sup>       <i>rnlev</i> ← <i>dop</i>(<i>rlev</i>, <i>Vyx</i><sup>(2)</sup>)       <i>rnpri</i> ← <i>dop</i>[<i>rpri</i>, (1 - <i>Vyx</i><sup>(2)</sup>)]       <i>Vyd</i> ← <i>augmen</i>(<i>Vyx</i><sup>(1)</sup>, <i>rnlev</i>, <i>rnpri</i>) </pre>	<p>Програма бере дві дискретизовані ФВ <i>mf1</i>, <i>mf2</i></p> <p>Виділення з даних пам'яті агрегувань першого і другого операндів</p> <p>Цикл по ресурсу</p> <p>Цикл по пропорції розподілу ресурсу</p> <p>Визначення <i>i1</i>, <i>i2</i> – часток ресурсу для першого і другого елементів</p> <p>Визначення сумарного виробництва</p> <p>Визначення максимуму і оптимальної пропорції розподілу ресурсу.</p> <p>Формування виходу</p> <p>Обчислення оптимальних розподілів для першого і другого елементів за підпрограмою <i>dop</i>()</p> <p>Програма повертає структуру «оптимальна еквівалентна ФВ + оптимальні розподіли ресурсу».</p>
--	---

Рисунок 2.4 – Реалізація бінарного оператора оптимального агрегування для паралельних структур (версія)

Половина операцій в програмному модулі – маніпулювання з структурами даних – виділити субматрицю, об'єднати матриці. Принципово не використовувались пошукові алгоритми для підвищення швидкості в пошуку екстремуму. Оптимізаційна задача зведена до алгебраїчної. Це відповідає сучасному напрямку – алгебраїзація оптимізаційних задач.

На рис. 2.5 подано приклад використання оператора оптимального агрегування для отримання оптимальної еквівалентної ВФ і вектор-функції оптимального розподілу ресурсу.

У центрі внизу на рис. 2.5 – подані графіки ФВ елементів системи, над ними – структури даних цих ФВ – матриці з двох стовпців. Ліворуч внизу – графіки ФВ та відповідних розподілів ресурсу для результату оптимального агрегування *f1(x)* та *f2(x)*. Над графіками – результат роботи оператора – матриця, за значеннями стовпців якої побудовано графіки. Праворуч внизу – графіки, а над ними – дані, за



якими побудовано графіки. Над матрицею – формула, за якою ця матриця обчислена.

У верхній частині рис. 2.5 – виконання оптимального агрегування за альтернативними формулами – це перевірка асоціативності. Встановлено точність обчислень, п'ять знаків після точки, вибрано з вектора значень похибки альтернативних варіантів порядку агрегування – єдиний інтервал, де помилки перевищують 0,5 %. Цей же інтервал виділено на графіку. Можна бачити там складний розривний характер зміни всіх трьох функцій розподілів. Це помилки дискретизації. Вони легко усуваються збільшенням числа кроків квантування ресурсу. Точність обчислень оптимального управління 0,5 % задовільна для практики. Режими раптової зміни оптимального розподілу ресурсу в практичній реалізації можуть бути згладжені на базі застосування нечіткої логіки [53].

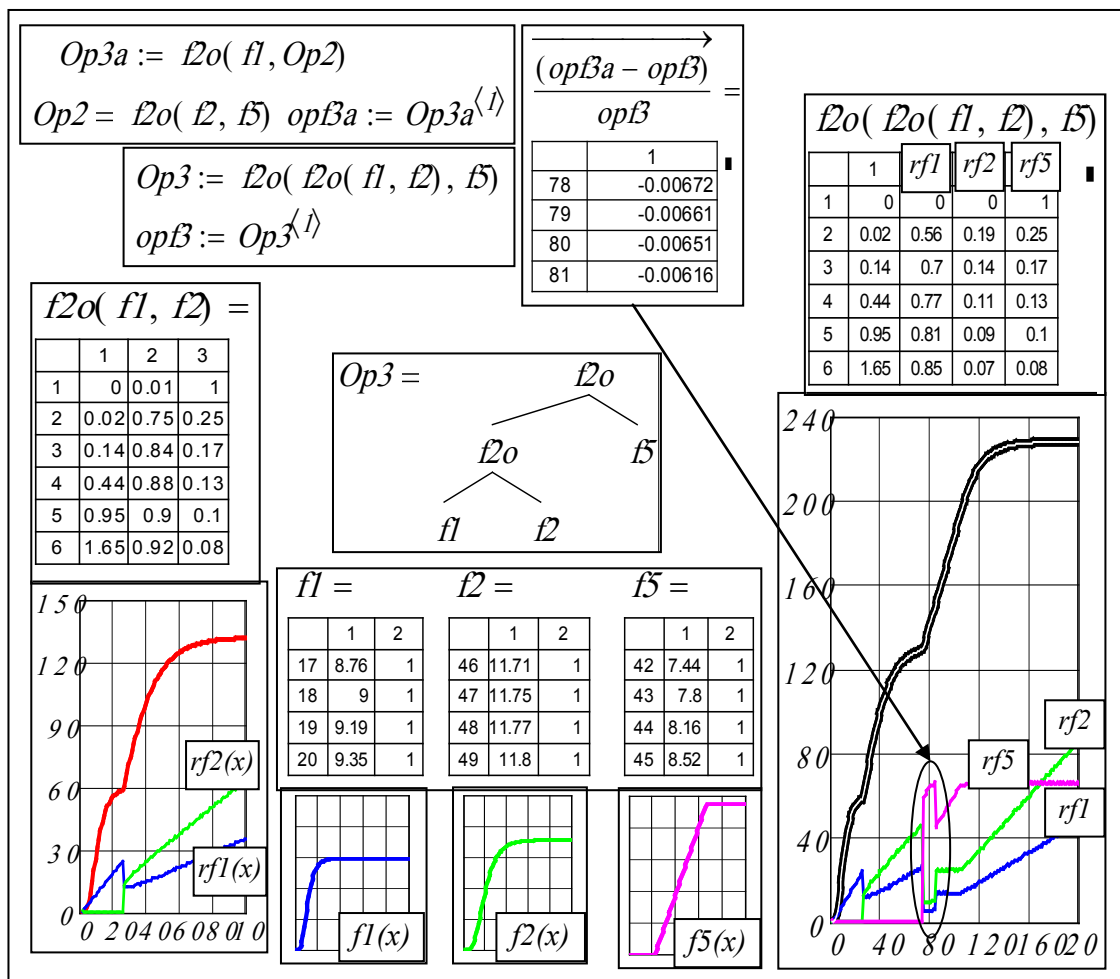


Рисунок 2.5 – Аналіз процесу оптимального агрегування системи з трьох елементів

## **2.2 Узагальнення оптимального агрегування як еквівалентнісного методу для розподілених систем з довільною структурою**

Виробничу систему будь-якого рівня можна подати як технологічний перетворювач ресурсів. Глобалізація, підвищення продуктивності виробництв роблять ресурси і продукти досить вільно конвертованими. В першому розділі були розглянуті математичні моделі обміну ресурсів. Вони є суттєво нелінійними, однак при виконанні певних умов мають стійкі усталені стани. Будемо вважати в межах цього розділу ресурси і продукти стабільно конвертованими. Це припущення дає нам можливість розглядати виробничі системи як перетворювачі ресурсів з скалярними входом і виходом. Тобто ми можемо застосувати і розробити для аналізу і оптимізації виробничих систем методи, подібні методам еквівалентних перетворень систем автоматичного управління (САУ). Ці перетворення дозволяють замінити довільну структуру САУ еквівалентним за входом–виходом елементом.

У ТАУ базовими елементарними поєднаннями є паралельне, послідовне та поєднання «зворотний зв'язок». Структури реальних виробничих систем і відповідних задач моделювання теж природно відображуються в подібні структури.

Розглянемо послідовно ці структури як об'єкти еквівалентних перетворень. Принципова різниця від класичних задач в тому, що ми інтегруємо класичну задачу еквівалентного перетворення з теж класичною задачею нелінійного програмування про розподіл обмеженого ресурсу. Окремий випадок такого підходу для випадку паралельного поєднання елементів виробничої системи, названий «методом оптимального агрегування» повністю обґрунтований і програмно реалізований в роботах [33, 56, 59, 60, 94, 104, 131, 206, 212]. В цих роботах метод розглядався як узагальнення задачі нелінійного програмування, суть якого – пошук не «точкового» розв'язання, а «оптимальної виробничої функції системи» – залежності виходу від входу та відповідну функцію оптимального розподілу ресурсу.

В даній роботі робиться такий крок – узагальнення методу оптимального агрегування на розподілені виробничі системи з довільними структурами. На рис. 2.6 подано базову модель оптимального агрегування паралельних структур виробничих систем.

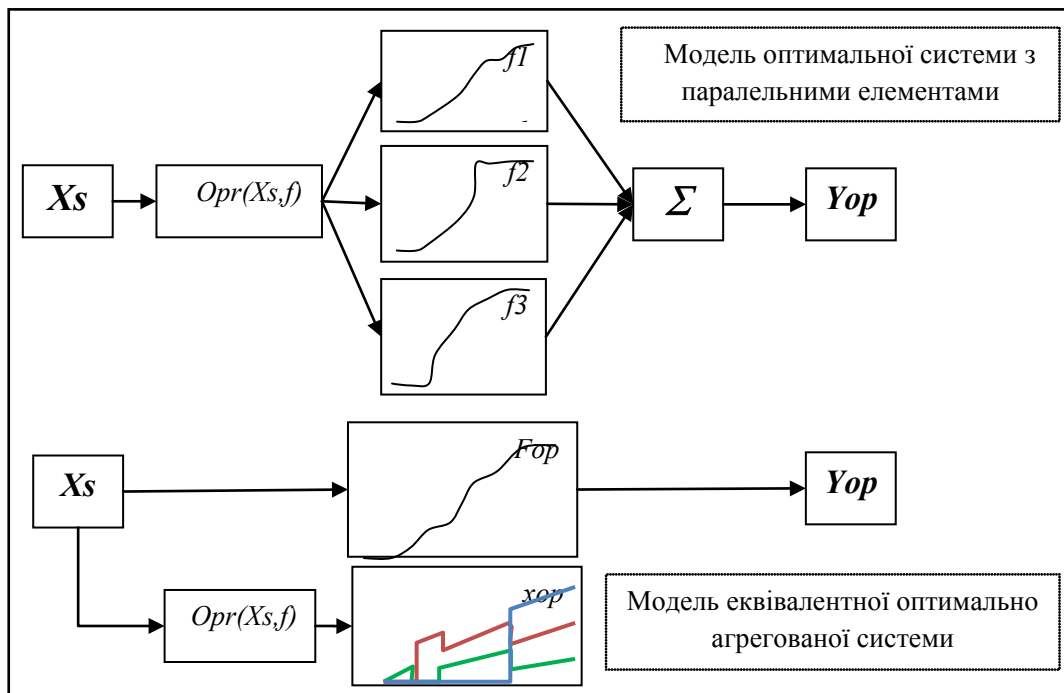


Рисунок 2.6 – Отримання еквівалентного оптимального елемента для системи з елементами, що працюють паралельно

### 2.2.1 Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої виробничої системи з елементами, що послідовно функціонують

Отримання еквівалентних моделей для певних структур виробничих систем – це не механічне перенесення методів з ТАУ. Абстрактні моделі не можуть бути відірвані від змістовних інтерпретацій, точніше, від практичних задач-першоджерел. Змістова інтерпретація задачі – вертикально інтегрована виробнича система, в якій технологічний процес технологічно і організаційно розділений на ряд субпроцесів, стадій. Продукт на виході може з'явитись тільки після проходження об'єкта обробки через усі стадії техпроцесу. Тобто, перша умова задовільного функціонування таких систем – узгодження пропускної здатності (виробничої потужності) елементів.

На рис. 2.7 подано схему моделі системи з послідовним поєднанням елементів. На відміну від попередньої задачі змінними управління є обсяги ресурсів для створення та підтримки (експлуатаційні витрати) виробничих потужностей елементів системи [131]. Ресурси ж, що переробляються виробничою системою в продукт, є зовнішніми змінними, обумовленими заданим обсягом випуску продукту. На рис. 2.7

виділено лінію технологічного перетворення ресурсу  $X$  в продукт  $Y_{op}$ . Управління в цій моделі – оптимальний розподіл ресурсу розвитку  $R_p$ , між етапами техпроцесу.

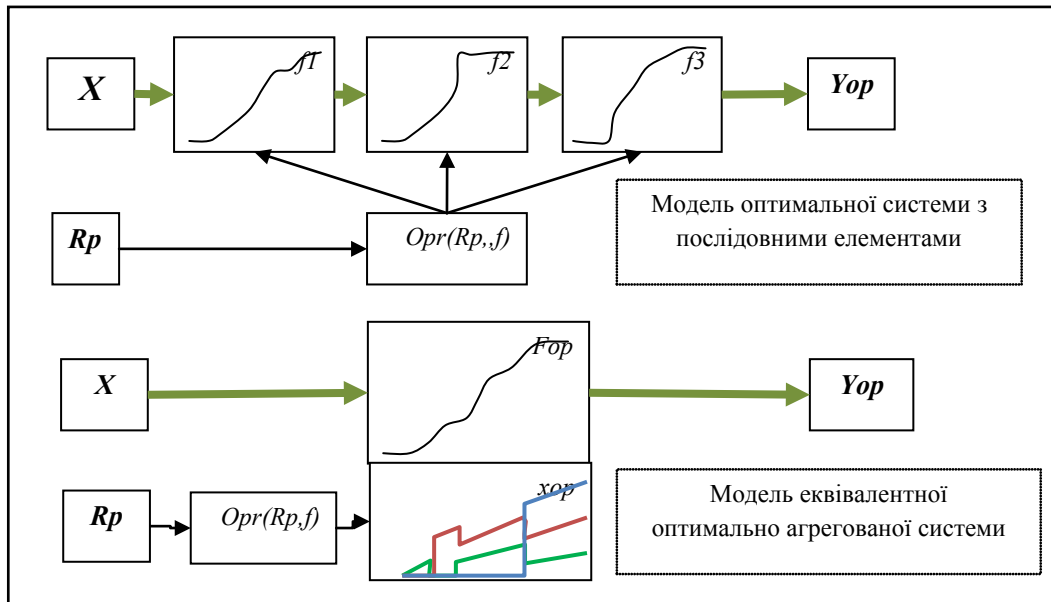


Рисунок 2.7 – Отримання еквівалентного оптимального елемента для системи з елементами, що працюють послідовно

У нижній частині рис. 2.7 подано схему еквівалентного оптимального елемента. Програмний модуль, що реалізує еквівалентний оптимальний елемент, бере ресурс  $R_p$  і повертає сумарний оптимальний випуск продукту  $Y_{op}$ . Нижня гілка схеми відображує вбудований модуль оптимального агрегування, що для заданого  $R_p$  обчислює оптимальний розподіл цього ресурсу між елементами виробничої системи. Задача має широке коло змістовних інтерпретацій і відповідних варіантів критерію оптимізації: розподіл витрат на модернізацію елементів виробничої системи; розподіл витрат на закупку обладнання для нового виробництва.

Критерії можуть відображати вимоги надійності, загальної ефективності виробничої системи. Побудована і досліджена версія моделі «багатофазна система масового обслуговування» [119]. Спільне в створених і досліджених моделях оптимального функціонування і розвитку систем такого класу було застосування методології оптимального агрегування. Це в підсумку дозволило виконати теоретичні узагальнення подібні, зроблених для задачі оптимального агрегування

паралельних структур. Формалізуємо і деталізуємо постановку задачі оптимального агрегування послідовних структур.

Маємо систему з  $N$  послідовно поєднаних виробничих елементів, виділяємо довільну послідовну пару елементів з функціями виробництва – довільними нестрого монотонними і позитивними обмеженими функціями  $f1p(x, Vp1)$ ,  $f2p(x, Vp2)$ , де  $Vp1$ ,  $Vp2$  – вектори параметрів цих функцій. Використовуємо трипараметричні моделі ФВ та ФР (див. рис. 2.2) [33].

Процеси оновлення виробництв відображуються функціями розвитку  $f1r(x1r)$ ,  $f2r(x2r)$ , де  $x1r$ ,  $x2r$  – обмежені ресурси розвитку:  $x1r + x2r = Xx$ . Вихід першого елемента  $y1 = f1p(x, Vp1)$  є входом для другого  $Yvux = f2p(y1, Vp2)$ .

На відміну від паралельних структур, в послідовній структурі елементи пов'язані єдиним технологічним процесом і об'єкт управління – не обсяги ресурсів виробництва, а обсяги ресурсів розвитку виробництв. «Розвиток» занадто багатозначний термін без певних стандартних кількісних показників. В даній роботі розвиток визначається як зміна параметрів функції виробництва, що приводить до часткового або абсолютного домінування ФВ після певних витрат на модернізацію або заміну засобів і технологій виробництва. Тобто, ФВ виробничої системи до:  $fp(xp, Vp)$ , і після оновлення  $fp(xp, Vp + \Delta Vp)$ .

Умова нестрого домінування

$$k = 1, \dots, K; xp_k = \Delta x \cdot k; fp(xp_k, Vp + \Delta Vp) \geq fp(xp_k, Vp). \quad (2.5)$$

Функції розвитку змінюють параметри функцій виробництва

$$\Delta Vp1 = f1r(x1r); \Delta Vp2 = f2r(x2r).$$

Запишемо вирази для прирощення виходу першого і другого елементів

$$\begin{cases} \Delta y1 = f1p(x, Vp1 + \Delta Vp1) - f1p(x, Vp1), \\ \Delta Yvux = f2p(y1 + \Delta y1, Vp2 + \Delta Vp2) - f2p(y1, Vp2). \end{cases} \quad (2.6)$$

Завжди можливо записати приращення виходу  $\Delta Y_{vux}$  як функцію ресурсів розвитку:  $\Delta Y_{vux} = \phi(x_{1r}, x_{2r})$ , це функція, що монотонно зростає по кожній змінній, тому ця функція є функцією від функцій  $f_{1p}, f_{2p}, f_{1r}, f_{2r}$ , що монотонно зростають.

Для виробничої системи з послідовно поєднаних елементів глобальний критерій системи з чисто логічних міркувань повинен бути мультиплікативною формою від локальних критеріїв елементів (якщо один з елементів вертикально інтегрованої системи непрацездатний, то всі наступні елементи не зможуть функціонувати) [34, 52, 78, 85, 89, 131, 260, 261].

Тобто функція  $\Delta Y_{vux} = \phi(x_{1r}, x_{2r})$  є узагальненою мультиплікативною.

Враховуємо обмеження ресурсу, вводимо безрозмірну змінну  $\alpha$  і приходимо до задачі оптимізації функції змінної  $Xx$ , що монотонно зростає

$$0 \leq \alpha \leq 1; x_{1r} = Xx \cdot \alpha; x_{2r} = Xx \cdot (1 - \alpha); \Delta Y_{vux} = \Psi(\alpha, Xx). \quad (2.7)$$

Таким чином, ми звели постановку задачі оптимізації довільної підсистеми з двох елементів до постановки відповідної задачі оптимального агрегування паралельної структури. Тепер, при розробці бінарного оператора і дослідженні процесів оптимального агрегування користуємось методологією попередньої задачі, зокрема, у доведенні теорем.

**Теорема 2.3.** Бінарний оператор оптимального агрегування для виробничої системи (ВС) з  $N$  послідовно поєднаних елементів, які мають ФВ, що нестрого монотонно зростають, і узагальнений мультиплікативний критерій оптимальності ВС є асоціативним і некомутативним, що дозволяє замінити  $N$ -вимірну задачу оптимізації послідовністю з одновимірних задач оптимізації, що потребує  $(N - 1)$  застосування бінарних операцій оптимального агрегування послідовних структур до суміжних пар послідовної структури, що в підсумку дає оптимальну еквівалентну функцію «витрати–випуск» виробничої системи.

Доведення аналогічне доведенню теореми для паралельних структур і подане в додатках. Логіка доведення – виділення довільної сумі-

жної пари виробничих елементів і порівняльний аналіз оптимальних розподілів ресурсів в парі для глобального і локального розв'язання.

Таким чином, багатовимірна задача оптимізації розподілу ресурсів розвитку у виробничій системі з послідовно поєднаними елементами замінюється послідовністю задач оптимального агрегування для суміжних пар елементів.

Розглянемо порядок оптимізації для випадку заміни мультиплікативного критерію адитивним: задаємо моделі ВФ елементів, локальні критерії та параметри цих моделей; логарифмуємо вираз для критерію і отримуємо адитивний критерій; визначаємо для адитивної задачі оптимальну еквівалентну ВФ та вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу; обчислюємо відповідні функції для мультиплікативної задачі. Записуємо для порівняння поряд адитивний і мультиплікативний критерії ефекту розподіленої системи:

$$I_s = \sum_{i=1}^N f(x_i, A_i, w_i, s_i); \quad I_m = \prod_{i=1}^N f(x_i, A_i, w_i, s_i). \quad (2.8)$$

Використаємо символічний процесор для отримання потрібного нам виразу – логарифм від «добутку», від добутку переходимо до суми:

$$\ln \left( \prod_{i=1}^N f(x_i, A_i, w_i, s_i) \right) \rightarrow \sum_{i=1}^N \ln(f(x_i, A_i, w_i, s_i)). \quad (2.9)$$

Введемо означення

$$F4l(x, Av, wv, sv) := \ln(F4l(x, Av, wv, sv)) \quad (2.10)$$

і запишемо вираз для критерію еквівалентної задачі:

$$Jml(R, \alpha) = \sum_{i=1}^N F4l(R \cdot \alpha_i, A_i, w_i, s_i). \quad (2.11)$$

Таким чином, задача з мультиплікативним критерієм оптимізації зведена до вже розв'язаної задачі оптимального агрегування паралельних структур.

### 2.2.2 Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої виробничої системи з довільною структурою

Аналогічні результати були отримані для структур «система з параметричними зв'язками» та «система із зворотним ресурсним зв'язком» (див. схеми 4, 5 на рис. 2.1). На базі застосування методології оптимального агрегування отримані робочі моделі бінарних операторів оптимального агрегування, що дозволяють замінювати певну структуру виробничої системи еквівалентним за входом–виходом виробничим елементом [117, 131].

У теорії динамічних систем визначення операцій з паралельними, послідовними і кільцевими структурами дозволяють виконувати еквівалентні перетворення довільних структур динамічних систем з цими трьома класами структур. Подібна алгебраїзована методика може бути розроблена для довільних структур з послідовними, паралельними і кільцевими поєднаннями, що дозволяє звести довільну структуру до оптимального еквівалентного елемента.

Визначимо змістовно структуру, яку коротко названо кільцевою. В даній роботі розглядається ресурсний зворотний зв'язок у виробничих системах. Суть ресурсного зворотного зв'язку: поряд з цільовим, потрібним для користувачів продуктом, виробнича система продукує побічні продукти з від'ємною цінністю – відходи. Відходи можуть бути хімічними, біохімічними, тепловими, радіобіологічними, тепловими. Головний недолік сучасного стану захисту навколишнього середовища в тому, що етапи розробки нових продуктів і розробки засобів безпечної утилізації відходів є досить розведені в часі і просторі. Маються на увазі типові ситуації, коли засоби утилізації починають розроблятися вже після запуску певної технології виробництва цільового продукту.

Результати даної роботи знаходять використання в розв'язанні проблеми відходів агровиробництв, де потрібні математичні моделі для оптимізації структури виробництв з переробкою відходів в біореакторних системах. Значна частина сучасних виробництв використовує технології, за якими співвідношення цільового продукту і відходів складає 1:5 (птахофабрики), 1:15 (свинокомплекси), 1:35 (м'ясо-молочні комплекси). Подібний стан в металургії, гірничодобувній галузі та ін.



В практичному плані потрібна розробка і дослідження фактично нового класу інтегрованих моделей оптимального функціонування і розвитку виробничих систем з урахуванням аспектів відновлення і захисту навколишнього середовища. В екологічному плані це замикання та ізоляція всіх циклів стабілізації екологічних збурень, викликаних певним виробництвом, в межах саме даного виробництва. Інноваційний шлях розвитку виробництва пов'язаний з відсутністю потрібної для побудови моделі виробництва інформації. Ресурсний зворотний зв'язок може включати такі конструкторсько-технологічні рішення:

- протиструминні теплообмінники – використання тепла води і повітря, що скидаються в навколишнє середовище і оборотне водопостачання – коли технологічна вода та розчини після певної обробки (елемент в зворотному зв'язку) використовуються знову;

- розширення спектру корисних продуктів на базі більш повної переробки вхідних ресурсів виробництва і переробка органічних відходів на базі штучних екологічних систем – біореакторів [34, 52, 76, 85, 89, 131, 260, 261].

Розглянемо процес оптимального агрегування виробничої системи з довільною структурою, формальний приклад якої подано на рис. 2.8. Порядок агрегування: виділення груп виробничих елементів з паралельними і послідовними поєднаннями, оптимальне агрегування цих груп – заміна їх еквівалентними елементами; виділення груп виробничих елементів, що утворюють прості (такі, що не мають в собі інших контурів) контури з ресурсними зворотними зв'язками, оптимальне агрегування цих контурів – заміна їх оптимальними еквівалентними елементами. Якщо контур тільки один, то процес агрегування закінчується – буде отримано оптимальний еквівалентний за входом–виходом елемент складної виробничої системи. Загальні ресурси функціонування і розвитку виробничої системи будуть розподілені оптимально. Якщо контур ресурсного зворотного зв'язку не є єдиним, то всі контури агрегуються, отримується відповідна агрегована структура – паралельне, послідовне поєднання, контур, до яких застосовуються відповідні операції оптимального агрегування. Процес агрегування закінчується, коли отримується один оптимальний еквівалентний елемент.

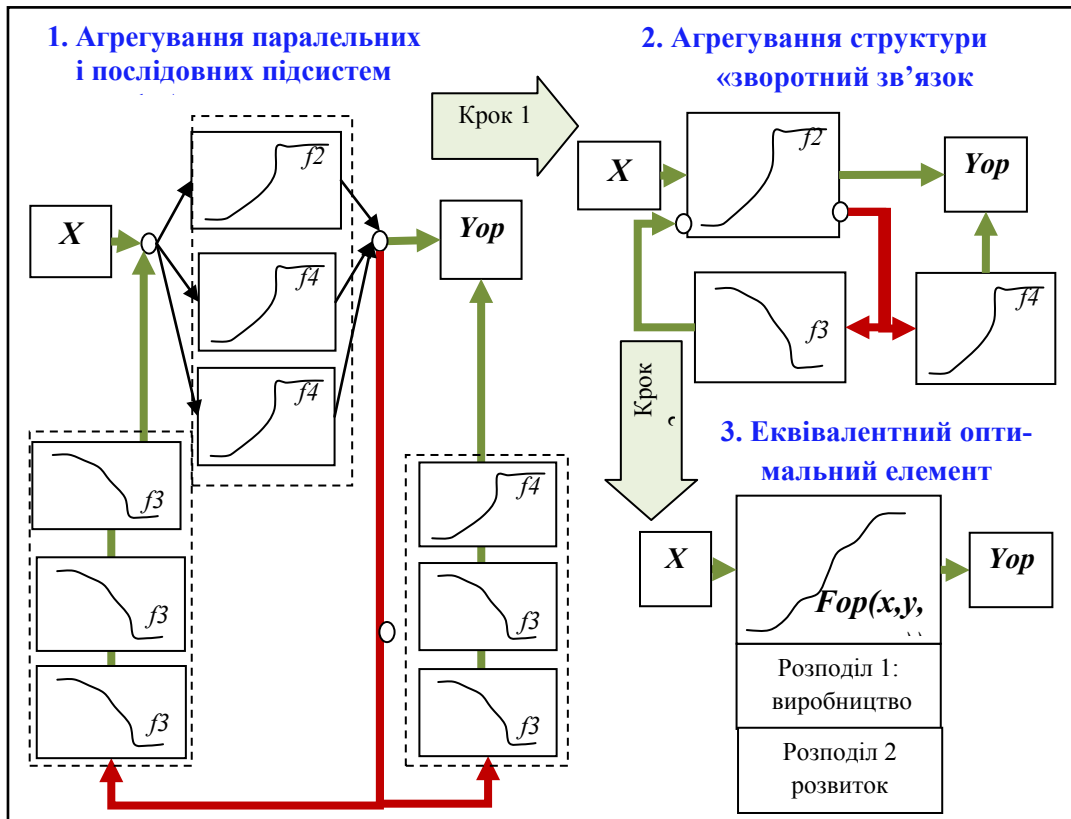


Рисунок 2.8 – Агрегування розподіленої виробничої системи з довільною структурою

Сучасні програмні і апаратні засоби дозволяють побудувати раціональні технології створення математичних моделей розподілених виробничих систем [33, 68, 77–79, 83, 174, 175]. Раціональна інформаційна технологія – технологія, що дозволяє розробити нову математичну модель і програму моделювання для нової задачі при кінцевих витратах ресурсів і часу. Згідно з досвідом розробки нових моделей нова робоча модель може бути створена за 1–3 місяці роботи одного-двох розробників [33, 34]. Обмеження технології – розробник повинен мати відповідну професійну підготовку, обсяг і напрями якої подані в посібниках [35–40]. Суть підготовки – глибокі знання в практичному програмуванні, теорії оптимального управління та системному аналізі [39, 40, 256, 258].

Згідно з запропонованою схемою агрегування виробничих систем з довільними структурами було вирішено декілька прикладних задач. На рис. 2.9 подано приклад оптимального агрегування системи з переробкою відходів (це фрагмент документації, переданої в рамках угоди про творчу співдружність).

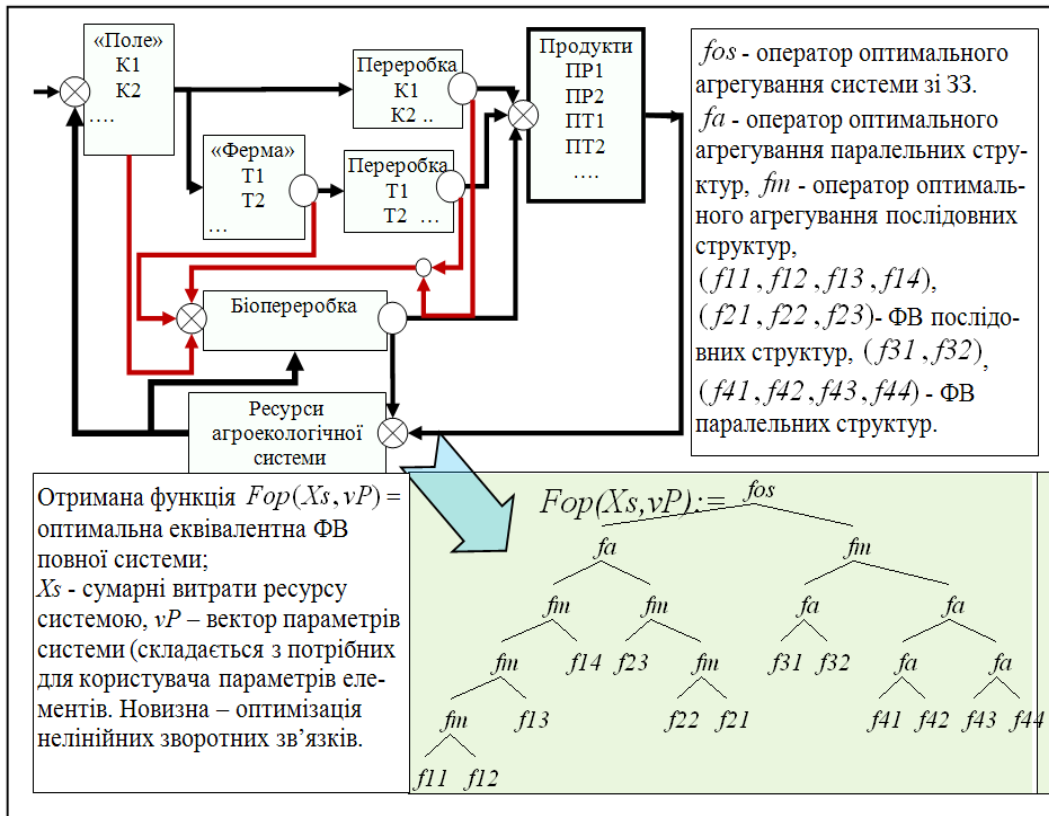


Рисунок 2.9 – Приклад оптимального агрегування виробничої системи з переробкою відходів основного виробництва

У верхній частині подано схему агроекологічної системи, де згідно з технологіями виробництва пов'язані підсистеми «рослинництво», «тваринництво», «переробка продуктів рослинництва», «переробка продуктів тваринництва» і «переробка відходів виробництв». Скорочення на схемі: К1, К1, ... – рослинні культури, Т1, Т2, ... – види тваринництва, ПР1, ПР2, ... – види продуктів. В нижній частині – відображення реальної виробничої системи в схему оптимального агрегування. На цій схемі: *fos* – оператор оптимального агрегування системи з ресурсним зворотним зв'язком (33); *fa* – оператор оптимального агрегування паралельних структур; *fn* – оператор оптимального агрегування послідовних структур; (*f11, f12, f13, f14*), (*f21, f22, f23*) – функції виробництва елементів послідовних структур, (*f31, f32*), (*f41, f42, f43, f44*) – ФВ паралельних структур;  $Fop(Xs, vP)$  – оптимальна еквівалентна ФВ повної системи;  $Xs$  – сумарні витрати ресурсу системою;  $vP$  – вектор параметрів системи (складається з потрібних для користувача параметрів елементів, в операторах оптимального агрегування можливо частково, або повністю стирати пам'ять попередніх агрегувань). Слід відзначити, що дове-

дення такої задачі до рівня системи підтримки рішень – досить трудомістка задача прикладного системного аналізу, але з гарантованим кінцевим результатом. Наявність ієрархії агрегувань дозволяє використовувати системи на базі оптимального агрегування з перших кроків розробки системи підтримки рішень, користуючись наближеними моделями ФВ на різних рівнях.

Ще одна перевага методу в тому, що він малочутливий до розмірності задачі. В поданому прикладі кількість елементів виробничої системи вимірюється сотнями, але метод оптимального агрегування дозволяє працювати з цілісною оптимально агрегованою системою і легко визначити через ланцюги пам'яті попередніх агрегувань функцію впливу варіацій параметрів елемента нижнього рівня на показники ефективності великої виробничої системи.

Виходячи з попередніх отриманих результатів і властивостей характеристик виробничих систем, можна сформулювати певні теореми про можливість декомпозицій задачі оптимізації виробничої системи з довільною структурою в послідовність задач оптимізації малої розмірності.

**Теорема 2.4.** Структура ресурсних зв'язків раціональної виробничої системи, елементи якої мають нестрого монотонні узагальнені ФВ, а зв'язки відносяться до класів паралельних, послідовних і кільцевих поєднань може бути ізоморфно відображена в ієрархічне бінарне дерево оптимального агрегування, операнди нижнього рівня якого – узагальнені ФВ елементів, а вузли – бінарні оператори оптимального агрегування паралельних, послідовних структур і структур з ресурсними зворотними зв'язками, що дозволяє замінити багатовимірну задачу оптимізації ВС послідовністю з одновимірних задач оптимізації, і в підсумку дає оптимальну еквівалентну функцію «витрати–випуск» виробничої системи.

Доведення теореми базується на використанні попередніх результатів: теорем для паралельного і послідовного поєднань, агрегування контуру з ресурсним зворотним зв'язком; властивостей функціональних перетворень для монотонних функцій; властивостей систем  $\alpha$ -функцій для бінарних операцій оптимального агрегування. Паралельно з аналітичним доведенням теореми про агрегування довільних структур виробничих систем було виконано дослідження на робочих моделях оптимального агрегування типових структур з різними видами поєднань.

На рис. 2.10 подані паралельна, послідовна і кільцева структури для виробничих систем і приклади їхнього оптимального агрегування. Для перших двох структур подано по три проекції тривимірного графіка цільової функції з накладеним на цільову функцію годографом максимумів.

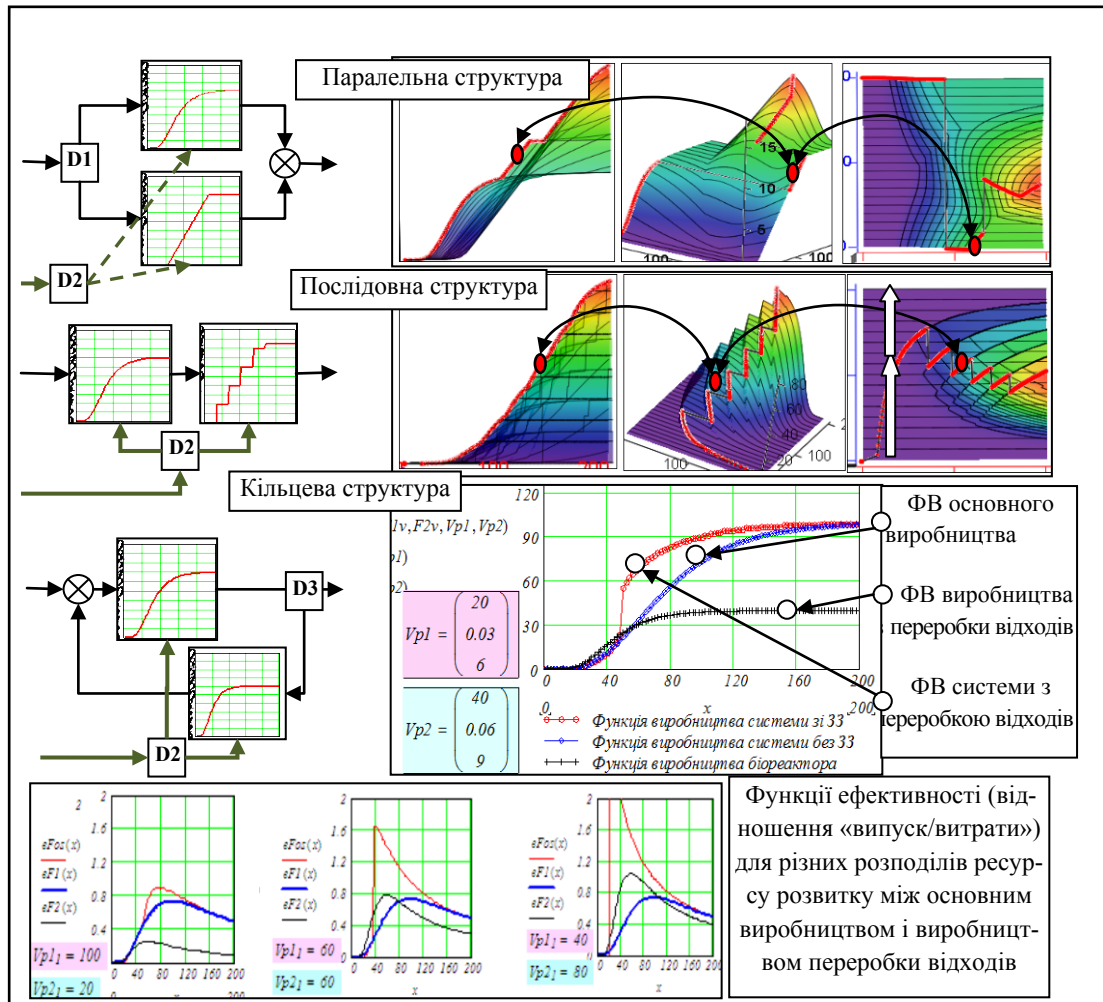


Рисунок 2.10 – Дослідження оптимальних управлінь для паралельної, послідовної і кільцевої структур виробничих систем

Перша проекція – візуальне підтвердження, доведеного твердження: – обвідна альфа-функцій сходиться до оптимальної еквівалентної функції виробництва [33]; третя проекція – функція оптимального розподілу ресурсу. Інтерпретація кільцевої структури – виробнича система з переробкою відходів основного виробництва у ресурси і продукти. Аналіз і оптимізація таких структур – об’єкт запровадження. Для

кільцевої структури подано три графіки функцій виробництва основного виробництва, виробництва з переробкою відходів, системи з переробкою відходів. В нижній частині рис. 2.10 подано графіки ефективності системи для кільцевої структури для трьох значень розподілу ресурсу 120 у. о. між основним виробництвом ( $Vp1_1$ ) і переробкою відходів ( $Vp2_1$ ):  $Vp1_1 = 100$  і  $Vp2_1 = 20$ ,  $Vp1_1 = 60$  і  $Vp2_1 = 60$ ,  $Vp1_1 = 40$  і  $Vp2_1 = 80$ .

Коректність і ефективність бінарних операторів – необхідна умова коректності і ефективності оптимального агрегування довільних структур. Додаткова мета досліджень операторів – відпрацювання засобів і методів візуального аналізу тривимірних об'єктів, що дозволяють зрозуміти причини розривності оптимальних управлінь. Для паралельного і послідовного поєднань подано один і той же комплект тривимірних графіків в різних ракурсах (див. рис. 2.10). Комплект графіків складається з графіка цільової функції для системи з двох елементів  $For(X, \alpha)$  в просторі змінних  $X$  – обмеження ресурсу системи,  $\alpha$  – пропорції розподілу ресурсу між елементами, та графіка годографа максимумів цільової функції в залежності від величини обмеження ресурсу. Перша пара графіків – проекція 3D графіка на площину  $(For, X)$ . Можемо бачити  $\alpha$ -функції та їх обвідну – оптимальну еквівалентну функцію виробництва системи з двох елементів з відповідним зв'язком. Друга пара графіків – проекція, на якій подана послідовність залежностей цільової функції при фіксованих значеннях обмеження ресурсу і годограф максимумів цих функцій. Третя пара графіків – проекція 3D графіка на площину  $(X, \alpha)$ . Проекція годографа максимумів подає функцію оптимального розподілу ресурсу в безрозмірному вигляді – це графік функції  $\alpha(X)$ . Розмірний розподіл ресурсу

$$x1(X) = \alpha(X) \cdot \Delta x; \quad x2(X) = (1 - \alpha(X)) \cdot \Delta x.$$

В нижній частині рис. 2.10 подано в іншому форматі аналіз оптимального агрегування системи з ресурсним зворотним зв'язком. Це кінцева частина процесу агрегування системи, поданої на рис. 2.9. Кільцева структура є специфічною, порівняно з паралельною і послідовною, але її заміна оптимальним еквівалентним елементом теж вирішується на базі методології оптимального агрегування. Нижня частина

рис. 2.10 – графіки функцій ефективності для різних значень  $\alpha$  – розподілу ресурсу розвитку між основним виробництвом і переробкою відходів. Саме такий формат подання результатів є звичним і зручним для практиків.

Таким чином, підхід на базі оптимального агрегування інтегрує в собі:

- метод еквівалентністних перетворень певного класу структур з нелінійними елементами – функцій виробництва;

- метод оптимізації певних функцій багатьох змінних при обмеженнях;

- систему алгебри, носіями якої є функції виробництва – моделі виробничих систем як технологічних перетворювачів ресурсу (подібну до алгебри перетворень структурних схем в теорії лінійних динамічних систем).

Розв’язання низки оптимізаційних задач дозволило виділити загальні підходи, які в сукупності утворюють нову методологію – оптимального агрегування. Побудована алгебра оптимального агрегування дозволяє «довільні» структури виробничих систем замінювати еквівалентним оптимальним елементом. Саме це є головною складовою методології розв’язання варіаційних задач розвитку або багатокрокових задач прийняття рішень за термінологією Р. Беллмана.

На рис. 2.11 подано структуру і зміст досліджень, що реалізують методологію оптимального агрегування.

Наведені результати досліджень однокрокової задачі функціонування і розвитку складають перший науковий результат № 1.

*Формулювання.* Вперше розроблено методологію побудови еквівалентних оптимальних елементів для паралельних, послідовних і кільцевих структур виробничих систем на базі методу оптимального агрегування, що відрізняється від існуючих методів агрегування отриманням оптимальної характеристики «вхід–вихід», а від існуючих методів оптимізації розподілу ресурсів – декомпозицією багатовимірної задачі оптимізації в послідовність одновимірних задач. *Це в підсумку робить* метод нечутливим до виду функцій виробництва, і малочутливим до розмірності виробничої системи, що дозволяє будувати ефективні моделі для оптимізації процесів функціонування і розвитку оптимально агрегованих виробничих систем.

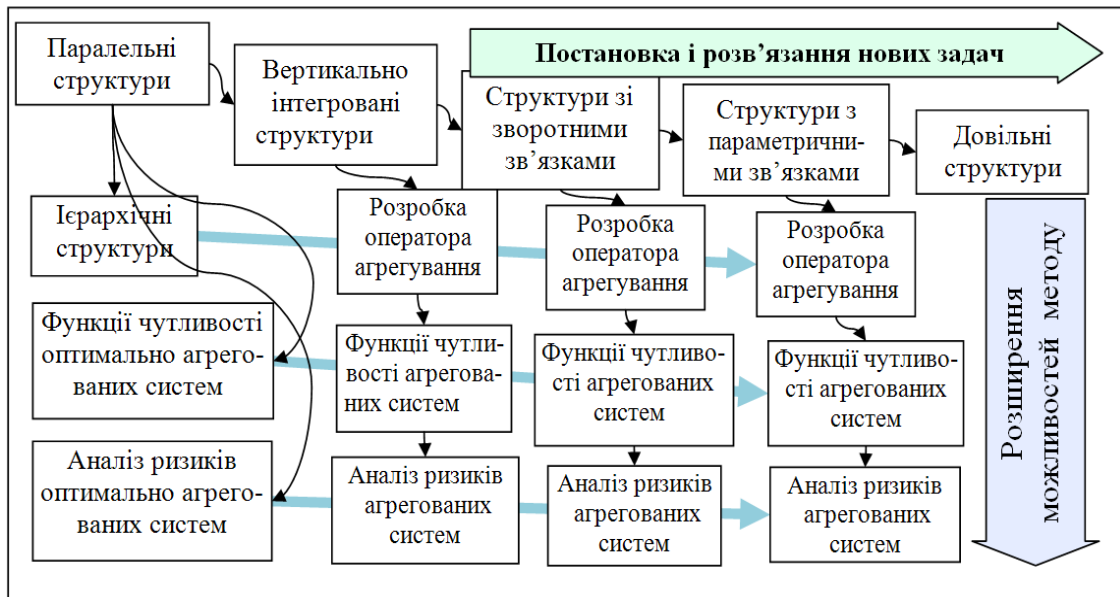


Рисунок 2.11 – Методологія оптимального агрегування. Структура

*Відмінність від аналогів* – загальний прототип – методи нелінійного програмування, єдиний близький прототип «метод оптимального агрегування для виробничих систем з паралельно працюючими елементами» [206]. *Відмінність* – розширення області застосування на системи з довільними структурами. *Актуальність* – існує потреба в універсальних, швидких і точних методах оптимального розподілу ресурсів у розподілених виробничих системах. *Суть результату* – інваріантне занурення задачі нелінійного програмування в задачу отримання залежності оптимального розподілу від величини обмеження, розбиття задачі знаходження екстремуму функції багатьох змінних в послідовність задач знаходження екстремуму функції меншого числа змінних (методологія Р. Беллмана).

### 2.3 Розробка базової моделі оптимального розвитку

Отримані в 2.1 і 2.2 результати дозволяють побудувати ефективні обчислювальні методи отримання розв'язків низки варіаційних задач розвитку виробничих систем. Першоджерелом для побудови базової робочої моделі оптимального розвитку виробничої системи були роботи Р. Беллмана – постановка, дослідження варіаційної «задачі розподілу» та її окремого випадку, – «задачі Марковіца», для якої Беллман знайшов



розв'язання для випадку лінійних функцій виробництва [24–26]. Ці аналоги були проаналізовані на рівні робочих моделей (розділ 1).

Запропоновані в даному підрозділі моделі і методи розв'язання варіаційної задачі розвитку мають такі відмінності від моделі Беллмана: використано метод принципу максимуму для отримання оптимальної стратегії, а не динамічне програмування; використано метод оптимального агрегування для зведення багатопродуктової виробничої системи до еквівалентного оптимального елемента;

- розширено постановку задачі введенням можливості використання зовнішніх ресурсів;

- принцип оптимальності у Беллмана застосовується для обґрунтування декомпозиційного підходу в оптимізації багатокрокових процесів: «оптимальна стратегія має ту властивість, що при будь-якому початковому стані і початковому управлінні, наступне управління повинно складати оптимальну стратегію відносно поточного і кінцевого стану», а в даній роботі цей принцип застосовується для задач розподілу ресурсу в «просторі» – між елементами системи і формулюється так: *«для деякої підсистеми, оптимальний розподіл ресурсу між елементами підсистеми залежить тільки від обсягу ресурсу, виділеного для цієї підсистеми, і не залежить від ресурсів, виділених іншим елементам»*. Ці відмінності суттєво розширили можливості моделі, зокрема: модель не має обмежень за видом функцій виробництва елементів виробничої системи; обсяг обчислень оптимального управління для багатопродуктової задачі несуттєво зростає з ростом розмірності задачі тому, що операція агрегування виконується тільки один раз – на початку процесу моделювання.

Задачі оптимального розвитку є складними багатовимірними варіаційними задачами, аналітичні розв'язання яких існують тільки для занадто спрощених моделей. Розроблений і досліджений в даній роботі метод розв'язання задач оптимального розвитку дозволяє звести варіаційну задачу з інтегральним критерієм першого роду (інтегральний неквадратичний) до алгебраїчної задачі.

### **2.3.1 Постановка задачі оптимального розвитку**

Отримані в підрозділах 2.1 і 2.2 моделі оптимізації для однокрокових задач – необхідний елемент для побудови ефективних моделей і методів оптимізації процесів розвитку виробничих систем. Багатокро-

кові задачі розвитку – широка область теорії і практики. В роботі досліджується порівняно вузький клас варіаційних задач – окремий випадок задачі Больца. Управління в задачах цього класу – розподіл ресурсу між розвитком виробничої системи і накопиченням. Базовий аналог цих розробок – поставлена і досліджена Р. Беллманом «задача розподілу». Ціль оптимізації в прямій задачі – максимізація інтегрального критерію «накопичення», в спряженій – мінімізація витрат на задану програму розвитку. Проблема розмірності задачі розвитку більш вагома порівняно з однокроковою задачею: розмірність розподіленої задачі множиться на кількість інтервалів часу процесу розвитку при числових методах розв’язання, тобто збільшується на порядки.

Для розв’язання задач розвитку виробничих систем вибрано метод оптимального агрегування і метод принципу максимуму Понтрягіна. На початку дослідження не ставилась мета побудувати саме новий метод, шукались моделі і методи для розв’язання наближених до реальності задач розвитку виробництва без обмежень на вид математичних моделей функцій виробництва і розвитку та підінтегральний вираз для критерію. Структура дослідження багатокрокових задач аналогічна структурі дослідження однокрокових задач – розв’язання і дослідження базової задачі, потім ще декількох значимих для практики задач такого ж класу з узагальненнями методу розв’язання до методології. Це досить довгий шлях до кінцевих результатів. Тому на рис. 2.12 подано в дискретній формі базову модель, а в правій колонці – пункти новизни цієї моделі. Оптимальне агрегування розподіленої ВС дозволяє розділити багатовимірну варіаційну задачу на дві: субоптимізація – заміна ВС оптимальним еквівалентним елементом; розв’язання варіаційної задачі розвитку для еквівалентного елемента методом принципу максимуму. Кожна з цих багатовимірних задач розбивається в послідовність одновимірних задач оптимізації на базі методів оптимального агрегування і методу принципу максимуму.

Суть новизни методології в тому, що спочатку виконується субоптимізація – оптимальне агрегування розподіленої виробничої системи, згідно з принципом оптимальності: «скільки б ресурсу не виділялося системі, він повинен розподілятися оптимально». Отримуємо одновимірну еквівалентну оптимальну систему. Для цієї системи розв’язуємо методом принципу максимуму Понтрягіна задачу оптимального розвитку. Метод принципу максимуму – декомпозиційний, в ньому зада-

ча знаходження екстремуму інтегрального функціонала замінюється задачею максимізації функції Гамільтона на кожному кроці. Змінні оптимізації – пропорція розподілу поточних ресурсів між розвитком і накопиченням (прирощенням інтегрального критерію).

<p><b>Оптимальне агрегування:</b>  <i>заміна ВС оптимальним еквівалентним елементом</i>  <b>Модель розвитку ВС.</b> ФР: <math>y1_k = fr(x1_{k-1}, Vp1_{k-1}, k1)</math>,  ФВ: <math>y2_k = fv(x2_{k-1}, Vp2_{k-1} + Ds(y1_{k-1}), k2)</math>, <math>k = 1, \dots, N</math>; ФР, ФВ -  функції розвитку і виробництва; <math>y1</math> - виробн. потужн., <math>y2</math> - виробництво;  <math>x1, x2</math> - ресурс розвитку і виробництва, <math>Vp1, Vp2</math> - вектори параметрів  ФР і ФВ; <math>k1, k2</math> - класи ФР, ФВ; <math>Ds(y1)</math> - функція способу розвитку.  <b>Базова задача оптимізації процесу розвитку ВС:</b>  <b>Критерій оптимізації:</b>  <math>J_N = \sum_{k=1}^N fv(x2_{k-1}, Vp2_{k-1}, k2) \cdot \alpha_k \cdot \Delta T \rightarrow \max</math>;  <b>Змінна управління</b> <math>\alpha_k</math> - розподіл ресурсу між розвитком і накопиченням:  <math>x1_k = y2_{k-1} \cdot (1 - \alpha_{k-1}) \cdot \Delta T</math>. <b>Обмеження управління:</b> <math>0 \leq \alpha_k \leq 1</math>.  Функція Гамільтона, визначення:  <math>H(x, u) = \sum_{i=0}^N \psi_i \cdot f_i</math>; <math>\frac{d}{dt} \psi_J(t) = -\frac{\partial}{\partial J} H(x, u)</math>; <math>\frac{d}{dt} \psi_x(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, u)</math>  <b>Оптимальне управління</b> <math>\alpha_{op} = argmax_{\alpha} (H(x_k, \alpha_k))</math>.  <b>Деагрегування:</b> розподіл ресурсів між підсистемами ВС.  <b>Спряжена задача.</b> Мінімізація накопичених витрат при заданій програмі  випуску продукції.</p>	<p><b>Н1 Єдина структура варіаційної задачі</b> роз-  витку ВС: одновимір-  ний динамічний об'єкт  – оптимально агрегова-  на ВС.  <b>Н2 Єдиний метод оп- тимізації</b> функції Гамі-  льтона для всіх функцій  виробництва і розвитку  класу «нестрого моно-  тонні, нестрого позити-  вні, обмежені».  <b>Н3 Отримання оптима- льної стратегії іміта- ційним моделюван- ням оптимального процесу розвитку.</b>  <b>Н4 Дворівнева деком- позиція</b> багатовимірної  варіаційної задачі роз-  витку в системі одно-  вимірних задач оптимі-  зації.  <b>Нові наукові результати Н1 – Н4</b></p>
---	--

Рисунок 2.12 – Базова модель оптимального розвитку виробничої системи

У практичному аспекті, згідно зі схемою на рис. 2.13, задача оптимального розвитку розподіленої виробничої системи розбивається на задачу розподілу обмеженого ресурсу між елементами системи і задачу розподілу поточного ресурсу виробничої системи між витратами на розвиток і накопиченням. Ці дві задачі в свою чергу розбиваються в послідовності одновимірних задач згідно з методом оптимального агрегування і методом принципу максимуму. В аспекті обчислювальних методів задача знаходження екстремуму функції  $N \cdot K$  змінних замінюється задачею знаходження екстремумів  $(N - 1) \cdot (K - 1)$  функцій однієї змінної. Ці змінні – нормовані безрозмірні пропорції розподілу ресурсу в парі елементів та пропорції розподілу між накопиченням та розвитком.

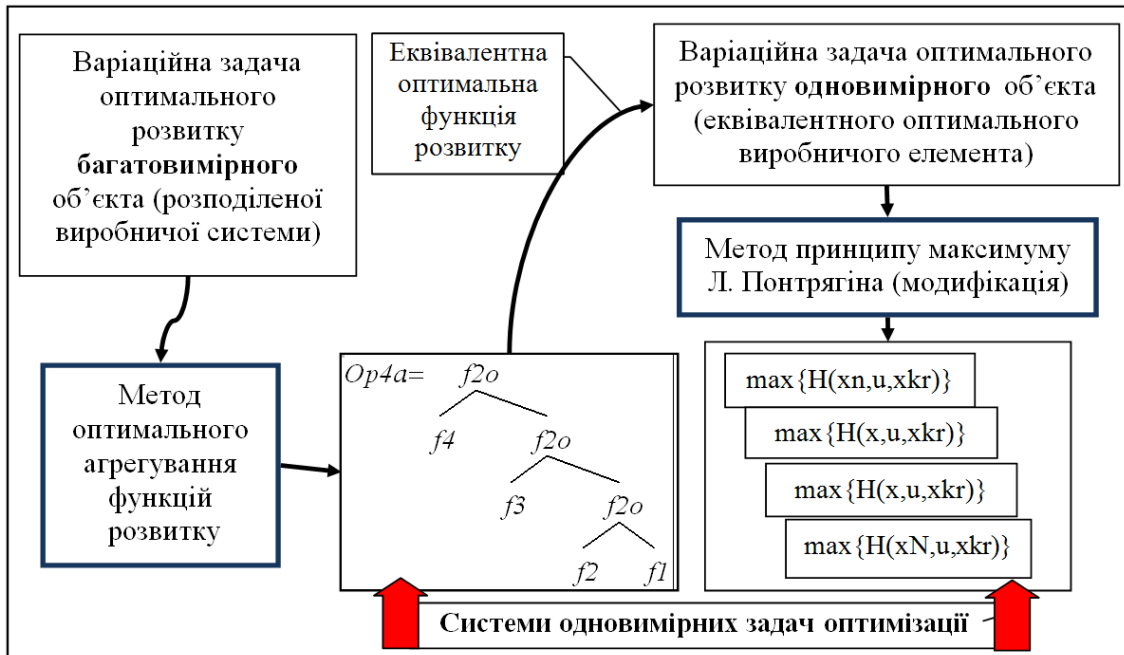


Рисунок 2.13 – Декомпозиційна структура для варіаційної задачі розвитку

Запропонований метод – окремий випадок методології інваріантного занурення «точкових» задач оптимізації в множину задач даного класу. В цьому випадку знаходимо функціональну залежність розв'язку від змінної управління – значення обмеження по ресурсу. Обчислювальні переваги запропонованого методу обумовлені тим, що на нижньому рівні декомпозиції отримуємо одновимірні задачі.

### 2.3.2 Декомпозиція базової задачі оптимального розвитку

У цьому пункті розробляємо і досліджуємо базову модель розвитку з постійними функціями розвитку та необмеженими потребами в продукті. Модель є кроком, елементом поточного стану метамоделі – динамічної структури наближених моделей розвитку і кінцевим продуктом для певної групи практичних задач планування і прогнозування.

На відміну від аналогів розглядаємо довільні залежності між темпом витрат ресурсу в розширення виробництва і прирощенням темпу виробництва – функції розвитку. Можна знайти безліч прикладів нелінійних залежностей такого плану на будь-яких рівнях виробництва – від окремого хімічного реактора до підприємства в цілому. Для побудови загальних методів оптимізації і моделювання є принциповим те, що залежності такого виду теж відносяться до виробничих функцій. Різниця тільки в тому, що результатом витрат ресурсу є не продукт, а зміна темпу виробництва продукту. В математичному плані виробничі

функції і залежності прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу відносяться до одного класу математичних об'єктів. Однак на рівні конкретних прикладних задач це різні функції. Щоб відрізнити їх назовемо функції виробництва «другого порядку» функціями розвитку (ФР). Розмірність функцій виробництва (ФВ) – «(одиниць вимірювання продукту)/(одиниць вимірювання ресурсу)», розмірність функцій розвитку (ФР) – «(одиниць вимірювання продукції за одиницю часу)/(одиниць вимірювання ресурсу за одиницю часу)». Виробничий елемент є технологічним перетворювачем ресурсу у продукт. Найпростішим способом зміни темпу виробництва є кількісна зміна в технологічному перетворювачі – збільшення кількості окремих агрегатів, збільшення об'єму чи поверхні реактора та ін.

Можливі і якісні зміни технологічного перетворювача, що ведуть до прирощення темпу випуску продукції: підвищення температури і тиску, використання певних «високих технологій», наприклад, одномолекулярних плівок.

Залежність прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу звичайно є результатом дії багатьох імовірнісних і детермінованих «механізмів». Саме наявність багатьох причин і факторів певним чином уніфікує і згладжує ці залежності – вони сходяться до функцій  $S$ -класу [190, 195, 197, 218]. Однак, ми будемо шукати метод розв'язання узагальненої задачі для довільних ФР, в тому числі і «негладких», що не мають неперервної похідної. Очевидний приклад – нарощування і модернізація виробничих потужностей введенням стандартних модулів.

Сформулюємо узагальнену задачу. Маємо децентралізовану систему, де виробляються  $N$  видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$  (одиниць вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \text{fin}_i(y_i(t)) = \text{fin}_i(xs(t) \cdot u_i), \quad (2.12)$$

де  $\text{fin}_i(y_i(t))$  – функція розвитку для  $i$ -го виробництва, що належить до класу нестрого монотонно зростаючих функцій;  $xs(t) = \sum_{j=1}^N x_j(t)$  – сумарне виробництво в момент  $t$ ;  $0 \leq u_i(t) \leq 1$  – управління – частка сумарних поточних ресурсів, що виділяється в поточний момент для розши-

рення виробничих потужностей по  $i$ -му продукту. Для управління виконується умова нормування

$$\sum_{j=1}^N u_j(t) + unak(t) = 1, \quad (2.13)$$

де  $unak(t)$  – частка ресурсів, що йде в накопичення.

Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку, що максимізує сумарний накопичений випуск за певний плановий період  $T$

$$J_N = \int_0^T \left( \sum_{j=1}^N x_j(t) \right) \cdot unak(t) dt. \quad (2.14)$$

Типова інтерпретація планового періоду  $T$  – момент зміни технології і конструкції виробу  $i$ , відповідно, засобів виробництва. Базуючись на попередніх отриманих результатах формулюємо теорему про заміну розподіленої виробничої системи еквівалентним оптимальним елементом.

**Теорема 2.5.** Варіаційна задача оптимального, за інтегральним критерієм першого роду, розвитку виробничої системи (ВС) з довільною структурою ресурсних зв'язків (теорема 2.4) може бути розбита в послідовність двох оптимізаційних задач: 1) задачі оптимального агрегування ВС, 2) одновимірної задачі оптимального розвитку яка розв'язується методом принципу максимуму, що дозволяє замінити багатовимірну задачу оптимізації розвитку системою одновимірних задач оптимізації – бінарних операцій оптимального агрегування і одновимірних задач максимізації функції Гамільтона, і в підсумку дає оптимальну стратегію розвитку для кожного елемента і для ВС в цілому.

**Доведення** базується на порівнянні функцій Гамільтона для оптимально агрегованої і неагрегованої ВС і властивостях оптимальної еквівалентної ФВ (теорема 2.4). Далі наведено приклад доведення теореми для випадку ВС з паралельно поєднаними елементами. Доведення для інших припустимих структур виконуються аналогічно. Запишемо функцію Гамільтона для виробничої системи. На кожному кроці процесу розвитку повинна обчислюватись ця функція і знаходитись її максимум по змінних  $\alpha$  і  $u_j$ :

$$Hka(x, \alpha, u) = xs \cdot (1 - \alpha) + \left( \sum_{j=1}^N fin_j(xs \cdot \alpha \cdot u_j) \right) \cdot (Tp - t) - zp(t) \cdot [1 + pr \cdot (Tp - t)], \quad (2.15)$$

де  $xs$  – сумарний ресурс виробничої системи;  $0 \leq \alpha \leq 1$  – безрозмірна змінна управління – розподіл ресурсу між розвитком і накопиченням;  $u_j, j = 1, \dots, N$  – безрозмірні управління нижнього рівня;  $u_1 + u_2 + \dots + u_N = 1$ , – частки ресурсу розвитку для кожного елемента виробничої системи;  $Tp$  – плановий період для процесу розвитку;  $t$  – поточний час процесу;  $zp(t)$  – темп зовнішніх для даної системи ресурсів. Перша складова в (2.15):  $xs \cdot (1 - \alpha)$  – ресурси виділені в накопичення.

На кожному кроці процесу розвитку повинна обчислюватись ця функція та знаходитись її максимум по змінних  $\alpha$  і  $u_j$ . Друга складова в (2.15) (вираз в дужках) визначає сумарне поточне прирощення темпу виробництва. Незалежно від того, якою буде частка ресурсу для розвитку, розподіл ресурсу між розвитком окремих виробництв повинен бути оптимальним. Запишемо локальну задачу оптимізації другої складової виразу в дужках в стандартному вигляді. Введемо означення

$$R = xs \cdot \alpha, \quad r_i = R \cdot u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Визначимо:

– цільову функцію  $N$  змінних

$$F(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{j=1}^N fin_j(r_j); \quad (2.16)$$

– обмеження ресурсу

$$G(r_1, r_2, \dots, r_N) = R - \sum_{j=1}^N r_j = 0, \quad (2.17)$$

– обмеження управління

$$0 \leq u_j \leq 1. \quad (2.18)$$

Потрібно знайти розподіл  $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ , що дає максимум цільової функції та задовольняє обмеження. Застосовуємо метод оптимального агрегування для задачі з адитивним критерієм (2.16–2.18) Шукаємо функціональну залежність  $Dop(R)$  – вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу. Деякий компонент вектор-функції  $Dop(R)_j$  визна-

чає залежність оптимального для  $i$ -го елемента системи обсягу ресурсу від загального обмеження по ресурсу. Визначимо еквівалентну оптимальну функцію розвитку

$$Fop(R) := \sum_{j=1}^N fin_j(Dop_j(R)). \quad (2.19)$$

Числовими методами оптимізації завжди можна знайти функції  $Fop(R)$  та  $Dop(R)$ . Нарешті підставимо (2.19) у (2.15) і отримуємо вираз для функції Гамільтона еквівалентної оптимальної системи:

$$Hka(x, a) = xs \cdot (1 - a) + Fop(xs \cdot a) \cdot (Tp - t) - zp(t) \cdot [1 + pr(Tp - t)]. \quad (2.20)$$

Еквівалентність заміни суми в (2.15) на оптимальну еквівалентну функцію в (2.20) випливає з теореми 2.2 про еквівалентність оптимально агрегованої функції багатовимірній функції за входом–виходом для всіх значень сумарного ресурсу в діапазоні визначення. Тепер, якщо у вираз (2.15) підставити оптимальні значення  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , то функції (2.15), (2.20) будуть тотожними функціями  $xs$  і  $\alpha$ .

$$argmax_{\alpha} (Hk(xs, \alpha, u_{op}(xs \cdot \alpha))) = argmax_{\alpha} (Hka(xs, \alpha)).$$

Тобто, тотожними будуть і оптимальні стратегії розвитку. Теорему доведено.

Розглянемо практичні аспекти застосування еквівалентних оптимальних моделей розвитку. В модель еквівалентної оптимальної моделі розвитку входить оптимальна еквівалентна ФР системи  $Fop(xs \cdot a)$ , що отримана методом оптимального агрегування. Ця функція розраховується один раз (за умови досить постійних параметрів функцій розвитку), а потім використовується в розв'язанні одновимірної еквівалентної варіаційної задачі. За умови, що функція Гамільтона і її екстремум визначаються числовими методами, розв'язання задачі оптимального розвитку може бути отримане для широкого кола моделей виробництва, розвитку, обмежень і критерію оптимальності.

### 2.3.3 Точне розв'язання узагальненої задачі розподілу

Отримання функції Гамільтона – досить складна, але повністю розв'язана в загальному вигляді задача. В даному дослідженні вона розв'язується з застосуванням числових методів розв'язку диференціальних рівнянь. Далі подано приклади отримання точних розв'язань



для актуальних задач розвитку. Отримаємо точний розв'язок для задачі оптимального розвитку для виробничої системи з паралельно працюючими елементами. Задано:

– критерій оптимальності  $J_1 = \int_0^{T_p} x(t) \cdot (1 - u(t)) \cdot dt$ ;

– диференціальне рівняння динаміки прирощення темпу виробництва

$$\frac{d}{dt} x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t));$$

– обмеження управління  $0 \leq u(t) \leq 1$ .

Подаємо задачу в канонічному вигляді. Додаємо ще одну змінну стану – критерій і записуємо відповідні рівняння:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) = f_x; \quad \frac{d}{dt} J_1(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) = f_J. \quad (2.21)$$

Запишемо вираз для функції Гамільтона [24, 208]

$$H(x, u) = \sum_{i=1}^N \Psi_i \cdot f_i = \Psi_J \cdot f_J + \Psi_x \cdot f_x, \quad (2.22)$$

де  $f_J, f_x$  – праві частини рівнянь (2.21). Підставимо їх у (2.22)

$$H(x, u) = \Psi_J \cdot [x(t) \cdot (1 - u(t))] + \Psi_x \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (2.23)$$

Записуємо рівняння для визначення спряжених функцій [24, 208]

$$\frac{d}{dt} \Psi_J(t) = -\frac{\partial}{\partial J} H(x, u); \quad \frac{d}{dt} \Psi_x(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, u). \quad (2.24)$$

Знаходимо окремі похідні від  $H(x, u)$  (2.22) і підставляємо їх в (2.24)

$$\frac{\partial}{\partial J} H(x, u) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} H(x, u) = \Psi_J \cdot (1 - u) + \Psi_x \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x).$$

Розв'язуємо отримані диференціальні рівняння. Перше рівняння – для випадку максимізації критерію  $J_1$  –

$$\frac{d}{dt} \Psi_J(t) = 0; \quad \Psi_J(t) = \text{const}.$$

Для вирішення другого рівняння використовуємо числові методи. Розв'язання визначено як функція заданого параметра

$$\frac{d}{dt}\Psi_x(t) = -\Psi_J \cdot (1-u) - \Psi_x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x) = -\Psi_x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x) - (1-u). \quad (2.25)$$

«Фізичний зміст» цієї спряженої функції – «ціна»(вага) виробничих потужностей відносно критерію оптимальності (що немає ніякого відношення до «цін» у економістів). Природно, що вона падає з часом тому, що ми включили в критерій тільки накопичення і задали обмежений плановий період, тому «ціна» фондів з часом спадає до нуля. Це реалістично в умовах швидких змін технологій та засобів виробництва, коли обладнання не встигає відпрацювати свій фізичний ресурс.

Підставимо розв'язання диференціальних рівнянь для спряжених функцій у (2.23) і отримаємо остаточний вираз для функції Гамільтона

$$H(x, u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + \psi_n(u, x, dFr, k) \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)), \quad (2.26)$$

де спряжена функція  $\psi_n(u, x, dFr, k)$  визначена в середовищі пакета моделювання як функція управління  $u$ , темпу випуску продукції  $x$ , похідної від функції розвитку  $dFr$ .

### 2.3.4 Наближене розв'язання задачі розвитку

Сьогодні автоматизовані системи управління виробництвом стають все більше «моделезалежними» – такими, що обов'язково мають в контурі управління модель-еталон або модель-предиктор. Це обумовлює потребу в швидких методах розробки задовільних моделей, і диктує відповідну технологію створення моделей для автоматизованих систем управління. Зокрема, отримання аналітичного розв'язання певної задачі управління є першим кроком створенням еталонних моделей для процесів розробки задовільних за точністю і обчислювано ефективних моделей для вбудовування в контури управління.

На рис. 2.14 подано схему розподілу ресурсу на поточному кроці на фоні графіка зміни виробничих потужностей. На цій схемі  $S1 = x(t) \cdot (1 - u(t))$  – це та частина поточного ресурсу, що йде в накопичення;  $S2$  – те, що йде в інвестиції. Згідно з рівнянням динаміки виробничих потужностей частина  $S2 = x(t) \cdot u(t)$  створює прирощення  $\Delta x = \text{fin}(x(t) \cdot u(t))$  виробничих потужностей.

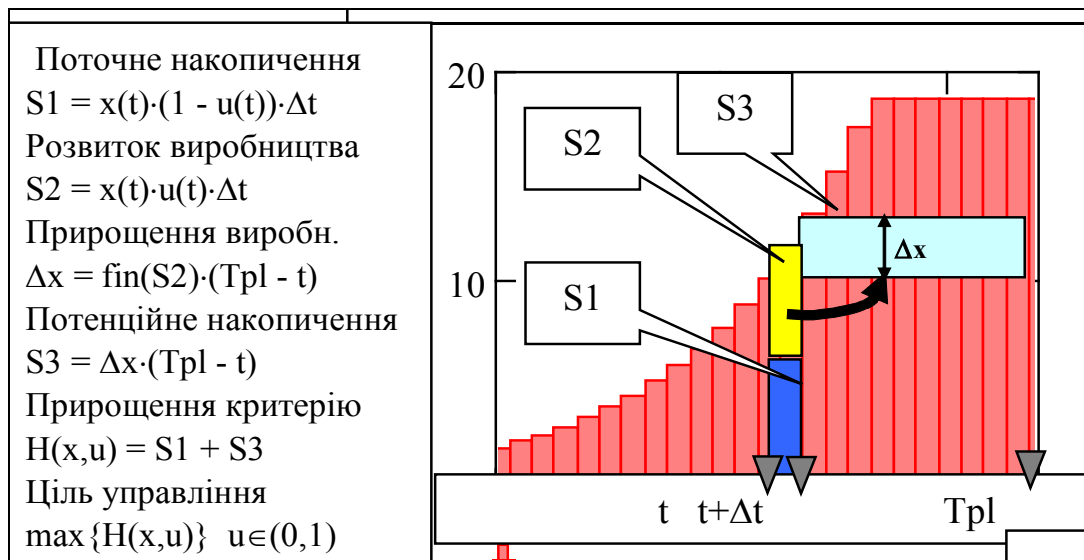


Рисунок 2.14 – Схема розподілу ресурсу на поточному кроці

Оцінимо прирощення продукції, що можна отримати до кінця процесу,

$$S3 = \Delta x \cdot (T - t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t).$$

Це додатковий ресурс, який можна на наступних кроках використати для накопичення і розвитку. Розподіл ресурсу повинен бути теж оптимальним. Якщо продовжити ці міркування ми прийдемо до методу динамічного програмування. Однак параметри сучасних виробничих систем є суттєво невизначеними.

Будемо вибирати управління  $u(t)$  так, щоб отримати максимум функції  $H(x,t) = S1 + S3$ , яка є оцінкою (індикатором) приросту значення критерію

$$H(x,u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t) \rightarrow \max_{u \in (0,1)} (H(x,u)). \quad (2.27)$$

Припущення про конвертованість ресурсів, з одного боку, робить задачу більш реалістичною, з іншого – суттєво спрощує її. Дійсно, кожна функція інвестицій тепер явно залежить тільки від одного управління. Спрощується також підінтегральна функція критерію оптимальності. В реальних системах виділений ресурс сам по собі ще не гарантує певного прирощення виробничої потужності. Для реального розширення виробництва часто бувають необхідні десятки ресурсів і робіт, і все це повинно бути оптимізоване і скоординоване. Однак, відносно стратегічної задачі розвитку, це задачі субоптимізації.

### 2.3.5 Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язків

Головні наукові результати роботи отримані на основі послідовного використання методології Р. Беллмана, що дозволяє описати широкий клас процесів управління в точних математичних термінах. Саме керуючись методологією Беллмана, використали для розв'язання узагальненої задачі розвитку метод принципу максимуму, а не динамічне програмування. Однак, на базі аналізу аналітичних результатів Беллмана для випадку лінійних функцій розвитку отримали наближене розв'язання. Природно проаналізувати точність наближеного методу порівняно з точним методом. На першому етапі таке порівняння було виконано просто засобами обчислювальних експериментів – порівнянням точних і наближених процесів. Для типових задач розвитку отримано точність

- за значенням критерію сумарного накопичення – в межах 3–4 %;
- за середнім відхиленням наближеної функції управління від точної (оптимальної стратегії) – в межах 2–5 %.

На другому етапі виконано аналітичне дослідження питань точності і збіжності за методологією Беллмана [24–26]. Класичний метод послідовних наближень заснований на ідеї розв'язання послідовності рівнянь чи задач, які сходяться до бажаного рівняння чи задачі. Беллман пропонує при постановці варіаційних задач розглядати два різних типи питань. Одне з них – питання про визначення оптимального управління, інше – про одержання квазіоптимального управління, що дає кращі результати, ніж при використанні загальноприйнятого управління (типу лінійних регуляторів по вектору стану). Дискретизуємо функцію Гамільтона (2.26) і порівняємо її з наближеною (2.27).

$$\text{Точна: } H(x_k, u_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot \psi_n(u_k, x_k, dFr, k).$$

$$\text{Наближена: } Hn(x_k, u_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot (T - t).$$

Можна бачити, що вирази відрізняються тільки останнім множником. Це дає нам право назвати вираз наближенням функції Гамільтона. Можна прийти до цього наближення і канонічним формалізованим шляхом – отримати точний вираз для  $\varphi x(t)$ , розкласти цю функцію в ряд і взяти перше лінійне наближення.

Проведемо кількісне порівняння функцій  $H(x_k, u_k)$  та  $H_n(x_k, u_k)$ . На рис. 2.15 подано дві проекції тривимірних графіків, де побудовано еволюцію в часі функції Гамільтона – точної і наближеної. На графіку, що на рис. 2.15б, побудовано максимуми цієї функції – вони значно відрізняються, однак положення цих максимумів, значення оптимального управління, є досить близькими і однаковими за структурою: спочатку «все в розвиток», потім гладкі, «Ейлерові» за класифікацією Беллмана, ділянки, а в кінці процесу – «все в накопичення».

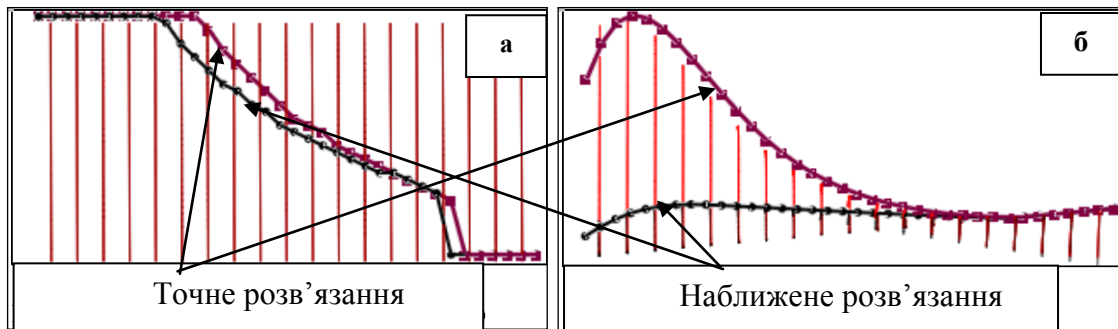


Рисунок 2.15 – Залежність максимуму функції Гамільтона від часу процесу:  
 а) оптимальні стратегії; б) величина максимуму функції

Зведення варіаційних задач розвитку до еквівалентних одновимірних знімає майже всі проблеми обчислення оптимальної стратегії, крім проблеми отримання спряжених функцій і функції Гамільтона в реальному часі. За результатами аналізу робіт Р. Беллмана в області апроксимації в просторі стратегій [164–166] розроблено і досліджено відповідний метод для задач оптимального розвитку виробничих систем. Отримання наближень функції Гамільтона складає новий науковий результат № 2: отримав подальший розвиток метод Беллмана отримання наближень у просторі стратегій управління для розв'язання варіаційної задачі розвитку, що відрізняється від існуючого методу тим, що варіаційна задача розвитку виробничої системи розв'язується методом принципу максимуму Понтрягіна, а не методом динамічного програмування. Це дозволяє отримувати наближення оптимальної стратегії, що дають значення інтегрального критерію, яке відрізняється від оптимального на 2–3 %.

Відмінність від аналогів [164–166] задач: управління запасами при невизначеностях та згладжування в системі «виробництво–

постачання» в тому, що цей результат був отриманий для задачі іншого класу з об'єктом – еквівалентним оптимальним елементом ВС. Суть результату (заміна оптимальної стратегії, розрахованої для номінальних значень параметрів моделі об'єкта) зменшує значення інтегрального критерію, однак зменшення обчислювальних витрат дозволяє реалізувати корекцію стратегії розвитку за наявності збурень [127, 130]. Порівняння альтернатив: «точна стратегія для ВС з номінальними параметрами» і «наближена стратегія з адаптацією до невизначеностей і збурень» дає перевагу другій альтернативі при збуреннях параметрів більше 5 %. Модель оцінки ефективності апроксимації подана в додатку Б [71].

## **2.4 Дослідження моделі оптимального розвитку**

Коректна, обчислювально ефективна, відкрита для змін, незалежна від виду вхідних функцій (лінійні, квадратичні, випуклі та ін.) робоча математична модель стає генератором результатів, які можна назвати «віртуальною статистикою», а також нових знань про об'єкт управління, таких що неможливо отримати на реальних об'єктах (довгі процеси розвитку, відсутність потрібних вимірювань, небезпечність натурних експериментів, конфіденційність). Для проведення цілеспрямованих та інтенсивних обчислювальних експериментів потрібні спеціалізовані робочі моделі і відповідні інтерфейси. В цьому підрозділі стисло подано приклади базових моделей та інтерфейсів для проведення досліджень на моделях – об'єктів запровадження.

### **2.4.1 Аналіз процесів розвитку**

Первинний аналіз процесів розвитку виробничих систем складається з таких етапів: введення вхідних даних елементів, агрегування узагальнених виробничих функцій елементів, введення вхідних даних виробничої системи, побудова процесу розвитку, дезагрегування входів і виходів для кожного елемента, аналіз функцій Гамільтона. Моделі цієї роботи переважно дискретизовані. Крім забезпечення обчислювальної ефективності це обумовлено специфікою оптимізації при невивуклих і негладких ФВ. Оптимальні розв'язання однокрокових задач – розривні. Такі ж проблеми виникають і для розв'язань багато-

крокових задач. На рис. 2.16 подано приклад аналізу функції Гамільтона та оптимальної стратегії розвитку.

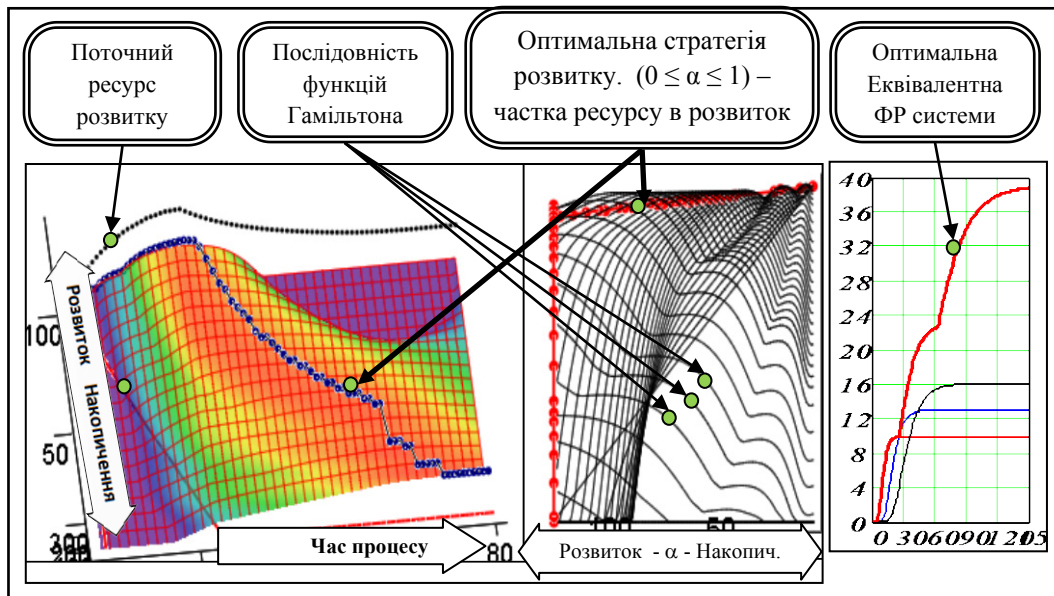


Рисунок 2.16 – Еволюція функції Гамільтона в процесі розвитку ВС. Приклад

Тривимірний графік складений з послідовності функцій Гамільтона оптимально агрегованої ВС з трьох елементів для кожного кроку квантування часу процесу. Бачимо складний для аналітичних методів характер функції Гамільтона (три локальних максимуми – відповідно до характеру оптимальної еквівалентної ФР системи). Отримана оптимальна стратегія розвитку відповідає структурі, отриманій Беллманом для узагальненої задачі розподілу, вона складається з ділянок: «все в розвиток», «Ейлерової ділянки» та «все в накопичення».

На базі отриманих теоретичних результатів були виконані програмно методичні розробки для запровадження. Розроблена методологія дозволяє виконувати повний аналіз оптимального процесу розвитку (рис. 2.17).

Це другий етап після аналізу функції Гамільтона. Бачимо «синтаксичну» коректність моделі оптимального розвитку: складний розривний характер розподілу ресурсу і нерозривні, монотонні залежності для темпів виробництва. За наявності помилок в моделі або програмі виникають розриви темпів виробництва.

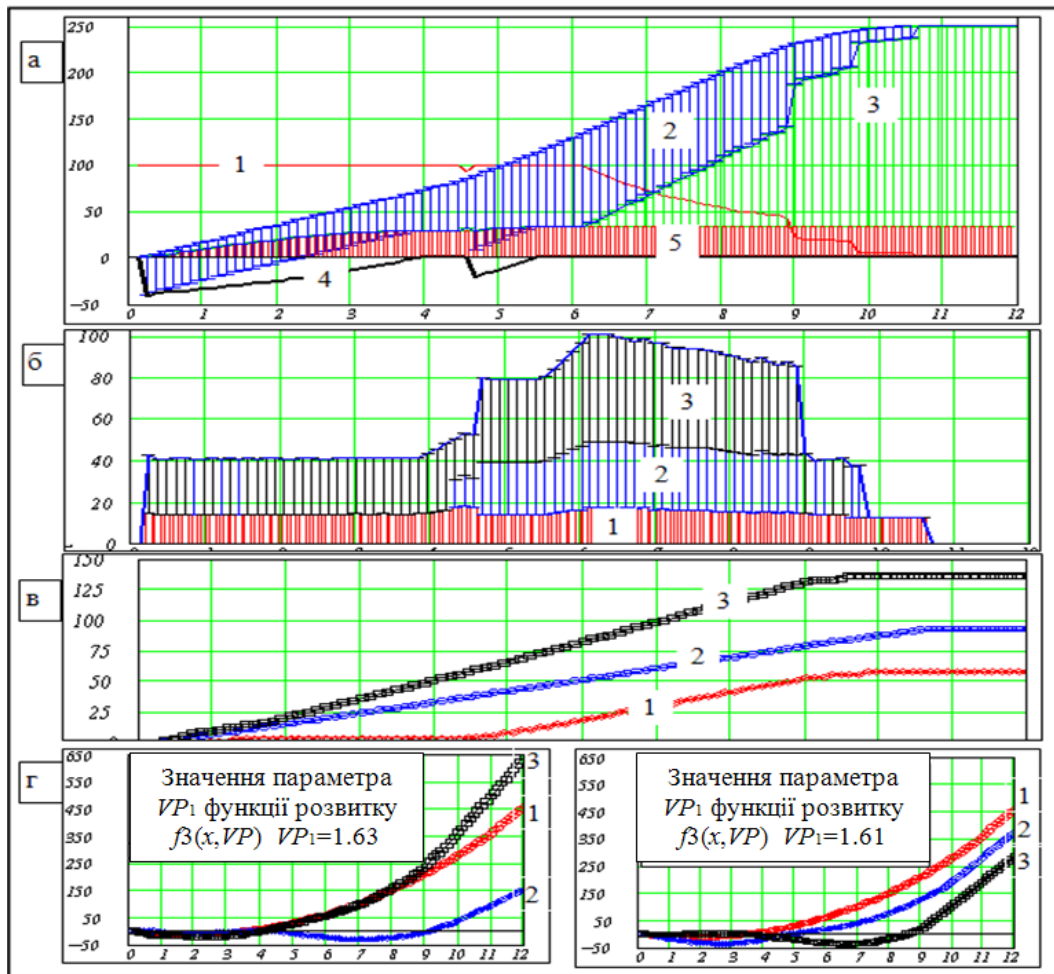


Рисунок 2.17 – Приклад розрахунку оптимального процесу розвитку:  
а – процеси в системі (1 – оптимальна стратегія розвитку – безрозмірна функція розподілу ресурсу системи між розвитком і накопиченням, 2 – витрати розвитку, 3 – накопичення, 4 – кредитування, 5 – повернення кредитів);  
б – витрати ресурсів на розвиток елементів 1, 2, 3;  
в – темпи виробництва в елементах 1, 2, 3; г – порівняння процесів віддачі елементів при двох значеннях параметра ФР елемента №3: 1,63 і 1,61

В процесі розвитку для кожної підсистеми можна обчислити графік «ефективності» – різниці або відношення витрат на розвиток певної підсистеми і накопиченого випуску. В останньому ряду (див. рис. 2.17) подано два графіки накопичених результатів підсистем. Бачимо суттєві зміни результатів при зміні параметра однієї ФР на 1%. Це специфіка оптимальних процесів розвитку, що породжує важливий для практики і цікавий для науки напрямок досліджень – аналіз чутливості і ризиків оптимальних стратегій розвитку.



## 2.4.2 Аналіз впливу невизначеностей

Розроблені орієнтовані на відповідні класи задач системи інтерфейсів. На рис. 2.18 подано версію інтерфейсу для програми моделювання та оптимізації процесу розвитку.

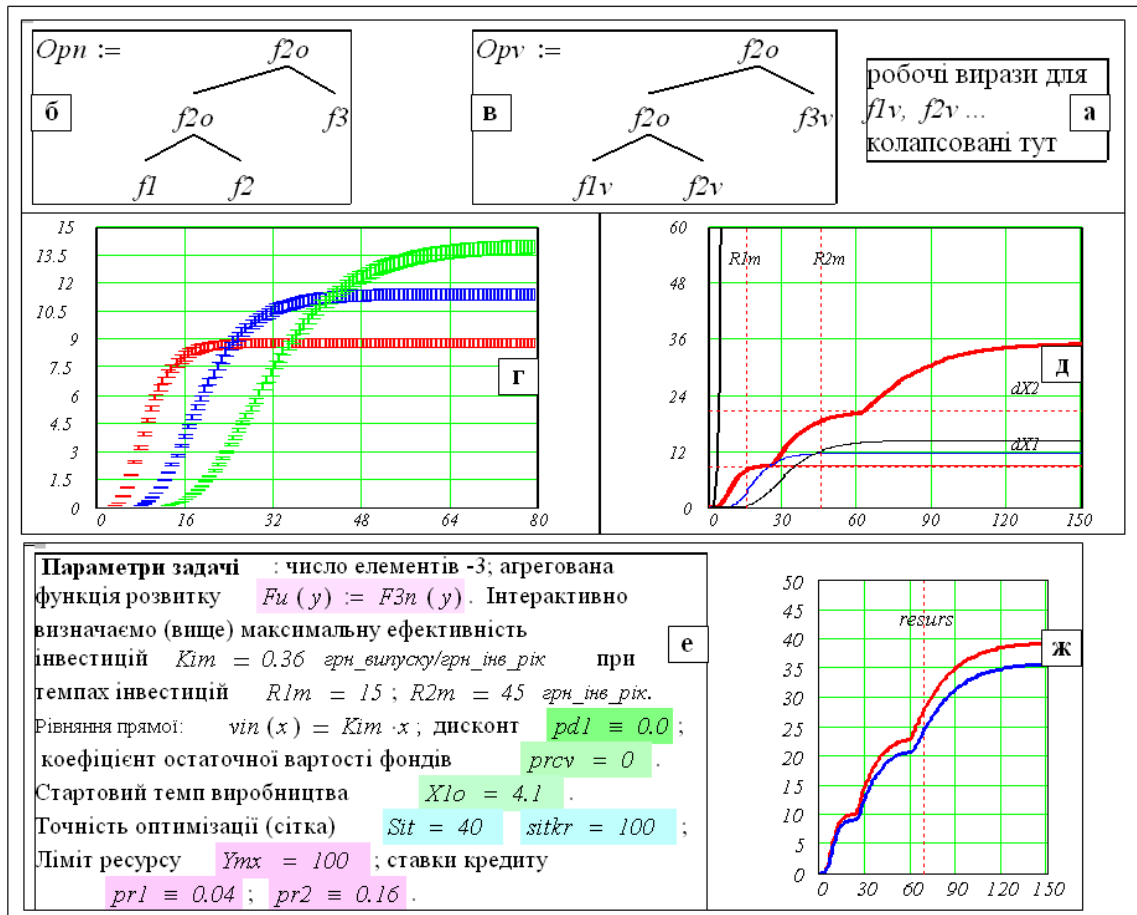


Рисунок 2.18 – Інтерфейс для «що буде якщо» аналізу. Введення даних; а – вікно введення функцій розвитку; б – формула оптимального агрегування для номінальних функцій  $f1, f2, f3$ ; в – формула оптимального агрегування для збудованих функцій  $f1v, f2v, f3v$ ; г – розкиди функцій  $f1, f2, f3$ ; д – результат – оптимальна еквівалентна функція розвитку (ОЕФР); е – введення параметрів задачі; ж – результат – незбурена і збурена ОЕФР

Нова модель є потенційним джерелом отримання нових результатів про властивості системи, зокрема статистики «віртуальної реальності». Сумісне використання даних для реальних систем і даних, отриманих на моделі, має великий синергетичний ефект. При необхідності можливо збільшення розмірності задачі. На рис. 2.18 подано випадок повної інформованості системи оптимального управління роз-

поділом навантаження. В ситуації, коли оптимальне управління розраховано для номінальних значень параметрів, то втрати в ОЕФР будуть значно більшими [154]. Необхідна умова ефективності такого підходу – ефективні інтерфейси – обов’язкові складові комплексу певної моделі. Саме інтерфейси є головним компонентом запровадження результатів даної роботи в організаціях. Розроблений інтерфейс складається з двох частин: введення даних (див. рис. 2.18); аналіз впливу розкиду параметрів виробничої системи.

На рис. 2.19 подано другу частину інтерфейсу – аналіз впливу розкиду параметрів виробничої системи.

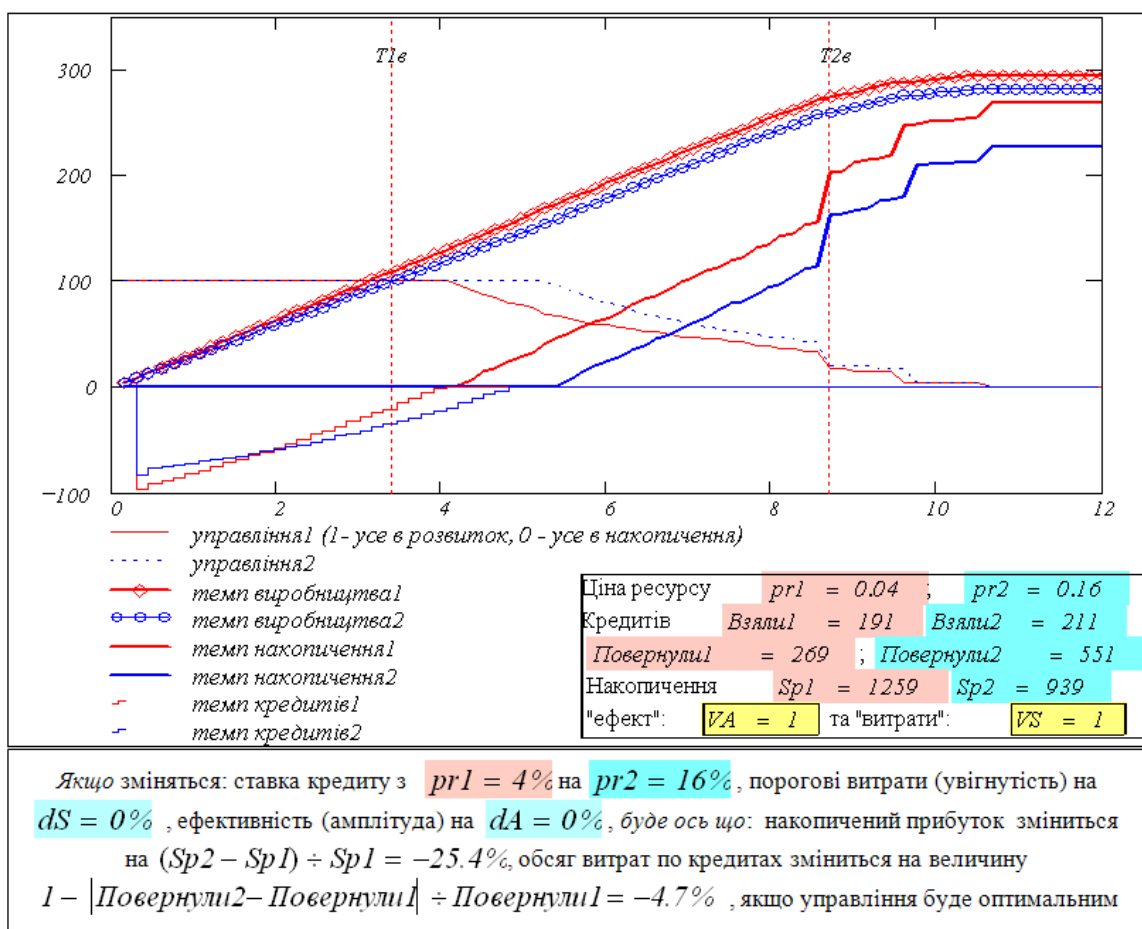


Рисунок 2.19 – Стенд для аналізу впливу розкиду параметрів системи

Подано два процеси – номінальний і збурений. В правому куту – паралельно подані показники процесів, які в першу чергу цікавлять користувача системи підтримки рішень. Нижче – резюме, згенероване автоматично. Розглянуті розробки є об’єктами впровадження теоретичних результатів, як макети для створення систем підтримки

рішень. Це тільки дві сторінки з десяти сторінкового інтерфейсу, серед яких побудова функцій чутливості, частотних розподілів вихідних показників за наявності випадкових невизначеностей і збурень [33, 34, 36, 39, 40].

## **2.5 Розробка і дослідження моделі оптимального розвитку з урахуванням освоєння**

Конкретні сценарії процесів розвитку виробничих систем досить відмінні і не зводяться до однієї базової задачі. Тому мета дослідження моделей процесів розвитку була не отримання розв'язку конкретної задачі, а побудова раціональної методології для класу задач.

Поданий далі матеріал – приклад створення структурної версії розробленої системи робочих моделей для задачі розвитку з урахуванням ефектів освоєння. В цьому підрозділі повторюється послідовність кроків модифікації моделі розвитку з підрозділів 2.2–2.3 і виконується необхідна модифікація. Головна структурна зміна – заміна змінної управління  $\alpha$  – пропорції розподілу поточного ресурсу між накопиченням та витратами на розвиток на змінну  $cp$  – «ціна». Зауважимо, що ця змінна не є «ціною» в обліково-фінансовому аспекті, а є більш фундаментальною, системною змінною – пропорцією розподілу «цінності» продукту згідно з концепцією «справедливого розподілу цінності між виробником і користувачем». Сьогодні концепція ринку і ринкових цін як ефективних регуляторів виробництва і потреб визнана неадекватною і хибною.

### **2.5.1 Розробка моделі оптимального розвитку при урахуванні ефектів освоєння нового виробництва**

Розробка поданих далі математичних моделей розвитку була досить довгим процесом пошуку прототипів [1–8, 20–30, 156–158, 167, 168, 171–175, 180–186, 190, 194–200, 218, 249–253], власних розробок [32] та випробування в обчислювальних експериментах структурних альтернатив для загальної моделі процесу та її складових – функціональних субмоделей. Пошук в Інтернеті за ключем «оптимальні цінові стратегії» дає 57 000 джерел, що свідчить про актуальність задачі, однак робіт з математичними моделями, тим більше з постановкою і розв'язанням варіаційних задач, не знайдено.

В [103, 208] доведено, що у варіаційній задачі розвитку з адитивним критерієм і обмеженнями можна замінити елементи з певними функціями розвитку (ФР), що працюють паралельно, еквівалентним елементом, функція розвитку якого для кожного значення витрат ресурсу дає максимальне значення прирощення сумарного темпу виробництва. В підрозділі 2.1 доведено можливі заміни довільних структур оптимальними еквівалентними елементами. На цій підставі розглядаємо еквівалентну однопродуктову задачу розвитку. Після знаходження оптимального управління розвитком еквівалентної системи, можливо виконати дезагрегування – визначення управління для кожного елемента розподіленої системи [205].

На рис. 2.20 подано структурну схему процесу розвитку з урахуванням «навчання» в стандартах теорії управління – з детальним описом входів і виходів виділених функціональних блоків, з використанням суматорів та блока «множення».

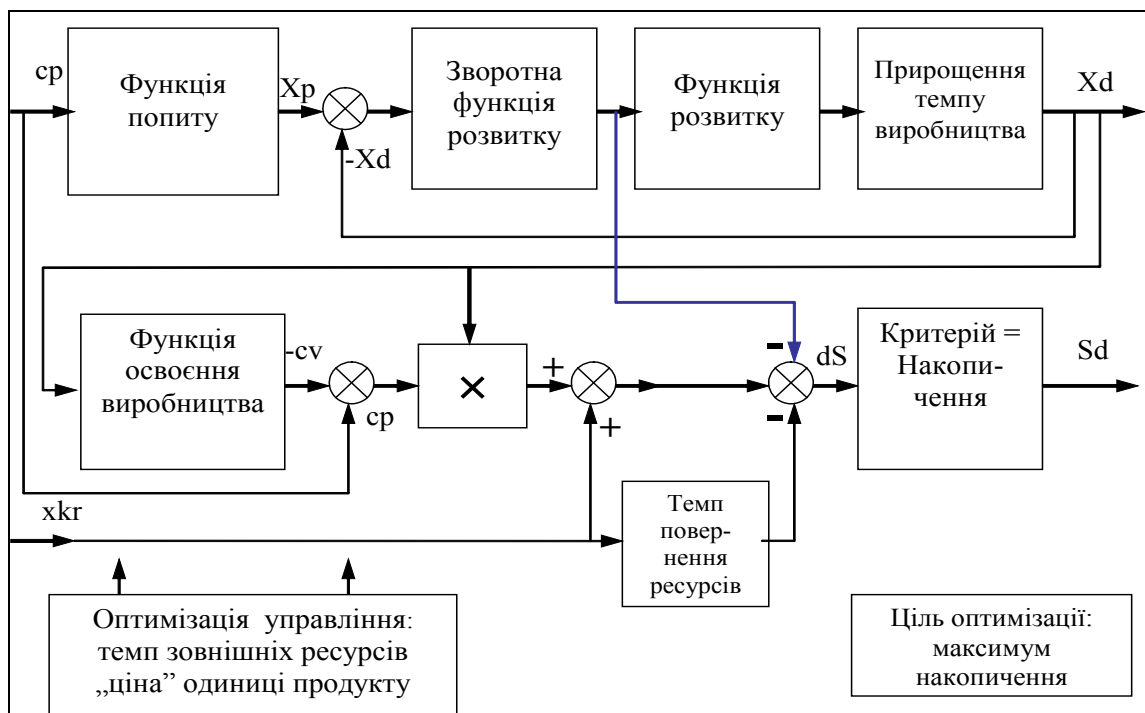


Рисунок 2.20 – Схема процесу розвитку з урахуванням «навчання»

В структурній схемі можемо виділити дві лінії, що починаються з «причин» – функцій потреби і освоєння. Третя лінія – підсистема оптимізації і управління. В схемі (див. рис. 2.20) прийняті такі означен-

ня:  $Xp$  – потрібний темп випуску продукції;  $Xd$  – дійсний темп випуску продукції;  $Xkr$  – потрібний темп зовнішніх ресурсів;  $Sd$  – поточне значення критерію;  $dS$  – прирощення критерію;  $cp$  – «ціна» одиниці вимірювання продукту;  $cv$  – «собівартість» (виробничі витрати) одиниці вимірювання продукту.

Наступний етап – визначення конкретних математичних моделей відповідно з виділеними на рис. 2.20 функціональними блоками.

**Розробка функціональних моделей для процесу розвитку.** Виконаємо специфікацію функціональних елементів системи – «функції розвитку», «функції виробництва», «функції попиту», «функції навчання». Термін «функція» ми трактуємо ширше, ніж функцію математичну – як функцію в програмуванні. В програмуванні функція – це програмний модуль, що бере певний набір вхідних даних і повертає певний набір вихідних даних. В формально-математичному плані це можуть бути не тільки функції, але й функціонали і оператори, наприклад, диференціальні рівняння, складні системи рівнянь.

**Модель розвитку виробництва.** Функція розвитку характеризує залежність прирощення виробничих потужностей від темпу витрат на розвиток. В загальному випадку віддача витрат на розвиток настає з певним запізненням, і не одразу, а протягом декількох періодів. Математична модель процесу – різницеве рівняння із запізненням. В цьому розділі використаємо таку модель:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \text{fin}(y(t - \tau)),$$

де  $x(t)$  – швидкість зміни (темп) виробничих потужностей, одиниць вимірювання продукції за одиницю часу;  $y(t)$  – темп зовнішніх ресурсів;  $\tau$  – запізнення віддачі зовнішніх ресурсів;  $\text{fin}(y)$  – монотонна позитивна функція, що може бути випуклою, увігнутою, кусково-лінійною;  $\text{fin}(0) = 0$ ;  $y > 0$ ;  $\text{fin}(y) \geq 0$ . Обґрунтування можливих типів функцій розвитку дано у [53, 60, 197].

**Модель потреби на новий продукт.** Відбираємо і узагальнюємо те, що визнається достовірним і коректним. Залежність «попит–цінність» для продуктів певного класу є результатом взаємодії таких факторів: частотне розподілення потенційних користувачів продукту по доходах, оцінка користувачем цінності, корисності та престижності

продукту. Перший фактор визначає кількість користувачів, що мають можливість придбати цей продукт за певною ціною. Другий фактор визначає частку множини потенційних користувачів, що мають не тільки можливість, але й бажання придбати продукт. Цей фактор визначається як об'єктивною корисністю – зручністю, надійністю, економічністю продукту, так і інформуванням, підвищенням рівня сервісу, «преміями» стабільним і активним користувачам.

Згідно з принципом редукційної декомпозиції [32, 46], будемо функціональну модель «потреби», як послідовність наближень. В якості першого, простішого, наближення розглядаємо усереднену модель [246, 281]. Вона є лінійною у подвійному логарифмічному масштабі – це зручно для аналітичних методів, в певних ситуаціях добре наближує реальну залежність. Підставою для останнього припущення є те, що ця залежність є результатом усереднення функцій можливостей і бажань великої кількості споживачів, а такі залежності повинні бути стабільними і досить простими. Візьмемо за основу цю модель, але видалимо нереалістичні «хвости» для нульової:  $p = 0$ , та нескінченної  $p = \infty$  цін. В останньому випадку граничною ціною є ціна конкурентів. Зрозуміла обмеженість потреб при нульовій ціні – це фізична обмеженість потенційного ринку. Як приклад структурної декомпозиції розглянемо дві альтернативні моделі: – класичну модель, «обрізану» обмеженнями малих і великих «цін»; – модель на базі логнормального розподілення.

Класичні моделі є тільки апроксимаціями експериментальних даних. На рівні відтворення статистичних залежностей не менш природною може бути модель на базі логнормального розподілу. «Потреби» інтерпретуються як імовірність того, що певний відсоток користувачів вибере продукт при певній «ціні». Запропоновані моделі є елементами певного класу функціональних моделей «цінність–потреби». Задаємо специфікацію моделей цього класу  $D1(p, n, Dm, pma)$ , що розшифровується таким чином: Потреби\_номер\_моделі ( $p$  – цінність;  $n$  – параметр функції потреб;  $Dm$  – максимальні потреби;  $pma$  – максимальна цінність). Ця модель відноситься до класу моделей-апроксимацій [246, 281]. Для різних видів продукції існують різні класи моделей потреб. Проведене дослідження для двох класів [163–165] цих моделей.

**Модель процесу освоєння виробництва.** Ця модель характеризує залежність собівартості від темпу випуску і сумарного випуску продукції. Розглянемо спочатку стисло можливі шляхи зменшення собівартості виробництва, це: ефект навчання, тобто навчання персоналу, наладки обладнання, постійне покращення конструкції і технологій, наладка каналів збуту продукту, встановлення відносин «спорідненості» з посередниками і користувачами; ефект масового виробництва – постійні витрати, що не залежать від темпу (обсягу) випуску, розподіляються на велику кількість продукції.

Розглянемо моделі першого наближення для собівартості. Витрати на одиницю продукції можна відобразити такою моделлю «освоєння виробництва», що зібрана з моделі освоєння [190] та моделі «постійних витрат»:

$$sv(Xs, X, p, vv, vp) = vv \cdot p^{\frac{\ln(Xs)}{\ln(2)}} + vp \cdot X^{-1}, \quad (2.28)$$

де  $vv$  – коефіцієнт «змінних» витрат;  $vp$  – коефіцієнт «постійних» витрат;  $0 < p < 1$  – коефіцієнт освоєння виробництва;  $X$  – поточний темп випуску;  $Xs$  – накопичений випуск за плановий період виробництва продукту.

Записуємо дискретну модель витрат на поточний випуск. Виробничі витрати ( $i$ -го елемента в момент  $t$ )  $Vytr_{i,t}$  пропорційні темпу випуску. Записуємо робочий вираз для виробничих витрат (собівартості) на «виріб»

$$Vytr_{i,t} = sv\left(\sum_{\tau=1}^t X_{i,\tau}, X_{i,t}, p, vv, vp\right) \cdot X_{i,t}, \quad (2.29)$$

де  $X_{i,t}$  – дискретизований темп випуску  $i$ -го продукту в момент  $t$ .

### 2.5.2 Розробка моделі динаміки процесу розвитку виробництва

З розглянутих функціональних модулів збираємо дискретизовану модель динаміки процесу розвитку. Головним елементом новизни моделі є інший вибір змінних управління. У відомій літературі не знайдено аналогів запропонованої моделі. При пошуку, як побічний результат, отримана статистика використання варіаційних задач в моделюванні: 80 % – задачі мінімізації узагальненого інтегрального квадратичного критерію, 15 % – задачі максимізації інтегрального критерію першого роду (накопиченого випуску), 5 % – інші задачі.

У задачі розподілу, дослідженій Беллманом [25–27] змінними управління є частки поточного ресурсу системи, що йде у розширення виробничих потужностей та темп залучення зовнішніх ресурсів. Вибираємо як змінну управління «ціну» продукту і темп зовнішніх ресурсів [14, 58].

**Постановка оптимізаційної задачі.** Нам необхідно знайти дві функції – залежності «ціни» продукту оптимальної  $cp_o(t)$  і розміру зовнішніх ресурсів  $xkro(t)$  від часу, такі що дають максимум сумарного прибутку. Сумарний прибуток – це інтеграл (сума для дискретної задачі) від потоку прибутків  $dS$ .

Дана задача є варіаційною – треба знайти саме функцію часу  $cp_o(t)$  таку, що максимізує сумарний прибуток. Запишемо дискретні рівняння динаміки системи в термінах введених в підрозділі 2.5.1 функцій. Конкретні версії цих функцій вибираються з відповідних бібліотек і так збирається орієнтована на певний підклас задач (наприклад: комп'ютери, мобільні телефони, тепловози, біогазові установки) реалізація модульної математичної моделі процесу розвитку з урахуванням освоєння.

$$\left. \begin{aligned} cp_{t+1} &= Ops(t); \\ xd_{t+1} &= Fdm(cp_t); \\ Dxp &= Fin(y_t); \\ xp_{t+1} &= xp_t + Dxp \cdot Dt; \\ cv_{t+1} &= cv_t - (K1 \cdot xp_t + K2 \cdot Dxp) \cdot Dt; \\ dox_{t+1} &= (cp_t - cv_t) \cdot xp_{t+1}; \\ y_{t+1} &= FinO(xd_{t+1} - xp_{t+1}); \\ prb_{t+1} &= dox_{t+1} - y_{t+1}; \\ Sd_{t+1} &= Sd_t + prb_{t+1} \cdot Dt; \\ Sxp_{t+1} &= Sxp_t + xp_{t+1} \cdot Dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

де  $x(t)$  – швидкість зміни (темп) виробничих потужностей, одиниць вимірювання продукції за одиницю часу;  $y(t)$  – темп витрат на розвиток;  $\tau$  – запізнення віддачі витрат на розвиток;  $Fin(y)$  – монотонна додатна функція ( $fin(0) = 0$ ,  $y > 0$ ,  $fin(y) \geq 0$ );  $Fdm(cp)$  – залежність



потреб від ціни;  $FinO(dxP)$  – функція зворотна до функції  $Fin(y)$ . Ви- значимо вектор управління

$$u(t) = \begin{pmatrix} cp(t) \\ xkr(t) \end{pmatrix},$$

де  $cp(t)$  – «ціна» одиниці вимірювання продукту;  $xkr(t)$  – темп зовніш- ніх ресурсів.

Зробимо потрібну нам дискретну модель виробничих витрат в прирощеннях. Диференціюємо (символьним процесором) вираз (2.28). і отримуємо:

$$dfcv(t) = \frac{d}{dt} \left( vV \cdot pO \frac{\ln\left(\int_0^t xP(\tau)d\tau\right)}{\ln(2)} + vP \cdot xP(t)^{-1} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow vV \cdot pO \frac{\ln\left(\int_0^t xP(\tau)d\tau\right)}{\ln(2)} \cdot \frac{xP(t)}{\int_0^t xP(\tau)d\tau \cdot \ln(2)} \cdot \ln(pO) - \frac{vP}{xP(t)^2} \cdot \frac{d}{dt} xP(t). \quad (2.31)$$

Замінімо у (2.30) інтеграл сумою  $Sxp_t$ , а похідну – першою різни- цею  $Dxp$  і отримаємо робочий вираз

$$cv_{t+1} = cv_t + \left( vv \cdot \frac{xp(t) \cdot \ln(po)}{\ln(2) \cdot Sxp_t} \cdot po^{\frac{\ln(Sxp_t)}{\ln(2)}} - \frac{vp}{xp(t)^2} \cdot Dxp \right) \cdot Dt, \quad (2.32)$$

де  $vv$ ,  $vp$  – коефіцієнти змінних і постійних витрат виробництва;  $po$  – коефіцієнт освоєння;  $xp$  – темп випуску продукції;  $Dxp$  – похідна (або оцінка похідної);  $Sxp$  – інтеграл (або сума) від темпу випуску продук- ції. У виразі (2.32)  $cv_t$ ,  $xp_t$  – відповідні змінні еквівалентної дискрет- ної моделі, вирази

$$\int_0^t xp(\tau)d\tau \Rightarrow Sxp_t = \sum_{\tau=1}^t xp_\tau; \quad \frac{d}{dt} xp(t) \Rightarrow Dxp_t = \frac{xp_t - xp_{t-1}}{Dt}$$

дискретні еквіваленти інтегралу і похідної. Складаємо на базі рівнянь (2.30) програму моделювання.

На рис. 2.21 подано базовий інтерфейс програми. В верхній части- ні подано функцію віддачі інвестицій (функцію розвитку), функція

собівартості і функція попиту. Це не є характеристики одного класу. Далі розташовані зони введення параметрів цих функцій та граничних умов і результатів моделювання. В нижній частині – графіки процесу розвитку. Для цієї «задачі підручників» аналогів не знайдено, тільки статистичні дані та емпіричні правила.

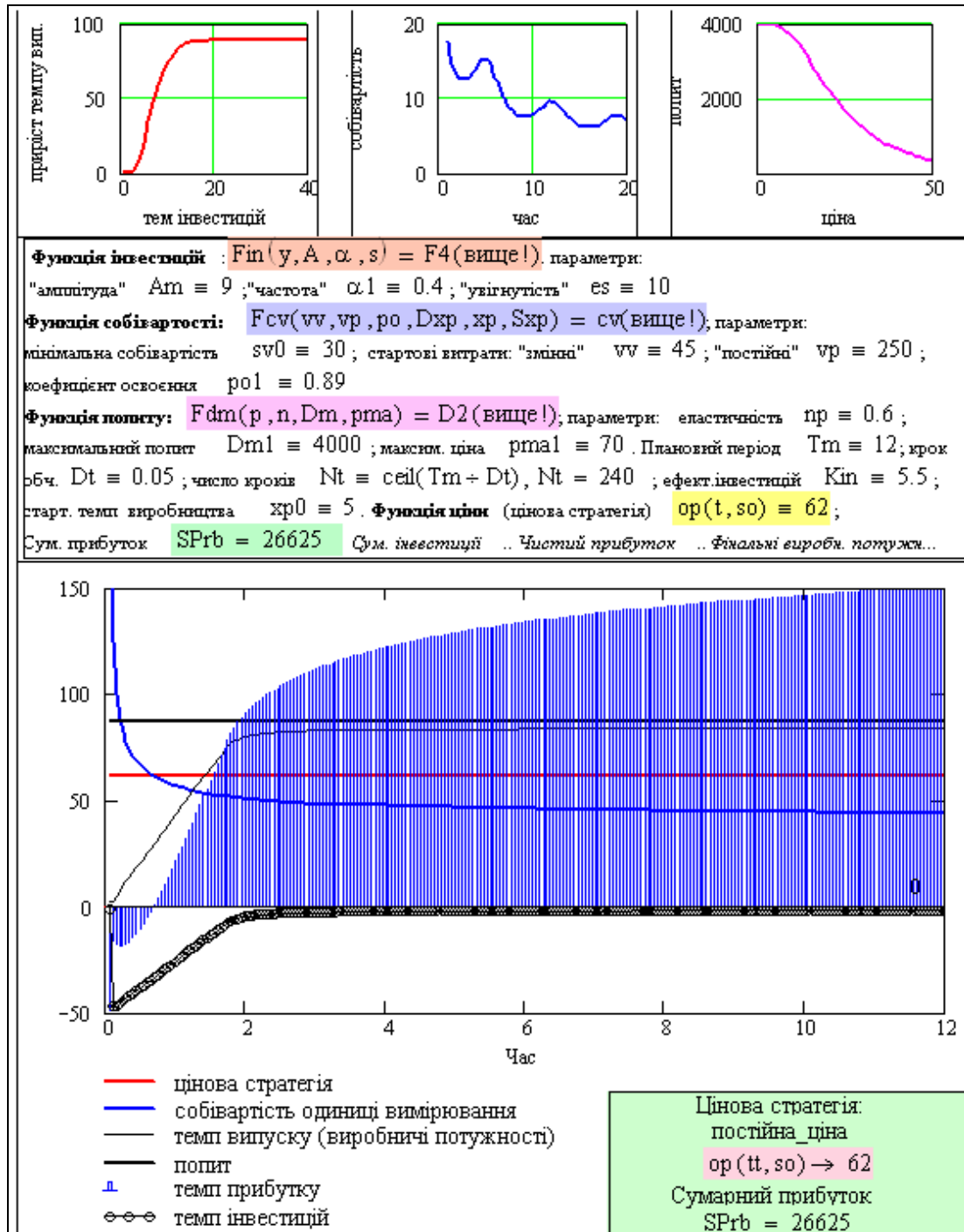


Рисунок 2.21 – Інтерфейс програми моделювання процесів розвитку

### 2.5.3 Отримання точного розв'язання задачі розвитку з урахуванням ефекту освоєння виробництва

Поставимо і розв'яжемо варіаційну задачу знаходження оптимальної стратегії розвитку. Терміни «стратегія управління», «стратегія прийняття рішень» часто зустрічаються в літературі. В даній роботі стратегія розвитку з урахуванням освоєння («цінова стратегія») – функція  $cp(t)$ , залежність ціни продукту від часу, така що максимізує інтегральний критерій накопичення. Пам'ятаємо, що «ціна продукту» сама по собі однозначно не визначає попит [25–27]. «Ціна продукту» – розмите системне поняття, що враховує усі компоненти витрат користувача. Зміна ціни в будь-якому напрямку повинна базуватись на складній інформаційній діяльності з освоєння і донесення до користувачів цінності продукту.

**Постановка варіаційної задачі оптимізації.** Як базову розглядаємо «одновимірну» – однопродуктову оптимально агреговану систему. Метод оптимального агрегування для задач з адитивними критеріями і обмеженнями дає можливість замінити систему паралельно працюючих елементів одним еквівалентним елементом і розглядати еквівалентну одновимірну систему [207, 208]. Формалізуємо задачу, записуємо диференціальні рівняння виробничої системи в стандартному для варіаційних задач вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}cv &= fcv(cv, cp); \\ \frac{d}{dt}xd &= fd(cp); \\ \frac{d}{dt}xv &= fin(xv); \\ J &= \int_0^{T_p} ff(cv, cp)dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

де  $cp$  – ціна одиниці вимірювання продукту;  $cv$  – виробничі витрати на одиницю вимірювання продукту;  $xd$ ,  $xv$  – темпи потреб і випуску відповідно;  $fcv(\cdot)$ ,  $fd(\cdot)$ ,  $fin(\cdot)$ ,  $ff(\cdot)$  – функції освоєння, потреб, розвитку та критерію, що були визначені в підрозділі 2.5.2. В (2.33) подані рівняння динаміки собівартості продукту (виробу), рівняння дина-

міки потреб на продукт, рівняння динаміки темпу виробництва (виробничих потужностей), критерій – прибуток накопичений за період  $T_p$ . Ціль оптимізації –  $\max\{J\}$ , змінна управління – ціна  $cp$ .

Це варіаційна задача Ейлера–Лагранжа з інтегральним критерієм і обмеженнями, що задані диференціальними рівняннями. Записали задачу в термінах змінної стану процесу – собівартості  $cv$ , і змінної управління – ціни продукту  $cp$ . Однак, собівартість залежить безпосередньо від обсягу випуску продукції та накопиченого обсягу випуску. Крім того, обсяг випуску є більш вимірюваною категорією, ніж прибуток і собівартість. Вибираємо для розв’язання варіаційної задачі метод принципу максимуму Л. С. Понтрягіна, тому що він дає можливість гнучкого поєднання аналітичних і числових методів розв’язання, а задача максимізації функції Гамільтона легко «вбудовується» в програми моделювання процесів розвитку. Розширимо набір змінних (вектора стану) процесу розвитку виробничої системи. Будемо розглядати такі змінні:  $J$  – сумарний прибуток,  $xv$  – темп випуску продукції,  $xs$  – накопичений обсяг випуску,  $xd$  – темп потреб,  $cv$  – собівартість продукції. Змінні управління – ціна продукту та темп витрат на розвиток.

Приведемо задачу до канонічної форми.

1. Беремо похідну від критерію і додаємо це рівняння до рівнянь процесу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= f_j(cv, x, cp) - \text{темп зміни критерію}; \\ \frac{d}{dt} xv &= f_{in}(xv) - \text{темп зміни темпу випуску}; \\ \frac{d}{dt} xs &= xv - \text{темп зміни накопиченого випуску}; \\ \frac{d}{dt} xd &= f_d(cp) - \text{темп зміни темпу потреб}; \\ \frac{d}{dt} cv &= f_{cv}(x, xs) - \text{темп зміни собівартості}. \end{aligned} \right\}$$

В першому наближенні можна вважати, що темп виробництва точно дорівнює темпу потреб, тобто, темп виробництва  $x(t)$

$$x = xd = D2(cp, n, Dm, pta) \text{ або } D1(cp, n, Dm, pta).$$

2. Складаємо функцію Гамільтона:

$$H(cv, cp) = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i = \psi_J \cdot f_J + \psi_{cv} \cdot f_{cv} + \psi_x \cdot x. \quad (2.34)$$

Згідно з методикою розв'язання задачі методом принципу максимуму, не включаємо в функцію Гамільтона обмеження на управління.

3. Записуємо умову оптимальності управління

$$Hm(\cdot) = \max_{cp} \{H(cv, cp)\}.$$

4. Складаємо рівняння для визначення спряжених функцій (згідно з властивостями функції Гамільтона [169]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_J(t) &= -\frac{\partial}{\partial J} H(cv, x, cp); \\ \frac{d}{dt} \psi_{cv}(t) &= -\frac{\partial}{\partial cv} H(cv, x, cp); \\ \frac{d}{dt} \psi_x(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} H(cv, x, cp). \end{aligned} \right\}$$

Через ці функції виражається оптимальне управління. Особливість принципу максимуму в тому, що варіаційна задача знаходження функції, яка дає екстремум функціоналу, замінюється задачею математичного аналізу з визначення параметрів оптимального управління  $cp(t)$ . В загальному випадку задача визначення оптимального управління методом принципу максимуму зводиться до розв'язання системи з  $(n + n + m)$  рівнянь ( $n$  диференціальних рівнянь процесу,  $n$  диференціальних рівнянь для спряжених функцій,  $m$  рівнянь для оптимальних управлінь). В нашому випадку потрібно знаходити на кожному кроці процесу розв'язання диференціальних рівнянь. За своєю суттю метод принципу максимуму, як обчислювальний метод є декомпозиційним: задачу знаходження екстремуму функції  $K$  (число кроків процесу) змінних розбиваємо в послідовність задач знаходження екстремуму функції Гамільтона тільки по поточних змінних управління – поточній ціні продукту та темпу залучення зовнішніх ресурсів. Суттєвий недолік методу – знаходження спряжених функцій і функції Гамільтона в загальному випадку – складна задача. Задаємо типові достовірні моделі для функцій «критерій»  $ff(\cdot)$  та «собівартість»  $f_{cv}(\cdot)$  і запишемо

вираз для функції Гамільтона. Визначимо функцію  $ff(\cdot)$ , що є похідною від критерію

$$J = \int_0^{T_p} ff(cv, cp) dt = \int_0^{T_p} (x(t) \cdot (cp(t) - cv(t)) - fno\left(\frac{d}{dx} x(t)\right)) dt.$$

Це фактично підінтегральний вираз критерію:

$$ff(cv, x, cp) = x(t) \cdot (cp(t) - cv(t)) - fno\left(\frac{d}{dt} x(t)\right). \quad (2.35)$$

Перша складова функції це «прибуток» від випущеної продукції, друга складова (від'ємна) – витрати ресурсу на розширення виробництва. Ми припустили, що обсяг виробництва дорівнює потребам. Тоді ми можемо виключити змінну  $x(t)$  з рівнянь динаміки:

$$x(t) = D(cp(t), n, Dm, pma).$$

В процесі роботи програми оптимізації і моделювання параметри «функції потреб», що характеризує потребу в продукті:  $n, Dm, pma$  – еластичність, максимальний попит, максимальна ціна, вводяться один раз, на початку процесу. Вважаємо темп випуску функцією тільки ціни продажу  $cp(t)$ :

$$x(t) = D(cp(t), n, Dm, pma) = Fd(cp). \quad (2.36)$$

Підставляємо (2.36) в (2.35)

$$ff(cv, cp) = Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - fno\left(\frac{d}{dt} Fd(cp(t))\right). \quad (2.37)$$

Виходячи з малої точності вхідних даних, можливо виконати ще одне спрощення – вважати функцію віддачі зовнішніх ресурсів лінійною. Лінійною буде і зворотна функція  $fno(dx) = Kinv \cdot dx$ .

З урахуванням цього отримуємо вираз для правої частини:

$$ff(cv, cp) = Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - Kinv \cdot \left(\frac{d}{dt} Fd(cp(t))\right). \quad (2.38)$$

Визначимо функцію  $fcv(x, t)$ . Записуємо спрощену функцію собівартості

$$cv(x, t) = vv \cdot p^{Ko \cdot \ln(t)} + vp \cdot x(t)^{-1}.$$

Беремо похідну від цієї функції (за допомогою символічного процесора)

$$\frac{d}{dt}(vv \cdot p^{Ko \cdot \ln(t)} + vp \cdot x(t)^{-1}).$$

Таким чином, отримуємо

$$fcv(x, t) = vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{x(t)^2} \cdot \frac{d}{dt} x(t). \quad (2.39)$$

Бачимо, що функція має дві складові – функцію часу і функцію темпу випуску  $x(t)$ . Підставимо (2.36) в (2.39) і отримаємо такий вираз:

$$fcv(cv, cp) = vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{Fd(cp)^2} \cdot \frac{d}{dt} Fd(cp). \quad (2.40)$$

**Визначення функції Гамільтона.** Підставимо (2.38) та (2.40) у вираз для функції Гамільтона (2.34) і спряжених функцій. Врахуємо, що змінна  $x$ , за рахунок припущення про рівність потреб і виробництва, виключена.

$$H(cv, cp) = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i = \psi_j \cdot fj + \psi cv \cdot fcv;$$

$$H(cv, cp) = \psi_j \cdot \left[ Fd(cp) \cdot (cp(t) - cv(t)) - Kin v \cdot \left( \frac{d}{dt} Fd(cp(t)) \right) \right] \dots \quad (2.41)$$

$$+ \psi cv \cdot \left[ vv \cdot po^{Ko \cdot \ln(t)} \cdot \frac{Ko}{t} \cdot \ln(po) - \frac{vp}{Fd(cp)^2} \cdot \frac{d}{dt} (Fd(cp)) \right].$$

Навіть для значно спрощеної задачі отриманий вираз для функції Гамільтона є досить складним.

**Знаходження спряжених функцій.** Підставляємо тепер вираз для функції Гамільтона (2.41) у диференціальні рівняння спряжених функцій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi J(t) &= -\frac{\partial}{\partial J} H(cv, cp, \psi J, \psi cv); \\ \frac{d}{dt} \psi cv(t) &= -\frac{\partial}{\partial cv} H(cv, cp, \psi J, \psi cv). \end{aligned} \right\}$$

Знаходимо відповідні окремі похідні від функції Гамільтона

$$\frac{\partial}{\partial J} H(cv, cp, \psi J, \psi cv) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial cv} H(cv, cp, \psi J, \psi cv) = -\psi J \cdot Fd(cp)$$

і підставляємо їх у диференціальні рівняння для спряжених функцій

$$\frac{d}{dt} \psi J(t) = 0; \quad \frac{d}{dt} \psi cv(t) = \psi J \cdot Fd(cp).$$

Розв'язуємо ці диференціальні рівняння

$$\psi J(t) = Co1; \quad \psi cv(t) = Co1 \cdot \int_0^t Fd(cp(t)) dt.$$

Підставляємо отримані вирази у вираз для функції Гамільтона.

$$\begin{aligned} H(cv, cp) &= \psi j \cdot fj + \psi cv \cdot fcv = \\ &= Co1 \cdot fj(cv, cp) + \left( Co1 \cdot \int_0^t Fd(cp(t)) dt \right) \cdot fcv(cp, t). \end{aligned}$$

Згідно з методом принципу максимуму потрібно на кожному кроці процесу знаходити максимум цієї функції. Положення максимуму не залежить від множника-константи, тому остаточно маємо

$$H(cv, cp, t) = fj(cv, cp) + fcv(cp, t) \cdot \int_0^t Fd(cp(t)) dt. \quad (2.42)$$

Для значно спрощеної одновимірної задачі маємо досить складний вираз, в який входять функція потреб, функція освоєння (залежна від функції потреб). Функція освоєння входить і як похідна, і як зворотна величина від квадрату. Отримали складний вираз, який залежить від нечітких і невизначених залежностей. Для розв'язаної задачі моделювання оптимальних процесів розвитку з урахуванням ефектів освоєння не знайдено близьких аналогів і повних статистичних даних. Тому для перевірки математичної коректності і адекватності реальним процесам проведено: дослідження властивостей функції Гамільтона для задач розвитку; аналіз оптимальних та емпіричних стратегій розвитку; дослідження чутливості цінових стратегій до варіацій параметрів функцій розвитку, освоєння та потреб.

На рис. 2.22 подано приклад еволюції функції Гамільтона для типового процесу розвитку. В нашому прикладі можемо бачити особливість процесів розвитку: існує інтервал часу процесу  $(0, Tz)$ ,  $Tz < Tp$ , де оптимальна ціна продукту є меншою собівартості. Згадаємо, що функ-



ція Гамільтона є «проекцією» поточних управлінь (рішень) на майбутнє накопичення, і звернемо увагу на те, що ця функція на ранніх стадіях процесу є від'ємною, а на пізніх стадіях вона є додатною. В кінці процесу темп росту прибутку стабілізується вичерпанням можливостей ринку та освоєння виробництва.

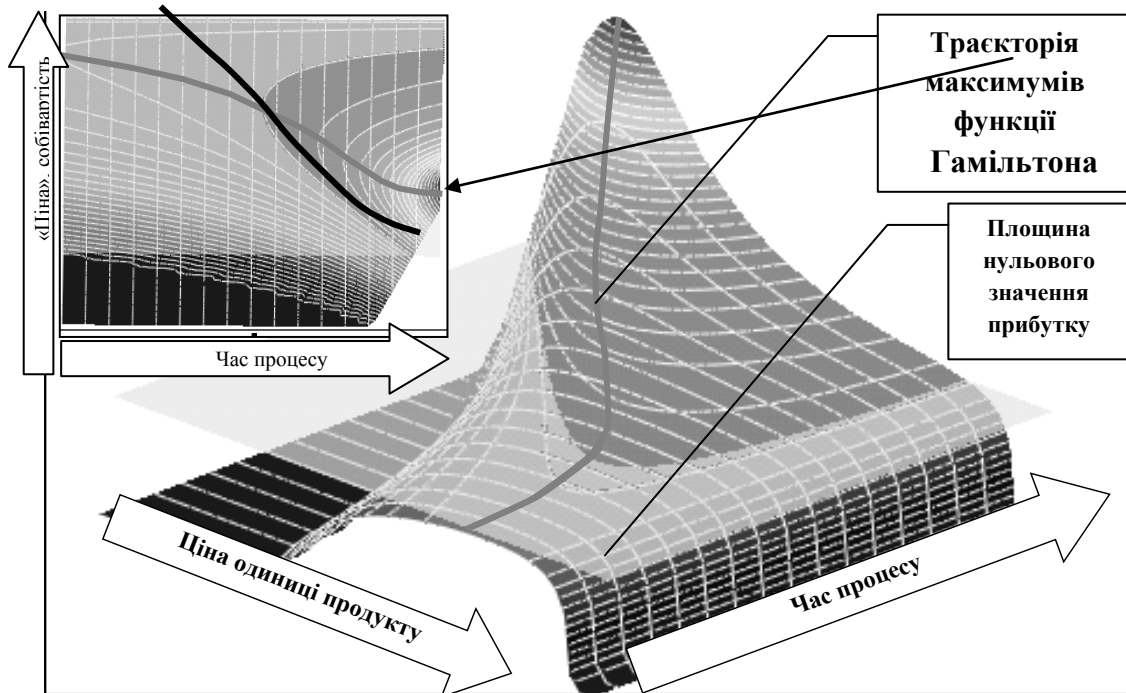


Рисунок 2.22 – Еволюція функції Гамільтона. Приклад

В межах побудованої моделі розвитку з урахуванням ефекту освоєння можна сформулювати:

**Твердження 2.1.** Оптимальна стратегія розвитку – зміна ціни в часі, монотонно спадна функція часу, що має на початку інтервал від'ємних значень різниці «ціна–собівартість», а залежність величини максимумів функції Гамільтона від часу процесу – функція, що монотонно зростає.

Доведення твердження виконано паралельно на рівні імітаційного моделювання конкретних задач (див. рис. 2.21, 2.22) і на рівні аналізу властивостей точного розв'язання та наближених розв'язань для емпіричних стратегій.

В умовах інноваційного розвитку керівникам і аналітикам потрібні в першу чергу високоінформативні комплексні графічні форми подання результатів моделювання. Як підсумок розглянутих моделей і ме-

тодів оптимізації на рис. 2.23 подано разом для порівняння три приклади оптимальних стратегій.

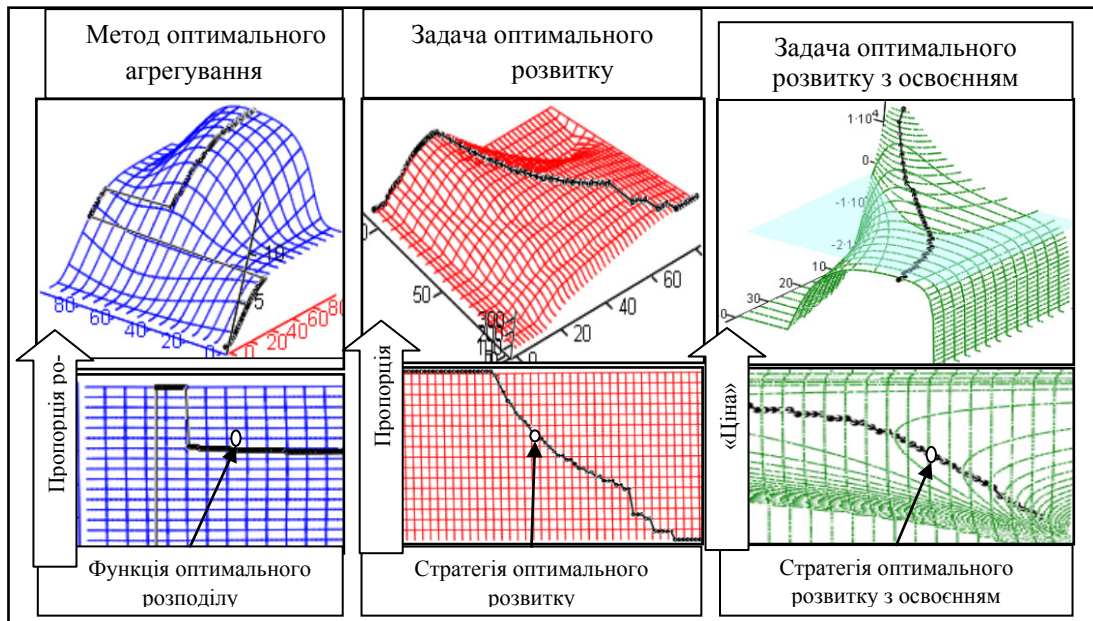


Рисунок 2.23 – Приклади розв’язань оптимізаційних задач на базі заміни точкового розв’язання функцією розв’язання від обмеження

Матеріали розділу 2 в цілому складають новий науковий результат.

*Формулювання.* Вперше розроблено декомпозиційну структуру і відповідний метод моделювання і оптимізації процесу розвитку виробничої системи, що відрізняється від існуючих методів тим, що розв’язання варіаційної задачі розвитку розбивається на дві послідовні задачі: – задачу заміни виробничої системи оптимальним за критерієм сумарного виробництва еквівалентним елементом (результат №1) та – варіаційну задачу розвитку для еквівалентного оптимального елемента (одновимірного об’єкта), де управління на кожному кроці процесу – розподіл ресурсу виробничої системи між накопиченням і розвитком, що дає максимум функції Гамільтона, згідно з методом принципу максимуму. Це дає можливість отримувати розв’язок варіаційної задачі розвитку для розподілених виробничих систем з функціями розвитку класу «обмежені, нестрого монотонні і нестрого позитивні», а також суттєве зменшення обчислювальних витрат для розподілених виробничих систем великої розмірності.

*Відмінність від аналогів.* Єдиний близький прототип – розв’язання варіаційної задачі розвитку для виробничих систем з паралельними елементами» [206]. Відмінність – розширення області застосування на системи з довільними структурами і обмеженнями.

*Актуальність* – існує потреба в методах отримання на базі єдиної методології оптимальних стратегій розвитку для широкого класу задач, що не мають аналітичних розв’язань.

*Суть результату* – зведення задач розвитку виробничих систем до варіаційної задачі для одновимірного об’єкта з інтегральним критерієм і гарантоване розв’язання її методом принципу максимуму з визначенням спряжених функцій та функції Гамільтона числовими методами як функцій користувача.

## **Висновки до розділу 2**

Необхідність розгляду сучасних виробничих систем як складних процесів неперервного вдосконалення конструкцій, технологій і процесів паралельного випуску продуктів одного класу обумовила необхідність розгляду задачі оптимального розподілу ресурсів в процесах розвитку як варіаційної.

Запропоновано декомпозиційний підхід до однокрокової і багатокрокової оптимізації розподілених виробничих систем. Розроблено, обґрунтовано метод оптимального агрегування для типових структур виробничих систем: паралельних, послідовних та з ресурсним зворотним зв’язком. Методи оптимального агрегування для цих структур мають суттєві відмінності в реалізації та обґрунтуванні, однак мають спільну методологію – декомпозиція багатовимірних задач оптимізації в послідовність одновимірних, алгебраїзація. Виконано узагальнення методу оптимального агрегування, що спочатку був розроблений для розподілених систем з елементами, що працюють паралельно. Отримані результати в однокроковій оптимізації дозволили поставити, розв’язати і дослідити оптимальні стратегії для низки задач розвитку виробничих систем з урахуванням освоєння, розвитку, використання зовнішніх ресурсів. Метод оптимального агрегування дозволяє виконати декомпозицію задачі оптимального розвитку на дві задачі: задачу заміни розподіленої виробничої системи оптимальним еквівалентним виробничим елементом; і задачу отримання оптимальної

стратегії розвитку еквівалентної оптимальної одновимірної виробничої системи. В першій задачі ресурси розподіляються між елементами, в другій задачі – між розвитком і накопиченням.

Методи моделювання і оптимізації різних задач розвитку мають суттєві відмінності в реалізації та обґрунтуванні, однак мають спільну методологію – це декомпозиція варіаційної задачі на задачу оптимізації розподілу ресурсу між елементами виробничої системи та застосування декомпозиційних методів – оптимального агрегування та методу принципу максимуму.

Вперше розроблено методологію побудови еквівалентних оптимальних елементів для паралельних, послідовних і кільцевих структур виробничих систем на базі методу оптимального агрегування, що відрізняється від існуючих методів агрегування отриманням оптимальної характеристики «вхід-вихід», а від існуючих методів оптимізації розподілу ресурсів – декомпозицією багатовимірної задачі оптимізації в послідовність одновимірних задач. Це в підсумку робить метод нечутливим до виду функцій виробництва, і малочутливим до розмірності виробничої системи, що дозволяє будувати ефективні моделі для оптимізації процесів функціонування і розвитку оптимально агрегованих виробничих систем.

Одержав подальший розвиток метод Беллмана отримання наближень у просторі стратегій управління для розв'язання варіаційної задачі розвитку, що відрізняється від існуючого методу тим, що варіаційна задача розвитку виробничої системи розв'язується не методом динамічного програмування, а за принципом максимуму Понтрягіна з використанням дискретизованого гамільтоніану й уступки у максимальному значенні функціонала якості. Це дозволяє отримувати наближення оптимальної стратегії, що дають значення інтегрального критерію, яке відрізняється від оптимального щонайбільше на 3 %.

Вперше розроблено декомпозиційну структуру і відповідний метод моделювання і оптимізації процесу розвитку виробничої системи, що відрізняється від існуючих методів тим, що розв'язання варіаційної задачі розвитку розбивається на дві послідовні задачі: – задачу заміни виробничої системи оптимальним за критерієм сумарного виробництва еквівалентним елементом та – варіаційну задачу розвитку для еквівалентного оптимального елемента (одновимірного об'єкта), де управління на кожному кроці процесу – розподіл ресурсу виробничої

системи між накопиченням і розвитком, що дає максимум функції Гамільтона, згідно з методом принципу максимуму. Це дає можливість отримувати розв'язання варіаційної задачі розвитку для розподілених виробничих систем з довільними функціями розвитку класу «обмежені, нестрого монотонні і нестрого позитивні», а також суттєве зменшення обчислювальних витрат для розподілених виробничих систем великої розмірності.

Підтвердженням коректності і практичної корисності наукових результатів розділу є отримання розв'язків для двох задач розвитку виробничих систем – виробничої системи, елементи якої мають нелінійні функції виробництва з класу нестрого монотонних і нестрого позитивних функцій, та виробничої системи з урахуванням ефекту освоєння виробництва. Побудовано системи інтерфейсів та проведено дослідження, напрацьовано технології створення робочих математичних моделей в комплексі з інтерфейсами для проведення досліджень на моделях.

В цьому розділі отримано низку суттєво відмінних від аналогів нових наукових результатів. Ці результати отримані на базі нової цілісної методології і без використання фундаментальних наукових напрямів: теорії нечіткості, штучних нейромереж і генетичних алгоритмів оптимізації. Можлива причина: нові результати отримані на робочих моделях, вони є малопродуктивними абстракціями поза програмними платформами. Ще одна причина – раціональний підхід до вибору структур, не довільні мережі, графи, а ієрархічні ресурсні структури об'єктів – виробничих систем і продуктів виробництва.

Теоретичні і практичні результати досліджень опубліковані в [33, 34, 40, 42–44, 51, 66, 71, 72, 74, 77, 78, 85, 89, 90, 95, 133–135, 142, 143, 145–148].

### РОЗДІЛ 3

## РОЗРОБКА СИСТЕМИ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ

Формально структури реальних систем є результатами певних формалізованих операцій композиції і декомпозиції. В цьому розділі розглядаємо дві концепції розподілених систем: утворених в результаті процесів об'єднання незалежних елементів; утворених в результаті процесів розбиття монолітних систем.

*Призначення* розділу: показати продуктивність запропонованої методології створення моделей для цих двох концепцій структуроутворення; показати конвергенцію структур, утворених в результаті процесів композиції і декомпозиції структур «продукт», «виробнича система», «моделі виробничої системи з урахуванням ефектів освоєння», до деякої узагальненої раціональної структури, параметричне настроювання якої дозволяє створювати моделі розподілених систем.

*Аналоги і прототипи.* В розділі широко використовується поняття «імітаційна модель». В літературі використання цього поняття не є однозначним. Строге визначення можливе тільки для певної вузької предметної області.

В роботі взято визначення цього поняття з робіт Р. Беллмана [25–27], Дж. Форрестера [272, 273], М. Пешеля [246], Н. Моїсєєва [235], М. Месаровича [228–230], С. Хайтуна [274]: імітаційна модель – математична модель, де відтворюються «породжуючі механізми» – закони механіки, фізики, біології та ін. Ці закони можуть бути спрощеними, гіпотетичними, іноді помилковими. В процесі верифікації моделі коректуються, розширюються, позбавляються від помилок. Моделі на базі статистики відносять до «моделей-апроксимацій». Згідно Форрестеру, з причин нелінійності, нестационарності виробничих систем, побудова моделей на базі статистичних даних – непродуктивна, статистика повинна залучатись на етапі верифікації моделі, побудованої на базі «породжуючих механізмів».

Завжди, особливо сьогодні, актуальними є моделі для аналізу і прогнозування ризиків функціонування і розвитку виробництва. Як показав аналіз відомих моделей функціонування і розвитку розподілених виробничих систем, неможливо отримати задовільні моделі для аналізу ризиків не розширюючи границі системи. Відомі моделі і ме-

тоди аналізу ризиків недостатні для сучасних виробництв, в першу чергу через швидкі зміни.

*Вибрано підхід до розробки моделей соціо-техніко-екологічних систем (СТЕС):* створення системи імітаційних моделей виробничих систем; моделювання для оцінки ризиків розвитку певного підприємства разом з оточенням – іншими виробниками і споживачами (коротко названо такий підхід «один на фоні всіх»); використання будь-яких за обсягом і джерелами числових даних для ідентифікації і настроювання моделі на базі концепції «спостерігач стану і параметрів нелінійної динамічної системи» (це відповідає сучасним трендам «опортуністичні системи», «опортуністичний комп'ютинг» – системи, що функціонують незалежно від складу елементів, що постійно змінюються); мінімізація ризиків виробництва за рахунок паралельних структур з неідентичних елементів – «неідентичне резервування».

Проблеми: проблема об'єму обчислень – розв'язання її на базі операторів векторизації. Розроблені програми дозволяють на середньому персональному комп'ютері моделювати системи 200 виробників, 200 видів продуктів; проблема розробки узагальненої моделі локального (на рівні підприємства) і глобального (координація дій в системі виробництв) управлінь – розв'язання на базі методології оптимального агрегування; проблема адекватності моделей розвитку складних, стохастичних систем, що розвиваються і створюються на базі еталонних імітаційних моделей, що теж знаходяться в процесі розвитку, – вирішення побудови процедур ідентифікації на базі детермінованих і стохастичних породжуючих механізмів.

Відповідно до прийнятої методології розбиваємо процес створення задовільної моделі в процес створення послідовності моделей, що уточнюються і ускладнюються. Розробка і дослідження методології моделювання оптимальних процесів функціонування і розвитку в розділах 1–2 створили можливості для наступного кроку – створення узагальненої моделі функціонування і розвитку системи виробників певного сегменту виробництва.

Для підвищення ефективності розроблених моделей функціонування і розвитку потрібно було ввести в них більш адекватні моделі невизначеностей зовнішнього середовища. Найбільш значимими складовими невизначеностей сьогодні є діяльність інших виробників з розробки нових технологій і продуктів виробництва, а також вибір ко-

ристувачів певного класу продуктів виробництва. Для адекватного відображення невизначеностей вибрано концепцію моделювання «один на фоні всіх» – моделюємо процес функціонування і розвитку певного виробника разом з моделюванням його оточення, іншими виробниками та користувачами певного класу продуктів.

### 3.1 Концептуальна модель децентралізованої розподіленої системи

Сучасні розподілені системи звичайно є також і децентралізованими – кожний елемент технологічної системи самостійно вибирає напрямки розвитку і розподіляє власні ресурси, виходячи тільки з власного критерію ефективності. Управлінські рішення елемент приймає на базі неповної і неточної інформації про стан системи, неточних математичних моделей, що використовуються для прогнозування і планування. Все це обумовлює систему невизначеностей процесів розвитку системи в цілому.

**Вибір структури елемента «системи виробників» – підприємства.** На рис. 3.1 представлено базову структуру елемента системи виробників.

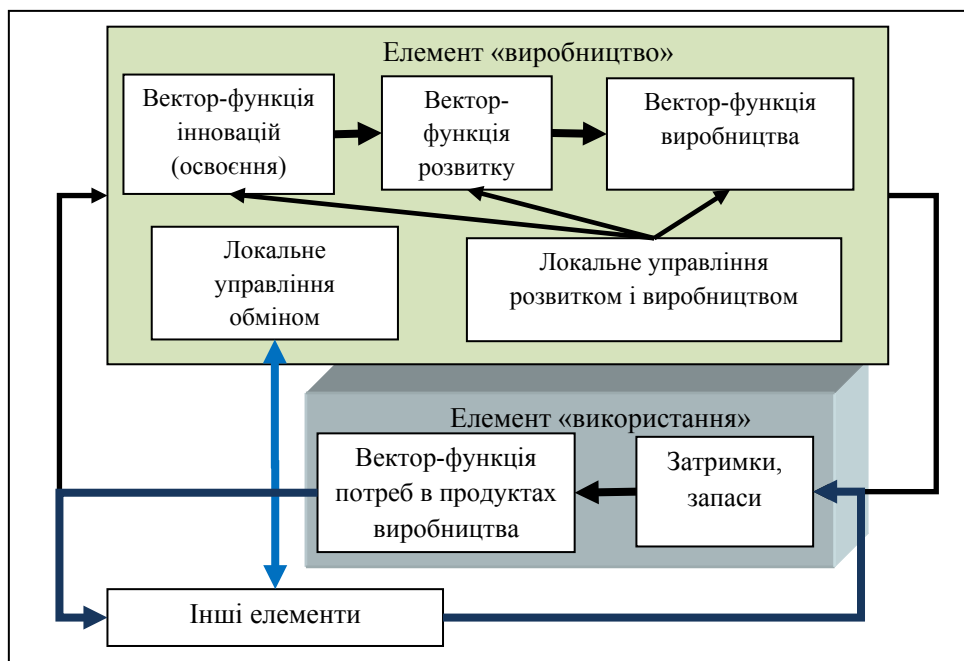


Рисунок 3.1 – Базова структура елемента розподіленої виробничої системи



Це замкнутий контур, в прямому ланцюзі якого складний комплекс блоків «інновації (освоєння)», «розвиток», «виробництво»; в ланцюзі зворотного зв'язку – споживання. У прямому ланцюзі – блок управління розвитком, функції якого – розподіл ресурсів. Показані двосторонні зв'язки цього елемента з іншими.

В цьому розділі вже в простішій моделі першого наближення враховуються в агрегованому вигляді: невизначеності і відповідні рівню невизначеностей алгоритми управління, нелінійні механізми зв'язків між інноваціями, розвитком і виробництвом. В наступних моделях ці механізми деталізуються. В цілому моделі цього розділу – це інтерпретації абстрактної схеми трирівневої декомпозиції моделі у функціональні, структурні і редуційні моделі. Урахування невизначеностей вимагає інших моделей управління і прийняття рішень порівняно з детермінованими задачами. Вибір моделі локального управління виробничою системою в оточенні інших базувався на аналізі літератури з практики управління виробництвом в США, Франції, Англії, Японії.

В розділі досліджується вісім моделей, які об'єднує урахування невизначеностей і збурень та відповідних методів управління. Ці моделі є модифікаціями базової моделі системи виробників. На рис. 3.2 подано в дискретній формі базову модель, а в правій колонці – пункти новизни цієї моделі.

Вибір системи критеріальної оцінки розподіленої системи обумовлені використанням декомпозиційного підходу [10, 46, 63, 65, 74, 76–79, 101, 112] та методу оптимального агрегування [33, 56, 59, 60, 94, 104, 131, 206, 214]: виділяємо однокрокову задачу розподілу ресурсу між елементами виробничих систем і замінюємо систему оптимальним еквівалентним елементом. Критерії оптимальності – сумарне виробництво. Задачі розвитку – варіаційні задачі з інтегральним критерієм першого роду. В цьому розділі розробляються і досліджуються альтернативні підходи до задач оптимального розвитку. Суть цих підходів – використання наближень, оцінок функції Гамільтона. Оцінки базуються на тому, що функція Гамільтона – прирощення інтегрального критерію в кінцевий момент процесу, породжене поточним управлінням. Причина відмови від канонічних варіаційних методів в цих моделях – не математичні складності, а невизначеності майбутнього, що збільшуються зі збільшенням періоду планування.

<p><b>Модель системи <math>N \times M</math>. Виробництво <math>j</math>-го продукту <math>i</math>-м виробником</b>  <math>(Y1_t)_{i,j} = fr[(X1_{t-1})_{i,j}, Mp1_{i,j}, k1]</math> - функція розвитку  <math>(Mp2_t)_{i,j} = (Mp2_{t-1})_{i,j} + Ds[(Y1_{t-1})_{i,j}]</math> - динаміка параметрів ФВ  <math>(Y2_t)_{i,j} = fv[(X2_{t-1})_{i,j}, (Mp2_{t-1})_{i,j}, k2]</math> - функція виробництва</p> <p><b>Базова задача кожного виробника:</b> максимізація власного сумарного випуску  <math>J_{t,i} = \sum_{j=1}^M (Y_t)_{i,j} \rightarrow \max; i = 1, \dots, N.</math></p> <p><b>Базова узагальнена субмодель локального управління:</b>  <b>Обробка вхідних даних</b>  <math>xs_{i,j} = xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_{t+1})_{i,j} \cdot (1 - \alpha)</math> - ковзне середнє змінних стану;  <math>dxs_{i,j} = dxs_{i,j} \cdot \beta + \Delta x_{i,j} \cdot (1 - \beta)</math> - ковзне середнє темпів змінних стану;  <math>efp_{i,j} = a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}</math> - показник ефективності.</p> <p><b>Розподіл 1:</b> імовірна частка <math>Rpm_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot lox_t</math>,  детермінована частка <math>Rdp_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot (1 - lox_t)</math>.</p> <p><b>Розподіл 2:</b> "лотерейний" <math>(rpm_t)_{i,j} = Rpm_{i,t} \cdot P(rzp_{i,j})</math>,  пропорційний <math>(rdp_t)_{i,j} = Rdp_{i,t} \cdot rzp_{i,j}</math></p> <p><b>Розподіл 3:</b> ресурсу для кожного елемента: <math>r_{i,j} = (rpm_t)_{i,j} + (rdp_t)_{i,j}</math>.</p> <p>Параметри <math>0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1</math> - об'єкти настроювання в залежності від швидкості змін і рівня шумів. Модель управління відтворює відомі алгоритми локального управління вибором параметрів <math>\alpha, \beta, lox</math>.</p>	<p><b>М1 Єдина структура моделі функціонування і розвитку з поліморфним заповненням ФВ, ФР.</b></p> <p><b>М2 Єдина параметризована структура локального управління</b></p> <p><b>М3 Алгебраїзація.</b>  Зведення моделі системи виробників до псевдоодновимірної форми – нелінійного різницевого рівняння.</p> <p><math>S_k = Fno(S_{k-1}, U_{k-1}, V_{k-1})</math></p> <p><b>М4 Новий підхід до аналізу ризиків ВС в активному оточенні</b>  («один на фоні всіх»)</p>
--	---

Рисунок 3.2 – Базова модель функціонування і розвитку системи виробників

### 3.1.1 Постановка задачі децентралізації управління

В розділі 2 вибрано концепцію централізованого розподілу узагальнених ресурсів і оптимального агрегування, а саме – заміну багатоеlementної системи оптимально агрегованою еквівалентною, одноеlementною, однопродуктовою системою. Після оптимізації еквівалентної агрегованої системи, локальні оптимальні управління отримуються дезагрегуванням глобального оптимального управління. В цьому розділі ми виходимо з концепції локального управління: розподілу кожним елементом розподіленої системи власного ресурсу між виробництвами окремими продуктами на базі мінімальної інформації про стан системи виробників. Централізоване управління в цій моделі зводиться до визначення певних однакових для всіх елементів параметрів. Коротко називаємо моделі такого класу « $N$  виробників,  $M$  продуктів,  $K$  користувачів». Такі моделі детально досліджувались в багатьох

роботах, зокрема, в роботах В. Буркова [156, 157], М. Месаровича [228–230], В. Опойцева [239]. Для моделей такого класу, не знайдено прямих прототипів математичної моделі розвитку розподілених систем як декомпозиційної структури. Причина – ці роботи базуються на припущеннях лінійності, випуклості, «малого впливу» виробничих функцій елементів. Вибираємо таку декомпозицію математичної моделі цього класу в ряд моделей зростаючої складності:

- 1) модель «1 елемент, 1 продукт»;
- 2) модель « $N$  елементів, 1 продукт»;
- 3) модель «1 елемент  $M$  продуктів»;
- 4) модель « $N$  елементів  $M$  продуктів» детермінована;
- 5) модель « $N$  елементів  $M$  продуктів» з урахуванням невизначеностей.

Система моделей 1–4 упорядковується операцією агрегування: модель 3 є результатом агрегування системи виробників, модель 2 – результат агрегування системи продуктів в один еквівалентний продукт і, нарешті, модель 1 – результат агрегування по виробниках і продуктах. В роботах [62, 83, 87, 88, 99, 103, 109] розглянуті моделі і результати моделювання для розподілених систем класів « $N$  елементів, 1 продукт» та «1 елемент  $M$  продуктів». Далі подано розробку моделей для розподілених виробничих систем класу « $N$  елементів  $M$  продуктів» з урахуванням невизначеностей. Формально моделі „ $1 \times M$ » та „ $N \times 1$ » є окремими випадками моделі „ $N \times M$ », однак з точки зору розробки та реалізації – це елементи комплексної моделі, що охоплює більше класів реальних об’єктів і більш точно відображує їх суттєві властивості. Нарешті, така комплексна модель є більш стійкою до невизначеностей, в першу чергу, невизначеностей незнання за рахунок взаємоконтролю моделей різної структури і різних рівнів деталізації.

Технічні засоби сьогодні практично є безвідмовними, а програми для забезпечення стійкості до невиявлених помилок і особливостей роблять багатoversійними – кожна програма будується на базі певної математичної моделі. Редукційні моделі використовуються для контролю більш точних моделей. Вимоги розробки нових математичних моделей для нових об’єктів приводять до таких самих структур. Схему такого комплексу подано на рис. 3.3.

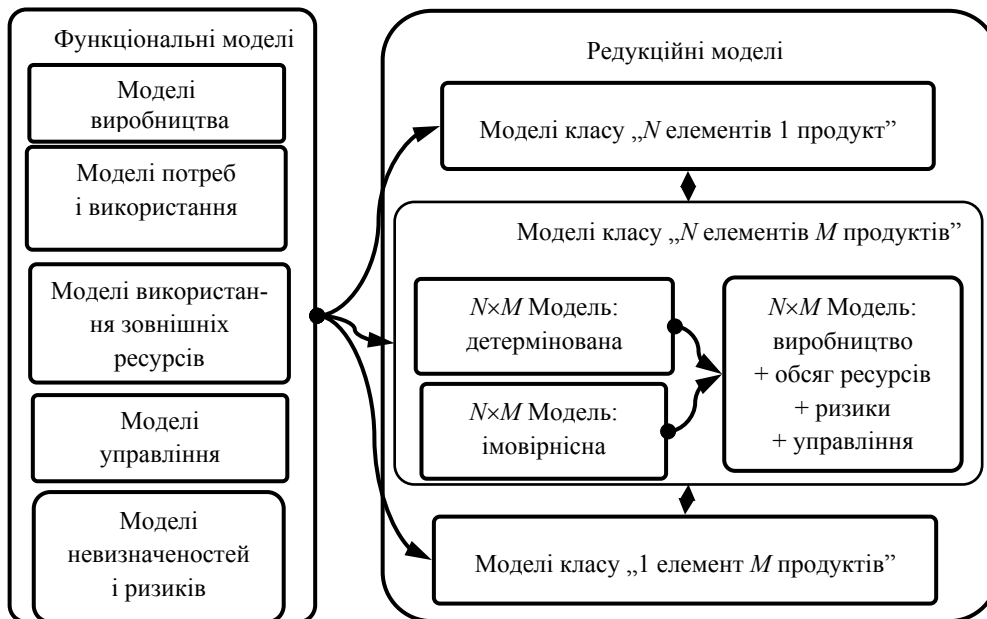


Рисунок 3.3 – Схема системи моделей розподіленої виробничої системи

В розподіленій виробничій системі обсягом виробництва «керують» усі елементи через витрати на розвиток, а обсягом потреб «керує» система – «користувач–виробник», згідно з власними ресурсами, що залежать від виробництва.

### 3.1.2 Аналіз структур децентралізованих систем

Розглянемо розподілену децентралізовану систему як сукупність автономних елементів, що діють в умовах обмеженого попиту. Це викликає перехід від критерію накопиченого прибутку до критерію сумарного темпу виробництва в усталеному стані при насиченні попиту за усіма видами продукції. Сумарний випуск продукції визначається виробничими фондами. Таким чином, критерій рівня виробничих потужностей в кінці перехідних процесів це оцінка потенціалу ресурсів і ефективності освоєння для нових видів продукції. Зробимо аналіз емпіричних стратегій розвитку системи. Планово або стихійно потреби в продукті розподіляються між елементами системи. Для системи в цілому бажано розподілити потреби так, щоб система мала стабільний розвиток; розподіл потреб на різні продукти був би стійким і оптимальним. Розглянемо емпіричні розв'язання задачі оптимального розподілу  $M$  видів продуктів між  $N$  елементами системи (рис. 3.4) [10, 34].

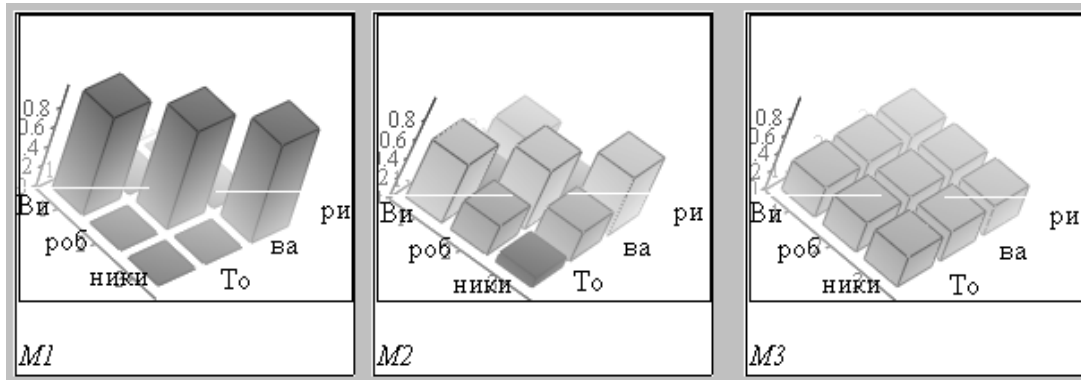


Рисунок 3.4 – Задача розподілу виробництва  $M$  продуктів між  $N$  елементами

Можливі такі розподіли виробництва між елементами системи виробників:

- жорстка спеціалізація: кожний елемент виконує тільки свою задачу (випускає один продукт), постійно підвищує ефективність свого продукту в своїй справі. Система розпадається на незалежні функціональні підсистеми;
- повна універсальність: кожен елемент виконує усі задачі в однакових обсягах. Можна сказати, що спеціалізація елементів відсутня, кожен елемент виробляє повний спектр продуктів;
- пропорційний розподіл. Природно припустити, що оптимальний розподіл буде компромісом між жорсткою спеціалізацією і повною диверсифікацією.

### 3.1.3 Аналіз і вибір функціональних субмоделей для децентралізованої моделі управління

Діяльність елемента виробничої системи складається з виконання таких функцій (див. рис. 3.1): виробництво продукту, – доведення продукту до користувачів, – розподіл ресурсу виробництва і розвитку між виробництвами. Послідовність цих функцій складає повний виробничий цикл – від вкладення до повернення ресурсів і повторюється з певною регулярністю. В моделі першого наближення вважаємо виробництво детермінованим, не враховуємо у явному вигляді запізнення виробництва, запізнення віддачі витрат на розвиток. Процеси розширення виробництва подаємо моделлю росту з обмеженням: приріст виробництва пропорційний досягнутому рівню і незаповненості ринку, і обсягу витрат на розвиток. Перекладемо лінгвістичні моделі на мову математики. Основними об'єктами робочої моделі робимо тривимірні масиви.

**Модель потреб.** Загальну модель потреб подаємо як ряд моделей, що поступово ускладнюються і уточнюються – це редуційна декомпозиція. В базову модель закладаємо простішу модель – фіксовані потреби і ціни для кожного продукту. Також в базовій моделі вважаємо, що усі виробники певного  $j$ -го продукту виробляють його з однаковим рівнем корисності і якості.

**Модель виробництва і розвитку.** Загальну модель виробництва теж подаємо як ряд моделей, що ускладнюються, і починаємо цей ряд з лінійної моделі виробництва. За основу беремо узагальнену модель зростання з обмеженням [39]. Подаємо цю модель в дискретній, робочій формі.

$$\Delta X_{i,j} = \left[ \varphi_i \cdot [(X_t)_{i,j}] \cdot \left( \frac{Rm_j - Ss_{j,t}}{Rm_j} \right) \cdot Inv_{i,j} \right] \cdot krok ; (X_{t+1})_{i,j} = (X_t)_{i,j} + \Delta X_{i,j}. \quad (3.1)$$

Цьому виразу відповідає така словесна формула:

*поточне прирощення випуску  $i$ -м учасником  $j$ -го продукту =  
= ефективність × обсяг поточний × відносний обсяг потреб ×  
× зовнішні ресурси × крок.*

Перші три множники – це коефіцієнти, що характеризують поточну ефективність перетворення витрат на розвиток  $Inv_{i,j}$  у прирощення виробничих потужностей  $\Delta X_{i,j}$ . Відносний обсяг попиту може бути і від’ємним у випадку перевиробництва. В цій моделі згорнуто три моделі: функції виробництва, розвитку виробництва, виробництва інновацій. Саме система з трьох послідовно поєднаних елементів є кінцевою метою дослідження.

**Моделі локального управління.** Елементи системи самостійно розподіляють ресурси між виробництвами різних продуктів. «Ринковий» принцип регулювання однаково ефективно працює в алгоритмах оптимізації, обчислювальних системах і у системах матеріального виробництва. На рис. 3.5 подано схему прийняття рішень, що є формалізацією практичного досвіду. Особливість цієї схеми в тому, що вона може бути основою для побудови адаптивних алгоритмів автоматичного управління і зручна для включення в контур управління людини.

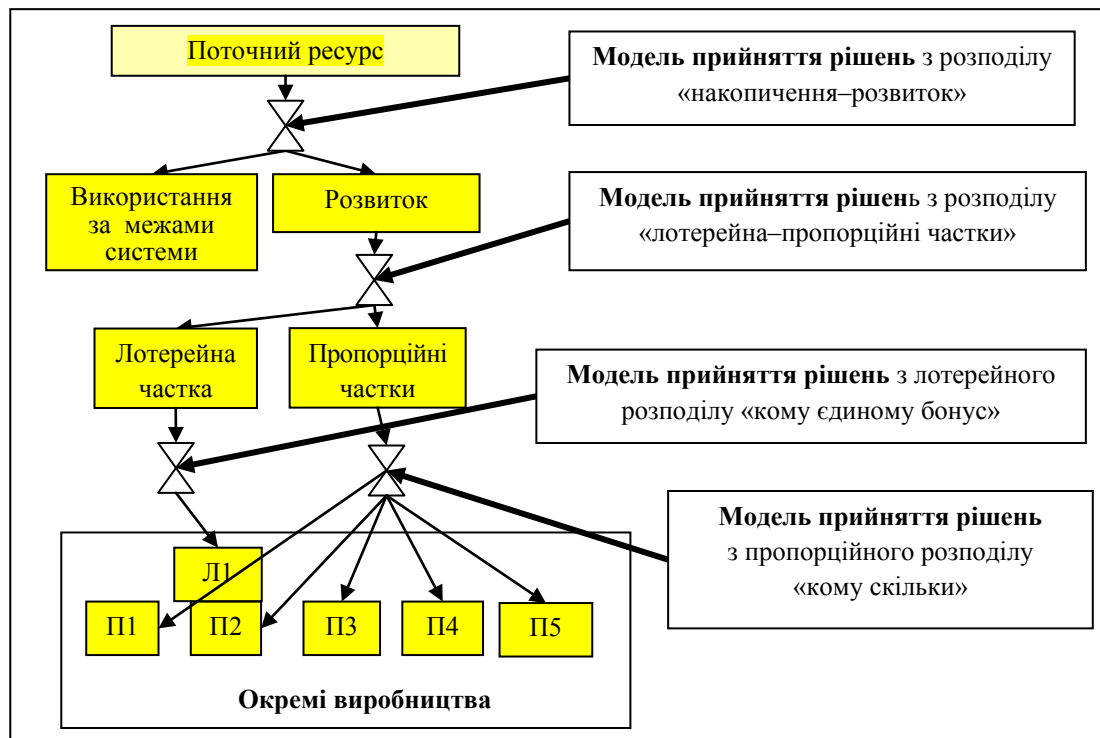


Рисунок 3.5 – Узагальнена схема локального управління

**Детермінована модель локального управління.** Розглядаємо таку детерміновану модель розподілу ресурсів елемента по розвитку виробництв окремих продуктів [11, 13, 41, 42, 51]: виробник оцінює перспективність розширення виробництва. Тут можуть бути такі альтернативи: згідно з усередненим за певний період обсягом продажів кожного продукту; згідно з сумою усереднених успіху та темпу успіху (темп = похідна); згідно з сумою усереднених успіху, темпу успіху і темпу темпу успіху (темп темпу = похідна другого порядку).

Словесна модель оцінки перспективності продукту має вигляд:

$$\begin{aligned} \text{оцінка} = & a1 \times \text{середня\_віддача\_зовнішніх\_ресурсів} + \\ & + a2 \times \text{середній\_темп\_зміни\_віддачі} + a3 \times \text{темп\_темпу\_зміни}. \end{aligned}$$

Виберемо альтернативу 2. Робимо модуль «ковзне середнє». Задаємо перше значення середнього:  $xs_{i,j} = (X_1)_{i,j}$ ; параметр оновлення середнього  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Маємо ковзний середній темп виробництва. Параметр  $\alpha$  – темп оновлення середнього (або швидкість «забування» минулих значень). Вибирається цей параметр в залежності від швидкості змін процесу і рівня шумів

$$xs_{i,j} = xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_{t+1})_{i,j} \cdot (1 - \alpha). \quad (3.2)$$

Аналогічно робимо ковзне середнє для прирощення темпу випуску – ковзний середній темп прирощення темпу виробництва

$$dxs_{i,j} = dxs_{i,j} \cdot \beta + \Delta x s_{i,j} \cdot (1 - \beta). \quad (3.3)$$

Параметри  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$  – об'єкти настроювання в залежності від швидкості змін і рівня шумів [10, 41]. Оцінка перспективності продукту

$$efp_{i,j} = a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}. \quad (3.4)$$

**Імовірнісна модель локального управління.** Природним глобальним критерієм для системи в цілому є темп сумарного виробництва, або накопичене за певний період сумарне виробництво. Цю задачу розв'язуємо непрямим шляхом – кожен елемент максимізує свій власний темп сумарного виробництва; не шукаємо максимум сумарного виробництва, а розподіляємо ресурс відповідно до критерію «очікувана ефективність» (3.2)–(3.4). Згідно з принципом недостатності підстав при повній невизначеності альтернатив слід вважати їх рівнозначними. В статті [42] розглянуто алгоритм «вибір–навчання», що починав роботу з рівномірного розподілу ресурсів і по мірі накопичення даних змінював оцінки ефективності виробництва продуктів. Відбираємо з цього діапазону розподілів два простих для реалізації: пропорційно критерію перспективності продукту  $efp$ ; монопольно – кращому продукту весь поточний ресурс. На базі цих детермінованих моделей розподілу будуємо імовірнісний алгоритм розподілу поточного ресурсу між виробництвами різних продуктів. Розподіляємо ресурс елемента на дві частини: імовірнісну  $0 \leq lox \leq 1$  та детерміновану  $(1 - lox)$  частки. Частка  $lox$  випадає одному продукту, але згідно з розподілом ймовірностей, що формується нормуванням ефективностей продуктів; частка  $(1 - lox)$  ділиться відповідно цьому ж розподілу. Змінюючи параметр  $lox$  в діапазоні  $0 \leq lox \leq 1$  отримуємо широкий спектр детермінованих та імовірнісних законів управління. Відповідні залежності:

– нормований критерії перспективності продуктів

$$rzp_{i,j} = \frac{efp_{i,j}}{\sum_{K=1}^M efp_{i,j}}, \quad (3.5)$$



– розподіл ресурсу між детермінованою часткою та імовірнісною

$$Rpm_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot lox_i, \quad Rdp_{i,t} = Rs_{i,t} \cdot (1 - lox). \quad (3.6)$$

Розподіл цих часток між витратами на розвиток виробництва продуктів:

– «лотерейний» розподіл

$$(rpm_t)_{i,j} = Rpm_{i,t} \cdot P(rzp_{i,j}), \quad (3.7)$$

– пропорційний розподіл

$$(rdp_t)_{i,j} = Rdp \cdot rpz_{i,j}, \quad (3.8)$$

частки ресурсу для кожного елемента

$$r_{i,j} = (rpm_t)_{i,j} + (rdp_t)_{i,j}, \quad (3.9)$$

де  $i = 1 \dots N$ ,  $j = 1 \dots M$  – індекси елементів та продуктів;  $0 \leq lox_i \leq 1$  – частка поточного ресурсу системи, що розподіляється ймовірно («лотерейний розподіл»);  $Rs_{i,t}$  – поточний сумарний ресурс  $i$ -го елемента;  $Rpm_{i,t}$ ,  $Rdp_{i,t}$  – імовірнісна монопольна, детермінована пропорційна частки ресурсу відповідно;  $P(rzp_{i,j})$  – випадкова подія: ресурс  $Rpm_{i,t}$  виділений для розвитку виробництва  $j$ -го продукту;  $(rpm_t)_{i,j}$ ,  $(rdp_t)_{i,j}$  – імовірнісна та детермінована складові поточного ресурсу, виділеного у розвиток  $j$ -го продукту;  $r_{i,j}$  – локальне управління: поточний ресурс, виділений  $i$ -м елементом у розвиток  $j$ -го продукту.

Можливі дві альтернативи прийняття рішення на базі цих даних. Вибираємо і комбінуємо обидві альтернативи як зважену суму. Збираємо робочі функціональні моделі виробництва, попиту, локального управління в базову програму моделювання.

### 3.1.4 Розробка інтерфейсу програми моделювання

Згідно з вибраною концепції повністю відкритої для користувача програмної системи інтерфейс має три рівні: введення і виведення параметрів задачі, початкових значень змінних і параметрів; введення функціональних модулів програми з відповідної бібліотеки; внесення змін безпосередньо в текст програми. Інтерфейс третього рівня – це текст програми з коментарями. У вибраному середовищі текст програми відповідає стандартам математичних публікацій. Відкритий текст для бі-

льшості користувачів – це важливий фактор впевненості і довіри до програми і математичної моделі. Розроблена програмна система придатна для моделювання систем розмірності 100×100 і більше, якщо необхідно.

На рис. 3.6 подано реалізацію базової моделі поряд з текстом програми моделювання *NM*-системи. *Інтерфейс введення*. Будуємо інтерфейс на базі ранжування елементів системи за певними показниками – узагальненим «розміром» елемента, що може мати такі інтерпретації: «капітал», «дохід», «виробнича потужність» та ін. Усі вхідні дані: продуктивності виробників, потреби та ін., подаємо у ранжованому вигляді. Рангові розподіли широко використовуються для опису активних систем.

<p>Сумарне поточне виробн. <i>i</i>-го елемента</p> $Dox_{i,t} = \sum_{j=1}^M (X_t)_{i,j}$ <p>Інвестиції <i>i</i>-го елемента в <i>j</i>-те виробництво</p> $Inv_{i,j} = Dox_{i,t} (Rozt)_{i,j}$ <p>Накопичений поточн. випуск <i>j</i>-го продукту</p> $Sus_{j,t} = \sum_{i=1}^N (X_t)_{i,j}$ <p>Ковзний середн. випуск <i>j</i>-го прод. <i>i</i>-м елементом</p> $xs_{i,j} = xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_{t+1})_{i,j} \cdot (1 - \alpha)$ <p>Ковзн. середн. приріст <i>j</i>-го прод. <i>i</i>-м елем.</p> $dxs_{i,j} = dxs_{i,j} \cdot \beta + xs_{i,j} \cdot (1 - \beta);$ <p>Оцінка перспективн. <i>j</i>-го прод. <i>i</i>-м елем.</p> $efp_{i,j} = a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}$ <p>Нормов. розподіл ресурсів в <i>i</i>-му елементі по усім виробництвах</p> $(Rozt)_{i,j} = efp_{i,j} \div \sum_{j=1}^M efp_{i,j}$	$Dox_{i,t} \leftarrow \sum_{j=1}^M (X_t)_{i,j}$ <p><math>\forall i \ j \in 1..M</math></p> $Sus_{j,t} \leftarrow \sum_{q=1}^N (X_t)_{q,j}$ $xs_{i,j} \leftarrow xs_{i,j} \cdot \alpha + (X_t)_{i,j} \cdot (1 - \alpha)$ $\Delta xs_{i,j} \leftarrow xs_{i,j} - xs^2_{i,j}$ $dxs_{i,j} \leftarrow dxs_{i,j} \cdot \beta + \Delta xs_{i,j} \cdot (1 - \beta)$ $efp_{i,j} \leftarrow a1 \cdot xs_{i,j} + a2 \cdot dxs_{i,j}$ $Rzp_{i,j} \leftarrow efp_{i,j} \cdot nrmef_i$ $Inv_{i,j} \leftarrow Dox_{i,t} Rzp_{i,j}$ $\Delta X_{i,j} \leftarrow \left[ efp_i \left[ (X_t)_{i,j} \right] \cdot \left( \frac{Rrk_j - Sus_{j,t}}{Rrk_j} \right) \cdot Inv_{i,j} \right] \cdot krok$ $xax_{i,j} \leftarrow (X_t)_{i,j} + \Delta X_{i,j}$ $xs^2_{i,j} \leftarrow xs_{i,j}$ $nrmef_i \leftarrow 1 \div \sum_{q=1}^M efp_{i,q}$
---	---

Рисунок 3.6 – Реалізація базової моделі класу «*N* виробників, *M* продуктів»

На рис. 3.7 подано блок введення параметрів, розроблений на основі рангового подання параметрів системи. Ми задаємо тільки залежності

для рангових розподілів ефективності виробників, стартових виробничих потужностей та ін., а в сервісному модулі обчислюються значення параметрів для кожного елемента системи.

**Параметри розподілів сукупності продуктів, ефективності, стартових темпів виробництва:** Число виробників  $N=30$ , число продуктів  $M=10$ ,  $ORIGIN=1$ ,  $i=1 \dots N$ ,  $j=1 \dots M$

Параметри системи: середні об'єми продуктів на одного виробника  $Rys=6$ ; ефективність інвестицій  $efs=1.1$ ; стартовий темп виробництва  $Xos=0.2$ ; Домінування в стартовому рівні (відносне)  $Dom=0.0$ . Мінімальна сукупність продуктів  $Rmi=2$ ; мінімальна ефективність  $efmi=1.1$ ; мінімальний стартовий темп  $Xom=0.1$

**Параметри моделювання.** Період моделювання кроків  $Tmo = 150$ ; час  $tt=1 \dots Tmo$ ; крок моделювання  $dT=0.07$ ; стартові значення для змінних програми: темп росту  $tmpyi,j = 0$ ; перспективності продуктів  $nrmeff = 10$ ; стартові значення множн.  $Nmrfei=0.8$ ; пропорції розподілу  $rzoj,j=1 \div N$ .

**Параметри моделі прийняття рішень.** Усереднення: темпу виробництва  $\alpha=0.8$ ; темпу прирощення  $\beta=0.7$ . Цінності: темпу  $a1=1$ ; прирощення  $a2=30$ .

Рисунок 3.7 – Модуль введення даних для моделювання *MM*-систем

**Інтерфейс виведення результатів моделювання.** Інтерфейс виведення повинен дати в комплексному, одночасно компактному і вичерпному вигляді характеристики як системи в цілому, так і окремих елементів. В сервісному модулі формуються дані для комплексних таблиць і графіків. Сервісний модуль також має відкритий текст і може змінюватись і налаштовуватись. Інтерфейс виведення складається з таких функціональних підсистем (сторінок):

- порівняльний аналіз процесів розвитку для двох вибраних елементів;
- аналіз рангових розподілів для системи в цілому та окремих елементів;
- аналіз динаміки розподілів темпів виробництва в системі;
- аналіз впливу стартових розподілів параметрів елементів.

### 3.1.5 Аналіз результатів моделювання децентралізованої системи

Мета проведених досліджень – перевірка адекватності результатів моделювання відомим статистичним даним, пошук нових результатів. На рис. 3.8 подано приклад результатів моделювання для системи класу  $N \times 1$  –  $N$ -виробників, один агрегований продукт.

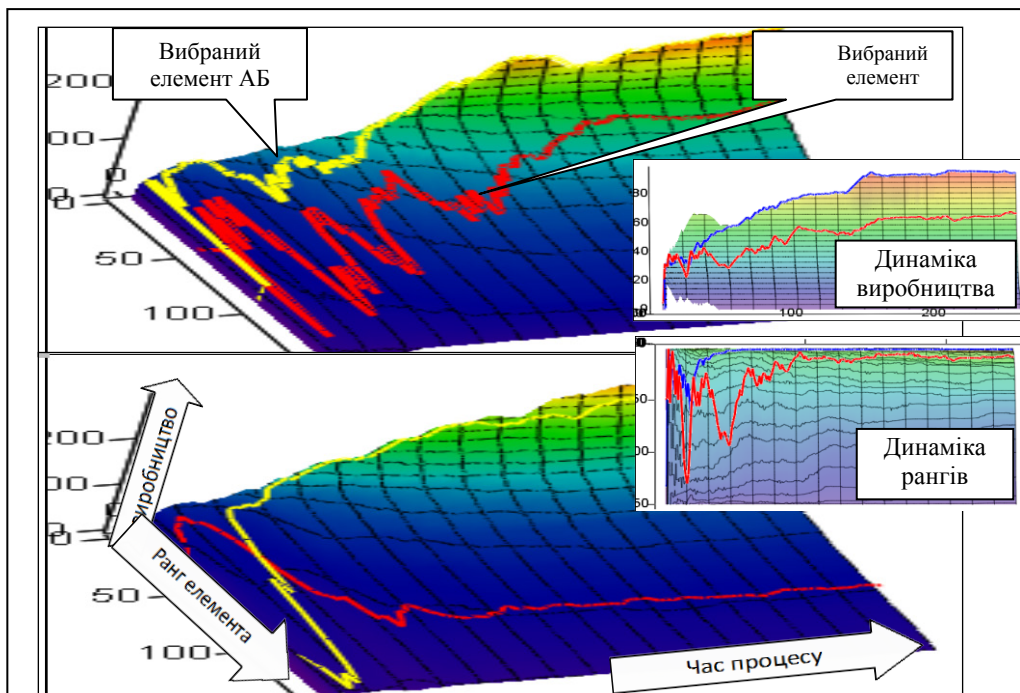


Рисунок 3.8 – Приклади моделювання системи  $N$  виробників, один продукт

Тривимірний графік – послідовність поточних рангових розподілів виробників. Подано дві реалізації випадкового процесу розвитку. На «фоні» цих рангових розподілів подано траєкторії двох виробників. На малих графіках подано дві проекції 3Д-графіка – динаміка рангів і динаміка виробництва. Коли виробнича система знаходиться в активному оточенні, то суттєвими стають не абсолютні рівні і темпи виробництва, а їх місце (ранг) в оточенні. Між іншим, в прикладі взято 150 виробників.

Відмінності моделювання і оптимізації від робіт-прототипів – процес оптимізації розвитку елемента проходить в активному середовищі інших елементів.

**Аналіз динаміки розподілів виробництва в системі « $N \times M$ ».** Для розподілених систем класу « $N \times M$ » при певних значеннях параметрів виникають «ступінчасті» режими розвитку. На рис. 3.9 подано приклад результатів моделювання вже для системи класу « $N \times M$ » –  $N$  виробників,  $M$  продуктів.

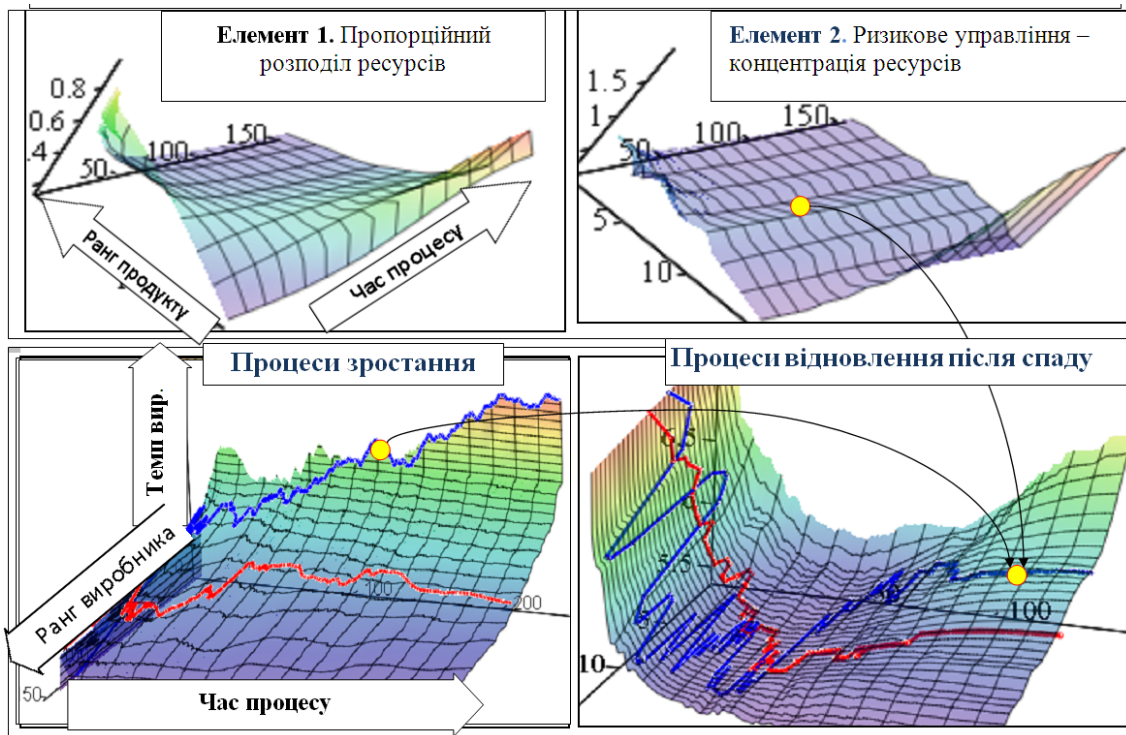


Рисунок 3.9 – Моделювання системи « $N$  виробників,  $M$  продуктів». Приклад

В нижній частині рис. 3.9 подано два процеси в системі виробників – зростання і спад з наступним зростанням. «На фоні всіх» подано процеси для двох виробників. В верхній частині рис. 3.9 подано динаміку розподілу ресурсів певного виробника між виробництвами різних продуктів, ранжованих за ефективністю їх випуску. Можлива інтерпретація рис. 3.8, 3.9 – моделювання виробничої системи за альтернативними моделями – з агрегованими продуктами виробництва і деталізованої.

Задовільна модель за рівнем адекватності може бути ефективним джерелом віртуальної статистики.

На рис. 3.10 подано тестовий приклад для системи з чотирьох елементів, виконано 2000 прогонів програми моделювання і отримано розподіли ймовірностей для показників в кінці заданого періоду розвитку.

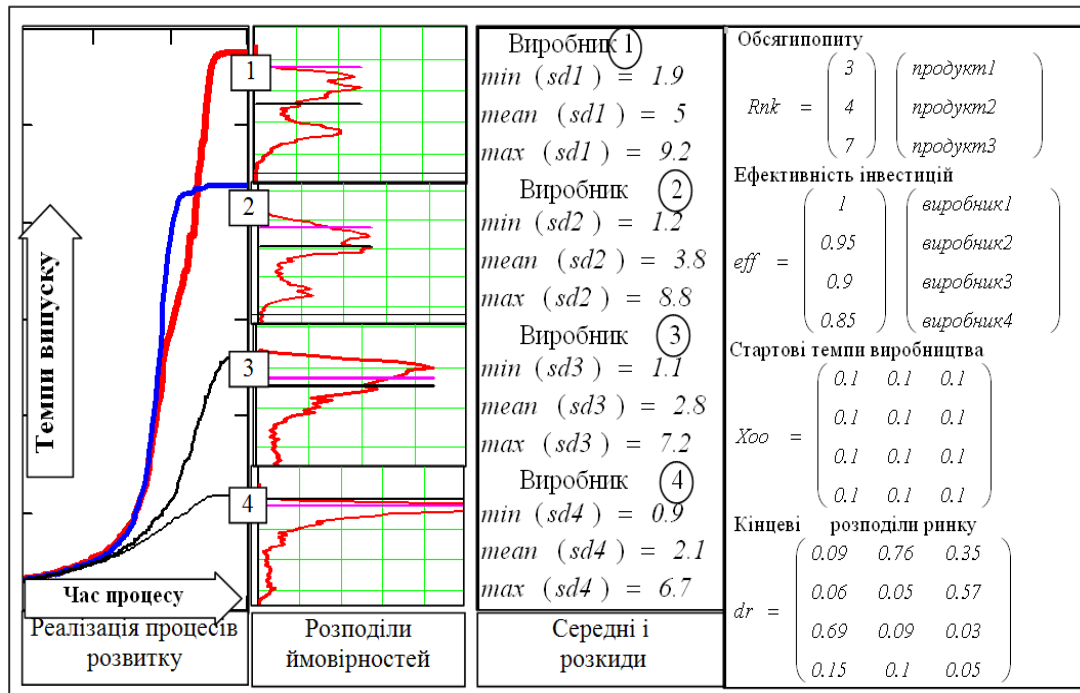


Рисунок 3.10 – Системи класу *NM* малої розмірності. Аналіз ризиків. Приклад

Розподіли ймовірностей не згладжуються при зростанні вибірки, вони мають фрактальний характер. Це обумовлено тим, що збурення для одного виробника викликають через інтенсивні ресурсні зв'язки збурення для інших виробників. Маємо модель-предиктор для потенційного практичного і науково-дослідного використання. Модель може бути настроєна на відображення певної реальної виробничої системи на обмеженому статистичному матеріалі, за умови досить точного відтворення «породжуючих механізмів» (адекватність за Форрестером).

**Аналіз рангових розподілів для темпу сумарного виробництва.** Важливим індикатором оптимальності та стійкості активних систем [10, 11, 13, 17, 34, 41, 42, 60, 62, 74, 75, 83, 87, 88, 99, 103, 212], до яких відносяться і розподілені виробничі системи, вважаються певні значення нахилів асимптот рангових розподілів. Оптимальними нахилами є нахили  $\alpha_2 = -1$  та  $\alpha_1 = -0.5$ . Запропоновані базові моделі і програми можуть відтворити все, що спостерігається для реальних розподілів ресурсів у розподілених системах. У відомій літературі розглядаються переважно імовірнісні математичні моделі, що породжують рангові розподіли в активних системах [280, 284, 285]. Отримано детерміновану модель, що при певних умовах породжує гіперболічні розподіли. Моделюванням підтверджено, що гіперболічні

рангові розподіли малочутливі до зміни кількості елементів в системі, тобто гіперболічні розподіли є системною властивістю. Умовою виникнення гіперболічних рангових розподілів в детермінованій системі є стартова різниця  $efi_i$  в ефективності елементів. Невелика різниця ефективностей елементів в 3–5 % породжує велику, гіперболічну різницю в усталених темпах сумарного виробництва кожного елемента. Структура усталеного рангового розподілу виробництва різних продуктів між елементами є суттєво нерівномірною. На рис. 3.11 подано графіки рангових розподілів елементів за ефективністю витрат на розвиток (причина) та темпами сумарних випусків (наслідки).

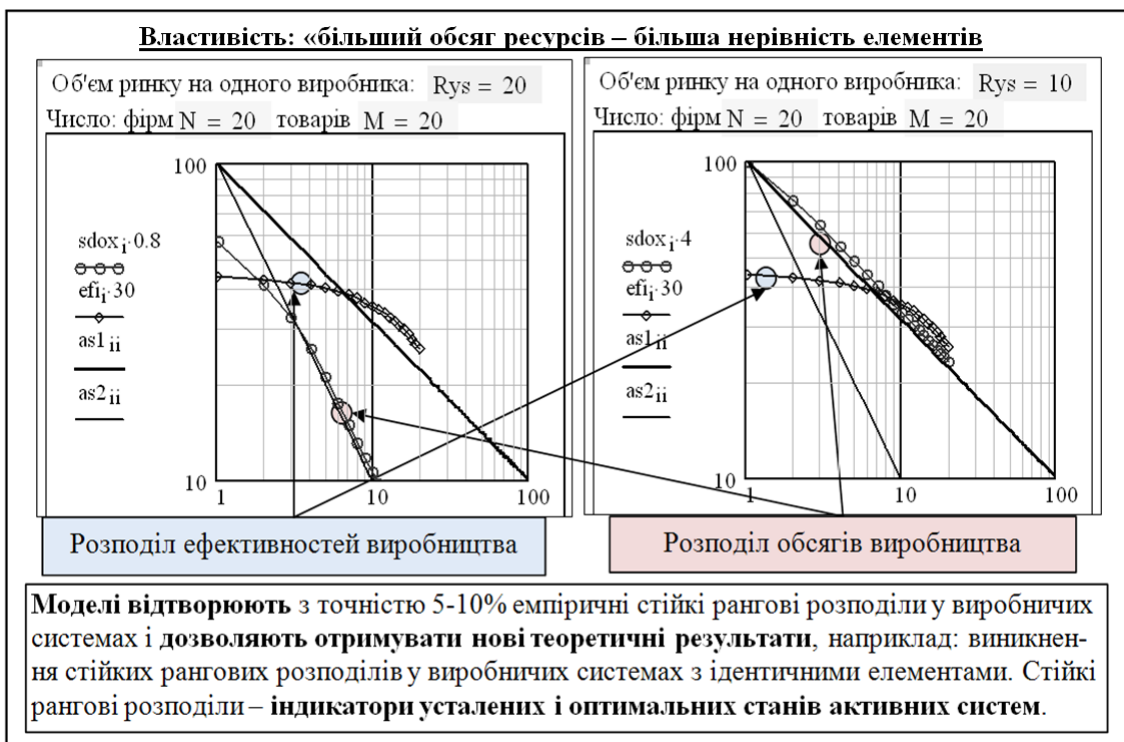


Рисунок 3.11 – Результати аналізу адекватності.

Стійкі рангові розподіли виробників

Нерівномірність розподілу обсягів виробництва продуктів між елементами має два рівні – кількісний, за сумарними виробництвом; та структурний (якісний), за часткою виробництва певного продукту. Можна бачити, що кращі виробники мають більші частки по кращих продуктах, аутсайдери мають збільшені частки по гірших продуктах. Тобто в активних системах кращі за продуктивністю елементи не просто забирають більшу частку виробництва, вони при цьому забирають



виробництва кращих для виробника продуктів. Це властивість оптимальних систем з запропонованим алгоритмом локального управління. Проведемо аналіз впливу стартових розподілів параметрів елементів. Процеси розвитку і кінцевий стан розподіленої системи суттєво залежать від початкових умов. На рис. 3.12 подано усталений ранговий розподіл сумарного виробництва по кожному елементу, та його деталізація – графік розподілу темпів випусків продуктів для кожного елемента. Стартові темпи виробництва є однаковими для всіх елементів, а ефективність елементів відрізняється на 5 %.

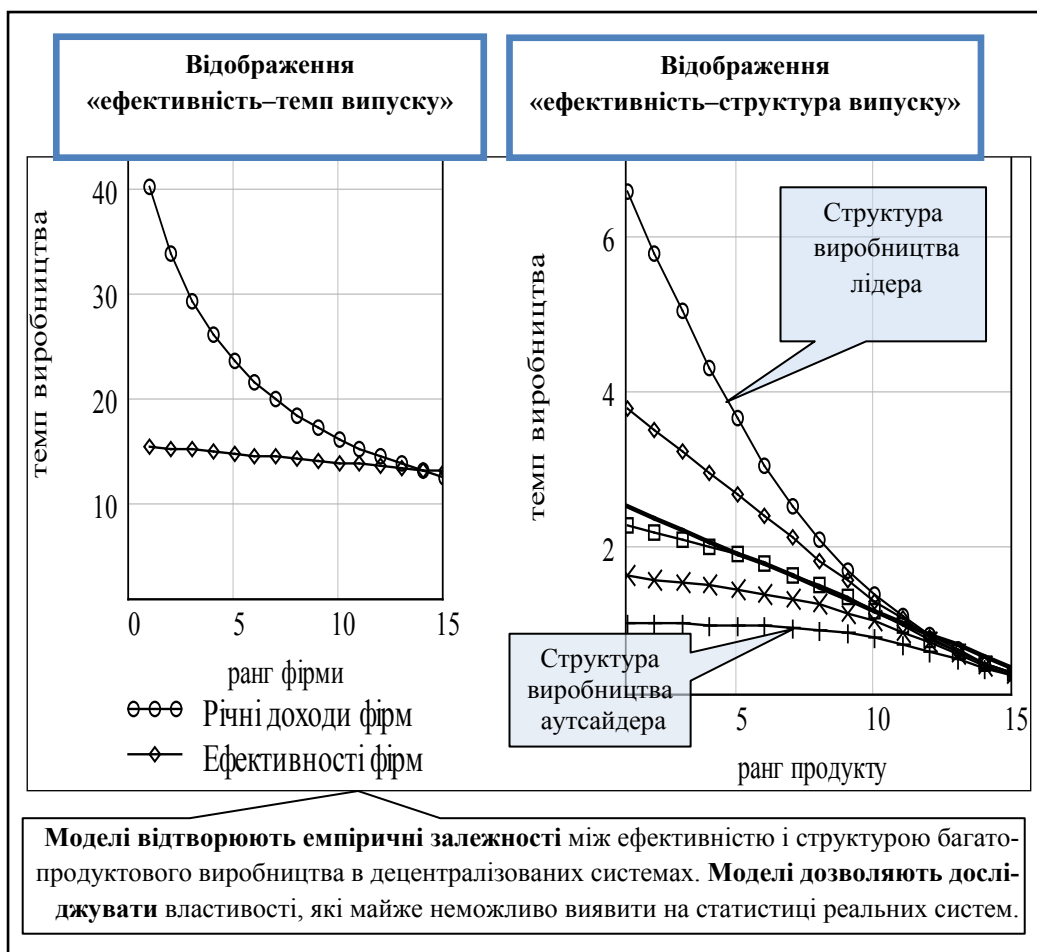


Рисунок 3.12 – Розподіли обсягів виробництва в залежності від рангу продукту для виробників з різною ефективністю

На рис. 3.13 подано рангові розподіли сумарного виробництва елементів та тривимірні графіки кінцевих розподілів «виробники–продукти».



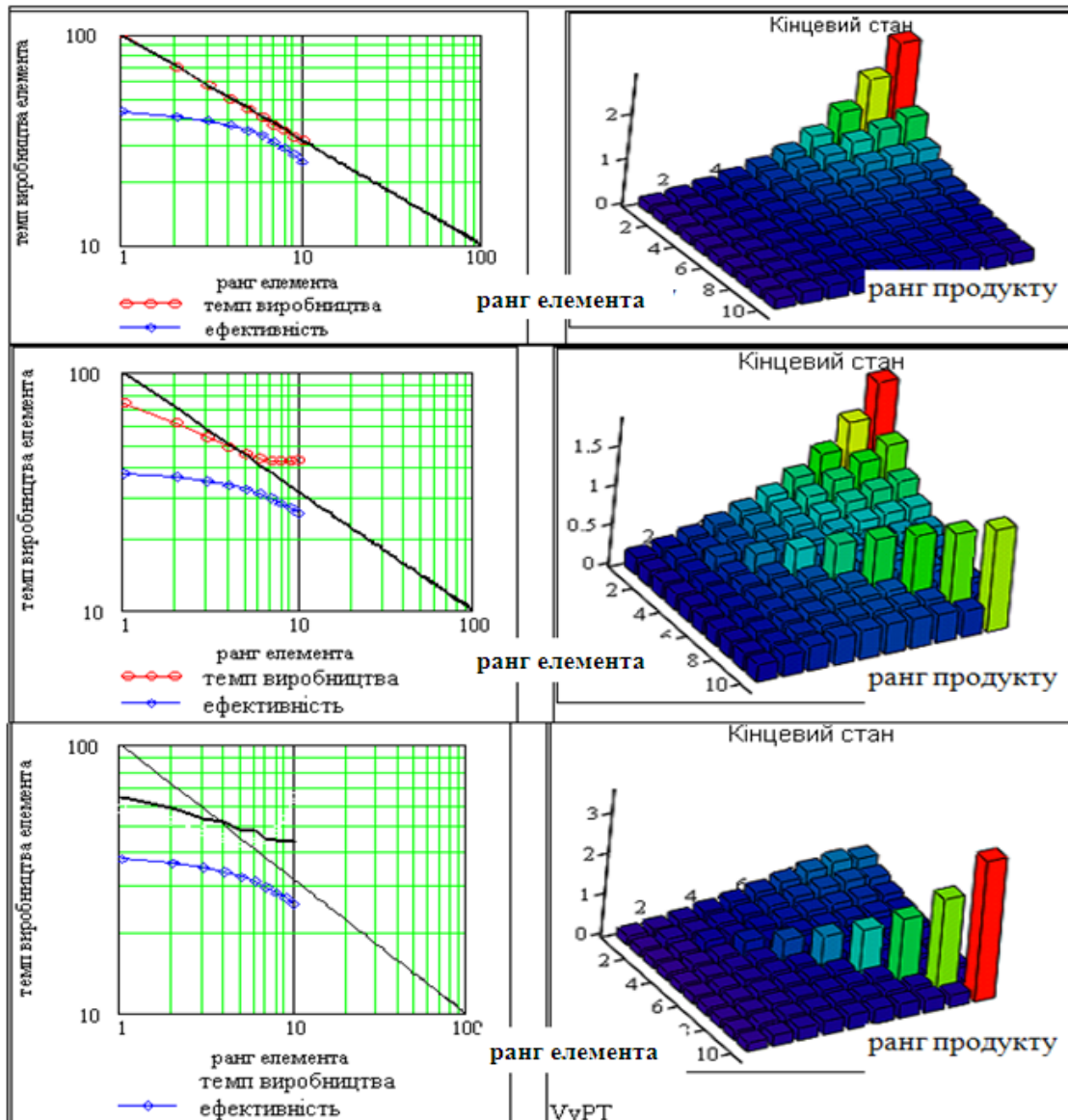


Рисунок 3.13 – Розподіл продуктів між виробниками при різних структурах стартового домінування виробників по одному з продуктів

Ці три пари графіків подають результати дослідження: вплив початкового домінування у виробництві певного продукту для кожного елемента. Для верхньої пари графіків вибрано сценарій: елемент з найбільшою ефективністю домінує у виробництві найгіршого продукту, елемент з найменшою ефективністю – у виробництві найкращого продукту. Згідно з моделлю функціонування елемента і моделлю локального управління (3.1)–(3.4) виникає спеціалізація кожного елемента у «своєму» продукті. У випадку малого (10 %) домінування у стартовому рівні виробництва кожного елемента по одному з продуктів

виникає структура (пара графіків посередині на рис. 3.13), що є аплікацією двох розподілів «повне домінування» та «повна спеціалізація» (нижня пара графіків на рис. 3.13).

Тобто, модель відтворює конфігурації, що спостерігаються в реальності. Звернемо увагу на неможливу для лінійних і стаціонарних систем особливість: гірший за продуктивністю елемент є лідером, тільки тому, що він мав стартове домінування по кращому продукту.

Цей результат суперечить постулатам про домінування кращого за продуктивністю елемента [280, 284, 285]. Базова модель була модифікована для дослідження поведінки системи при відмовах елементів. Показано, що у всіх випадках навантаження перерозподіляється між працюючими елементами і сумарний темп виробництва в усталеному стані близький до максимуму.

### **3.2 Узагальнення моделі локального управління**

В підрозділі 3.1 розроблено модуль детермінованого розподілу ресурсу елементом виробничої системи між окремими продуктами та модуль прийняття рішень з лотерейного розподілу «кому єдиному бонус». Тепер зробимо узагальнений модуль, де поточний ресурс ділиться спочатку на дві частки. Потім одна частка розподіляється детерміновано між окремими продуктами пропорційно критеріям їх перспективності, друга частка – імовірно виділяється одному з елементів. Імовірності вибору елементів формуються пропорційно критеріям перспективності елементів. Для ізольованого елемента математичні очікування величин ресурсу, що виділяється для розвитку окремих продуктів, при чисто імовірнісному розподілі будуть пропорційними значенням критерію перспективності. Тобто, для ізольованого елемента розподіленої системи середні величини ресурсу для розвитку різних продуктів будуть сходиться до величин визначених детермінованим розподілом.

Однак для ансамблю нелінійних динамічних систем, що виробляють певні продукти при наявності обмежень на сумарний обсяг виробництва, результати імовірнісного розподілу не будуть тотожними результатам детермінованого пропорційного розподілу. В рамках базової моделі, на початкових етапах розвитку, коли до обмежень су-

марного виробництва ще далеко, концентрація ресурсів на одному з продуктів дає не тільки більший приріст темпу сумарного виробництва, але й приводить до незворотного розподілу потрібного виробництва на певний продукт. Альтернативою детермінованому пропорційному розподілу може бути детермінований монопольний розподіл – весь поточний ресурс віддавати кращому за критерієм перспективності продукту. Пропорційний і монопольний детерміновані розподіли – механізми наближеної реалізації оптимальних стратегій розвитку для різних умов – зростання, спаду, великих, малих невизначеностей.

В розділі 2 отримано точний розв’язок задачі оптимізації розвитку як варіаційної задачі Больца. В умовах невизначеностей точність математичних моделей повинна бути адекватною точності вхідних даних. До таких моделей відноситься модель комбінованого розподілу ресурсу (див. рис. 3.2, 3.5).

Викладені результати складають *новий науковий результат*.

*Вперше запропоновано і реалізовано* узагальнену структуру і метод локального управління окремим виробником в активному оточенні інших виробників певного сегмента виробництва, що відрізняється від існуючих методів декомпозицією процесу управління на такі кроки: визначення пропорції розподілу ресурсу виробничої системи між частками на ризикове і детерміноване управління; розподілу цих часток між виробництвами окремих продуктів. Запропонований метод локального управління є узагальненням – змішаною стратегією на базі відомих детермінованих та імовірнісних методів, що дає: можливість адаптації локального управління станом сегмента виробництва до невизначеностей стану виробництва, потреб, появи нових технологій; можливість імітації управління окремим виробником сегмента за рахунок доступної статистики і побудови імітаційної моделі системи виробників для реалізації нового підходу «один на фоні всіх» до оцінки ризиків певного виробника з урахуванням імітації дій інших виробників. *Аналоги* – алгоритми відкритого управління (В. Опойцев, В. Бурков), алгоритми функціонування елементів штучних нейронних мереж (Я. Ципкін). Запропонований алгоритм – система двох алгоритмів різних структурних класів. *Актуальність* – задачі розподілу ресурсів в розподілених системах різних рівнів виконуються регулярно і переважно на базі інтуїції та емпіричних правил. *Суть результату* –

синтез відомих методів управління функціонуванням і розвитком: методів обробки вхідних даних, методів пропорційного розподілу і методів імовірнісного – «бонусного» розподілу ресурсів в єдиний адаптивний алгоритм розподілу ресурсів для розвитку між виробничими елементами. Запропонований алгоритм зміною параметрів може змінюватись і відтворювати відомі детерміновані та імовірнісні алгоритми локального управління в мережевих системах.

### **3.2.1 Технологія модифікації робочої моделі локального управління**

Процес розробки модуля локального управління був розбитий в послідовність кроків – від елементарних одновимірних генераторів випадкових подій до багатовимірної системи з самонастроюванням параметрів алгоритму локального управління. Цей процес в практичному аспекті – технологія швидкої і безпомилкової розробки певного кінцевого продукту, програмного модуля, в теоретичному аспекті – інтерпретація оператора редукційної декомпозиції моделі локального управління. Змінні, за якими упорядковується система моделей, породжених редукційною декомпозицією – розмірності системи  $M \times N$ , та кількість параметрів для яких виконується самонастроювання. Тексти програм  $vp7(Mr)$  та  $vp8(Mr, lox)$  подані в додатках В [71]. Модуль  $vp8(Mr, lox)$  бере матрицю ефективності кожного продукту у кожного елемента  $Mr$  розміром  $(M \times N)$  та вектор  $lox$  значень «ризикової частки» управління для кожного продукту (в теорії прийняття рішень в умовах невизначеності це називають «схильністю до ризику»), і повертає матрицю розподілу ресурсу, кожен стовпець якої – вектор розподілу ресурсу між окремими продуктами для відповідного елемента. Для кожної версії модуля локального управління були побудовані інтерфейси для налагодження і тестування.

Програма моделювання процесів розвитку розподілених систем з урахуванням невизначеностей отримана незначною зміною попередньої програми моделювання детермінованих процесів розвитку. На рис. 3.14 подано кінцеві фрагменти двох програм. Виділено виклик підпрограми локального управління. Це приклад елемента раціональної технології побудови робочих моделей, що є поєднанням абстрактних концепцій декомпозиції і практичних правил розробки ефективних програм.

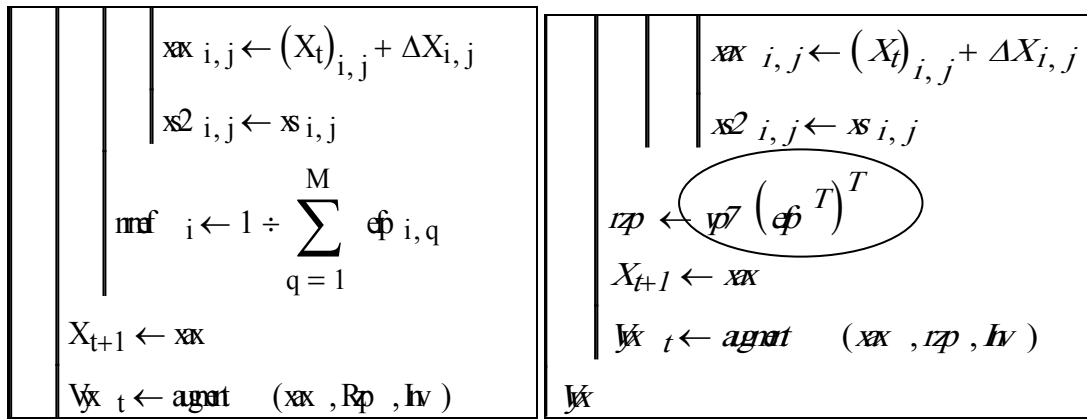


Рисунок 3.14 – Порівняння версій програм моделювання процесів розвитку

### 3.2.2 Аналіз властивостей процесів розвитку децентралізованих систем

Було проведено великий обсяг досліджень на імовірнісній моделі за напрямками: відтворення режимів, що спостерігаються в реальних розподілених системах; пошук умов оптимальності та стійкості; аналіз властивостей. Далі подано приклади моделювання. На рис. 3.15 подано дві реалізації випадкових процесів розвитку системи «30 елементів, 10 продуктів». В кожній реалізації подано процеси зміни темпів виробництва в часі по кожному з продуктів для аутсайдера і лідера за продуктивністю.

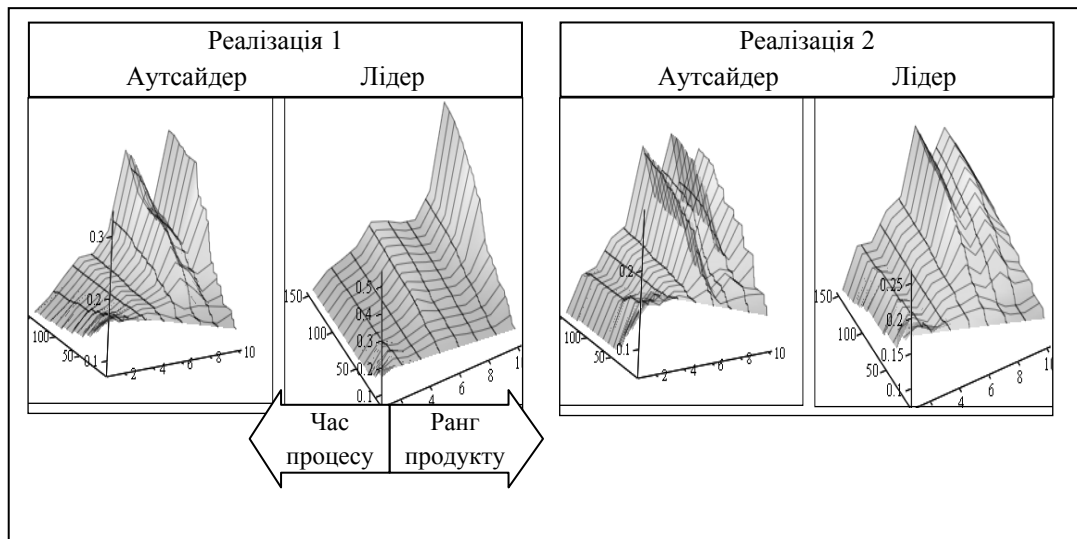


Рисунок 3.15 – Дві реалізації процесів розвитку для вибраних елементів

На рис. 3.16 подано ранговий розподіл усталених обсягів в системі з 30 елементів, а поряд – тривимірний графік розподілу усталених темпів виробництв в кожному елементі по кожному продукту.

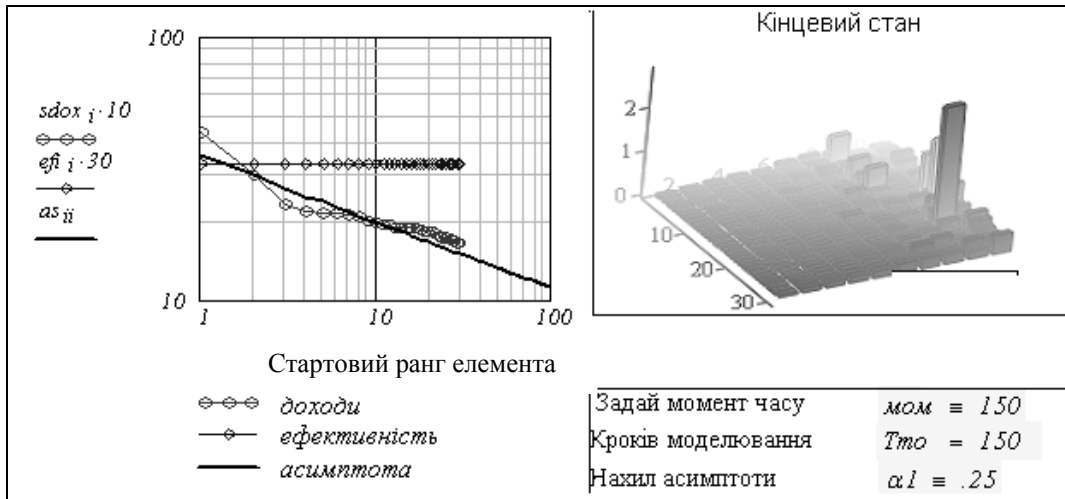


Рисунок 3.16 – Усталений розподіл виробництва. Приклад

Можемо бачити суттєву нерівномірність розподілу. В обчислювальному експерименті для всіх елементів задана однакова ефективність перетворення ресурсу в продукт, але невизначеності виробництва і даних, на основі яких приймаються рішення, приводить до суттєво нерівномірного – гіперболічного розподілу ресурсу. Цей результат відповідає статистичним даним в різних галузях (електроніка, програмні продукти, металургія, автопром та ін.).

Тобто розроблені моделі відтворюють властивості реальних систем – це підтвердження адекватності моделей. При аналізі модельних процесів розвитку детермінованих розподілених систем визначили, що навіть при невеликому домінуванні за продуктивністю в усталеному стані теж виникають гіперболічні розподіли, коли 10–20 % елементів забирають 80–90 % загального обсягу виробництва.

Розроблена модель *ММ*-системи дозволяє для кожного елемента задавати свої алгоритми управління розподілом ресурсів (локального управління). Використаємо цю можливість моделі для порівняння імовірнісних і детермінованих алгоритмів локального управління. На рис. 3.17 подано три процеси розвитку системи. На цих тривимірних графіках подано залежності темпів сумарного виробництва для 30-ти

елементів системи. Умови обчислювального експерименту: елементи ранжовані за ефективністю (параметром  $ef_i$  в (3.1)), п'ятнадцять кращих елементів розподіляють ресурс у розвиток за детермінованим алгоритмом (3.2)–(3.4), а п'ятнадцять гірших – за імовірнісним (3.5)–(3.9).

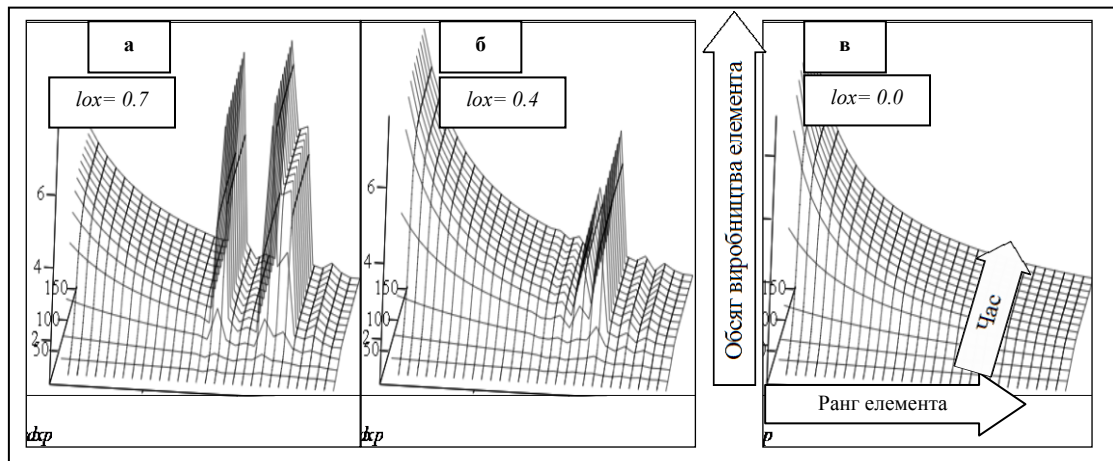


Рисунок 3.17 – Процеси розвитку системи з двома класами елементів

На рис 3.17а подано процеси розвитку для випадку, коли ризикова частка ресурсу елемента:  $lox = 0.7$ , на рис. 3.17б  $lox = 0.4$ , на рис. 3.17в  $lox = 0.0$ . Можемо бачити, що елементи з підмножини «аутсайдерів» за ефективністю можуть виходити в лідери за темпом сумарного виробництва. В середньому, використання імовірнісного алгоритму дає елементу перевагу в 20–40 % відносно елементів, що використовують детерміноване управління в умовах зростання виробництва.

На рис. 3.18 подано приклад статистичного аналізу усталених розподілів темпів виробництва в розподіленій системі з трьох елементів за наявності невизначеностей. На рис. 3.18а подано результати обчислювального експерименту для такої ситуації: кожен елемент має стартове домінування 12 % з виробництва одного з продуктів; ефективності елементів складають відповідно 1.30, 1.15, 1.00; обсяги попиту на окремі продукти дорівнюють 3, 5, 8. Алгоритми управління у всіх елементів однакові – імовірнісні. Усталені середні значення обсягів виробництва дорівнюють 6.7, 5.3, 4.0, а нормовані 1.67, 1.32, 1.00. Однак ці середні є малоінформативними, тому що частотні розподіли мають складну структуру.

На рис. 3.18А частотні розподіли мають складну структуру: розподіл у лідера має три приблизно однакові максимуми (моди); розподіл у другого за продуктивністю теж має три моди, одна з яких є домінуючою, тобто для середнього найбільш імовірним станом є друга мода; – розподіл у останнього за рангом має дві моди на границях діапазону, фактично останній за продуктивності або стає останнім у виробництві, або, з меншою але суттєвою імовірністю, стає лідером.

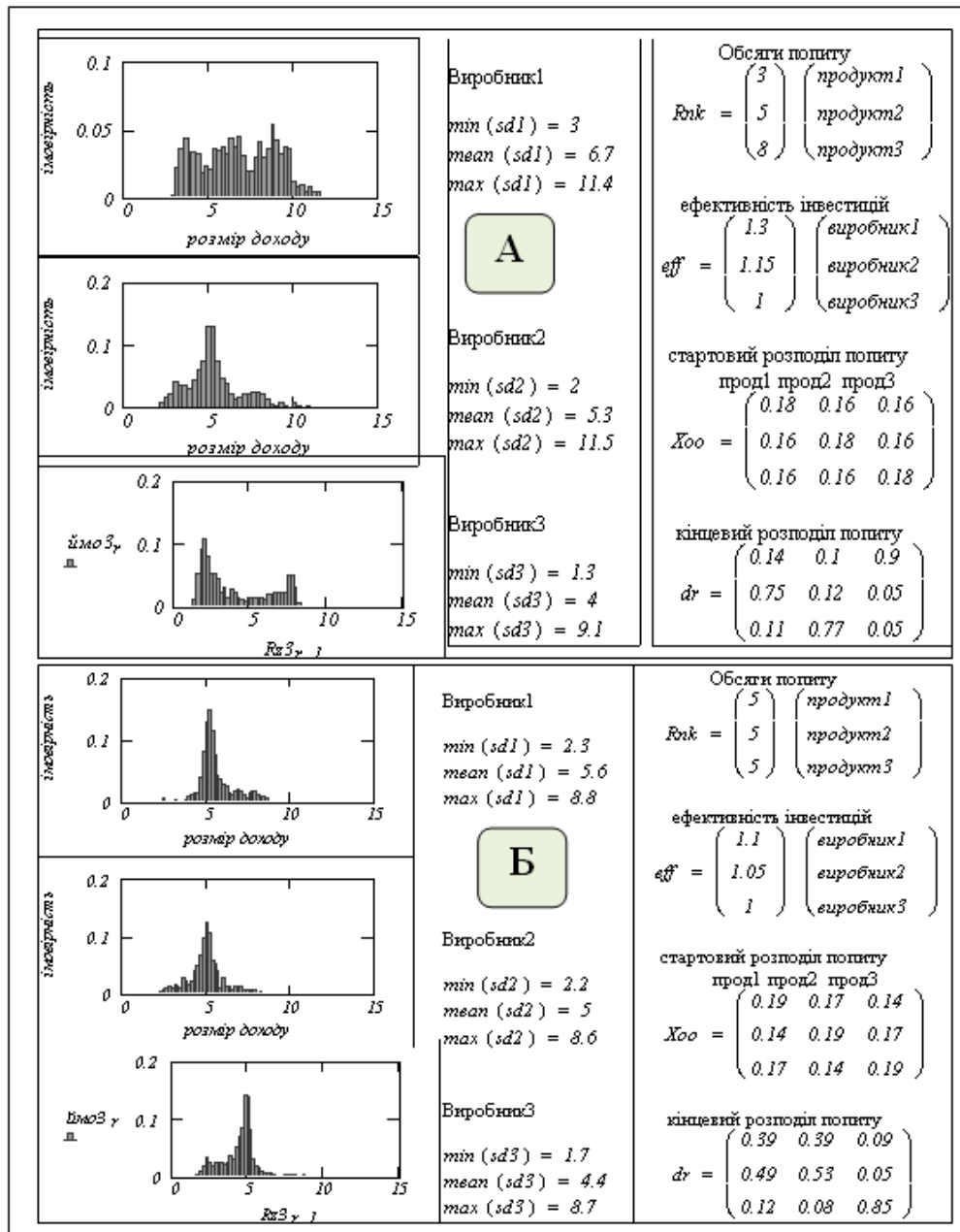


Рисунок 3.18 – Аналіз статистики розподілів обсягів виробництва в системі виробників малої розмірності



На рис. 3.18Б подано результати обчислювального експерименту для такої ситуації: кожен елемент має стартове домінування 12 % по виробництву одного з продуктів; ефективності елементів складають відповідно 1.10, 1.05, 1.00; обсяги попиту на окремі продукти дорівнюють 5, 5, 5. Алгоритми управління у всіх елементів однакові – імовірнісні. Усталені середні значення обсягів виробництва дорівнюють 5.6, 5.0, 4.4, а нормовані 1.27, 1.13, 1.00. Усі розподіли приблизно уні-модальні, моди (максимуми) є приблизно однаковими. Звернемо увагу на те, що розподіл «середнього» елемента симетричний, розподіли елемента-лідера і елемента-аутсайдера мають асиметричні «хвости», для лідера в бік більших, для аутсайдера в бік менших темпів сумарного виробництва. З практичної точки зору цікавим є те, що найбільш імовірні значення темпів виробництва є однаковими, хоч елементи мають різні ефективності. Конкретні причини – рівноцінність продуктів за попитом та наявність початкової спеціалізації. За цими розподілами ймовірностей стоять розподіли виробництва зі спеціалізацією (див. рис. 3.13).

Таким чином зв'язки елементів через ресурси, суттєві нелінійності і нестационарність розподіленої системи породжують складну структуру поведінки розподілених систем вже у випадку трьох елементів. В цілому одержана система моделей дозволяє отримувати нові знання про властивості розподілених систем. Моделюванням фактично підтверджено положення Форрестера «Використовуючи модель складної системи, можна дізнатися більше про внутрішні взаємодії, ніж при експериментуванні з реальною системою» [272, 273].

### **3.3 Побудова системи моделей для задачі термінального управління**

В систему моделей даної роботи включено фундаментальний клас моделей – управління кінцевим станом або термінального управління. В розділі 2 досліджено розв'язання двох варіаційних задач розвитку розподілених виробничих систем. Суть цих задач – знайти стратегію управління, що дає максимум інтегрального критерію першого роду за плановий період. Варіаційна задача термінального управління відріз-

няється від варіаційної задачі розвитку критерієм другого роду, тобто квадратичним. Змістовні інтерпретації критерію – інтегральна квадратична помилка заданого кінцевого стану, витрати енергії на управління. Модель термінального управління потрібна на нижніх технологічних рівнях виробництва – для систем реакторів, виробничих ліній, систем постачання, вертикально інтегрованих систем. Модель термінального управління вибрана також як методологічний зразок для побудови моделей оптимального розвитку при невизначеностях, а саме: періодичний перерахунок оптимальної стратегії на інтервал часу, що залишається до кінця планового періоду.

### 3.3.1 Розробка базової моделі системи з термінальним управлінням

Методи термінального управління мають велике практичне значення, тому обсяг публікацій з цієї тематики незначний через конфіденційність. З доступної літератури конкретні розв'язання задач термінального управління подані в [23]. На цій основі будуємо систему моделей для прецизійних відмовостійких розподілених систем з термінальним управлінням.

Розглянемо задачу управління рухом деякого керованого об'єкта по одній осі декартової системи координат. Потім, коли відпрацюємо таку одновимірну задачу для об'єкта другого порядку, розглянемо системи вищих порядків та іншої природи. Обмеження диференціальні:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{1}{m} \cdot \left( \sum_{i=1}^N F_i - \sum_{j=1}^K F_j \right); \quad \frac{d}{dt}S(t) = V(t), \quad (3.10)$$

де  $\sum_{i=1}^N F_i - \sum_{j=1}^K F_j$  – різниця сум контрольованих і неконтрольованих узгацьнених сил.

Ця задача відноситься до класу варіаційних задач, де шукається не одна точка, а функція. Запишемо задачу в стандартній формі. Об'єкт управління: координати  $S$  – положення,  $V$  – швидкість,  $ud$  – прискорення дійсне – в задачі воно є управлінням,  $ut$  – прискорення потрібне.

Обмеження алгебраїчні на управління і координати вводяться далі.

Граничні умови:  $S(0) = S_0$ ;  $V(0) = V_0$ ;  $S(T) = S_k$ ;  $V(T) = V_k$ , що означає: на момент часу  $T$  перейти з даного початкового в заданий кінцевий стан. Критерій

$$J = \int_0^T u^2 dt \quad (3.11)$$

характеризує витрати енергії на управління процесом переходу.

Ціль оптимізації  $\min_{u(t)}(J)$  – знайти управління, що дає мінімум критерію, витрати енергії на управління. Для цієї задачі структура оптимального управління відома – оптимальне управління шукаємо в класі поліномів

$$u = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \cdot t^i, \quad (3.12)$$

де  $m$  – число граничних умов.

Розв'язання задачі тепер зводиться до знаходження невідомих коефіцієнтів  $c_i$ . Число граничних умов може бути і більше, і менше порядку системи. Задачі термінального управління в залежності від числа кінцевих умов класифікуються [23] на задачі: розгону – забезпечення потрібної кінцевої швидкості; приведення – забезпечення потрібної кінцевої координати; зближення, де треба забезпечити потрібні кінцеві швидкість і координату.

### **3.3.2 Дослідження термінальної САУ при паралельній роботі приводів**

Розроблено комплекс моделей, програмних модулів та інтерфейсів, що дозволяє вести дослідження впливу раптових і поступових відмов виконавчих елементів [35, 45, 46, 61, 63, 68, 90, 91, 112, 118, 126]. Можливо оцінювати чутливість, виконувати пошукову оптимізацію параметрів системи управління. В епоху досить великих і частих техногенних катастроф на електростанціях, нафтопереробних заводах і металургійних заводах, можливість швидко створювати імітаційні моделі суттєво підвищує безпеку виробництва з небезпечними процесами.

На рис. 3.19 подано приклад процесу для найбільш важкого випадку: в момент найбільшого навантаження, на 40-му та 100-му кроках (позначено маркерами) відмовляють два виконавчі елементи з трьох.



### **3.4 Побудова системи моделей для об'єкта з паралельними інформаційними каналами**

Відпрацьовуємо методологію створення моделей для класу «моделі відмовостійких систем» – робимо систему з інформаційними каналами, що паралельно працюють, на базі ідентифікаторів стану. Увага приділена технологіям створення робочих моделей, придатних для проведення обчислювальних експериментів та методів синтезу, придатних для використання в мікроконтролерах.

Особливість задачі побудови моделі розподіленої системи цього класу – розробка і об'єднання інформаційних ресурсів окремих елементів – вимірювачів. В даному прикладі це інформація про вектор стану об'єкта. Цей інформаційний ресурс не підсумовується, а інтегрується за іншими правилами, на основі яких формується критерій оптимальності процесу.

#### **3.4.1 Синтез та дослідження імпульсної динамічної системи з ідентифікатором стану**

Починаємо з напрацювання «інструментів» – методів синтезу типових систем управління зі спостерігачем вектора стану і орієнтованих на реалізацію мікропроцесорними засобами. Відомі методи сучасної теорії імпульсного управління реалізуємо, обчислюючи ефективними програмними модулями, а потім на цій основі будуємо оптимальні в номінальних і неномінальних режимах розподілені системи. Подальший матеріал викладаємо на прикладі системи 3-го порядку. Неважко результати застосувати для систем довільної розмірності, крім того 70–80 % задач аналізу і синтезу виконуються для розумно спрощених методами теорії управління до другого-третього порядку «моделей синтезу». Стихійне розділення моделей об'єктів на моделі для синтезу і моделі для аналізу проаналізовано і формалізовано в [68, 174, 175, 225].

В даному прикладі розглядаємо «швидкий регулятор» (регулятор з кінцевим часом усталення). Вибрали саме такий клас регуляторів, тому, що таке управління є альтернативною формою термінального управління, розглянутого в підрозділі 3.3. При лінійному неперервному управлінні початкова помилка стає нульовою у нескінченості. Швидкий регулятор може забезпечити нульову помилку точно на  $N$ -му кроці для динамічної системи  $N$ -го порядку.

**Розробка модулів синтезу управління.** Задеклароване в цій роботі створення математичних моделей інтерпретується як створення робочої математичної моделі для нової задачі при кінцевих витратах часу і ресурсів. Перший крок в цьому напрямку – напрацювання системи базових модулів і технологій розробки робочих моделей, інтерфейсів і процесів тестування.

Розглядаємо  $N$ -вимірну систему з регулятором вектора стану. Об'єкт управління – неперервний. Записуємо канонічні рівняння системи з спостерігачем вектора стану і скалярним управлінням.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}x_o &= A \cdot x_o + B \cdot u; && \text{рівняння об'єкта} \\ y_o &= C \cdot x_o; && \text{рівняння вимірювачів} \\ \frac{d}{dt}x_n &= A \cdot x_n + B \cdot u + L \cdot (y_n - y_o); && \text{рівняння спостерігача} \\ y_n &= C \cdot x_n; && \text{рівняння моделі вимірювачів} \\ u &= K \cdot x_n. && \text{рівняння регулятора} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Підставляємо рівняння регулятора в рівняння об'єкта. Записуємо еквівалентне різницеве рівняння

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}x_o &= A \cdot x_o + B \cdot u; \quad u = k^T \cdot x_o; \\ \frac{d}{dt}x_o &= (A + B \cdot k^T) \cdot x_o; \quad A + B \cdot k^T = M; \\ x^{(k+1)} &= Fp \cdot x^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

де  $Fp$  – перехідна функція стану.

$$Fp = I + M \cdot \frac{dT}{1!} + M^2 \cdot \frac{dT^2}{2!} + M^3 \cdot \frac{dT^3}{3!} + \dots \quad (3.15)$$

Для задачі синтезу обмежимося першим наближенням перехідної функції стану

$$Fp = I + (A + B \cdot k^T) \cdot dT. \quad (3.16)$$

Підставляємо  $Fp$  в еквівалентне різницеве рівняння, виконуємо  $Z$ -перетворення

$$x^{(k+1)} = [I + (A + B \cdot k^T) \cdot dT] \cdot x^{(k)}; \Rightarrow z \cdot X(z) = [I + (A + B \cdot k^T) dT] \cdot X(z). \quad (3.17)$$

Виконуємо алгебраїчні перетворення і записуємо характеристичне рівняння

$$(I \cdot z - [I + (A + B \cdot k^T) \cdot dT]) \cdot X(z) = 0 \Rightarrow |I \cdot z - [I + (A + B \cdot k^T) \cdot dT]| = 0. \quad (3.18)$$

Аналогічно отримуємо  $Z$ -характеристичне рівняння для спостерігача. А саме – записуємо рівняння вільного руху спостерігача ( $u, x_0$  – зовнішні входи):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} xn &= A \cdot xn + B \cdot u + L \cdot C \cdot (xn - x_0) \Rightarrow \frac{d}{dt} xn = A \cdot xn + L \cdot C \cdot xn \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} xn &= (A + L \cdot C) \cdot xn. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Записуємо еквівалентне різницеве рівняння

$$xn^{(k+1)} = Fn \cdot xn^{(k)}, \quad Fn = I + M \cdot \frac{dT}{1!} + M^2 \cdot \frac{dT^2}{2!} + \dots, \quad M = (A + L \cdot C). \quad (3.20)$$

Для задачі синтезу обмежимося, як і при синтезі регулятора, першим наближенням  $Fn = I + (A + L \cdot C) \cdot dT$ .

Підставляємо  $Fn$  у різницеве рівняння, виконуємо  $Z$ -перетворення

$$xn^{(k+1)} = [I + (A + L \cdot C) \cdot dT] \cdot xn^{(k)} \Rightarrow z \cdot Xn(z) = [I + (A + L \cdot C) \cdot dT] \cdot Xn(z). \quad (3.21)$$

Виконуємо алгебраїчні перетворення і записуємо характеристичне рівняння спостерігача

$$(I \cdot z - (I + (A + L \cdot C) \cdot dT)) \cdot Xn(z) = 0 \Rightarrow |I \cdot z - [I + (A + L \cdot C) \cdot dT]| = 0. \quad (3.22)$$

Детермінанти записані в означеннях математичного пакета: «|A|» замість «det(A)». Якщо розкрити ці детермінанти, то отримаємо алгебраїчні рівняння  $n$ -го ступеня відносно комплексної змінної  $z$ . Вважаємо, що вибрано еталонний перехідний процес і крок квантування  $dT$ , тобто відомі коефіцієнти еталонного характеристичного рівняння. Прирівнюємо коефіцієнти характеристичного рівняння до їхніх потрібних значень – так отримуємо  $n$  рівнянь. У випадку скалярного управління маємо  $n$  невідомих параметрів регулятора (або спостерігача). В загальному випадку невідомих параметрів  $n \times m$ , де  $m$  – розмірність вектора управління. Додаткові рівняння отримуємо із розв'язання оптимізаційних задач і обмежень.

**Розробка програми синтезу імпульсного регулятора.** Необхідно розробити програму моделювання САУ, орієнтовану на розрахунки і дослідження впливу відхилень параметрів об'єкта від номінальних. Задаємо рівняння об'єкта і спостерігача у канонічній матрично-векторній формі:

$$\left. \begin{aligned} X_o^{(k+1)} &= F(T) \cdot X_o^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot v^{(k)}; \\ y_n &= C \cdot x_n; \quad y_o = C \cdot x_o; \quad \Delta y = y_n - y; \\ X_n^{(k+1)} &= F(T) \cdot X_n^{(k)} + G(T) \cdot B \cdot u^{(k)} + G(T) \cdot L \cdot C \cdot \Delta y^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Задано неперервний об'єкт

$$I := \text{identity}(3); \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Записуємо друге наближення для перехідних функцій  $F(\cdot)$  і  $G(\cdot)$

$$F_2(A, T) := I + \frac{A \cdot T}{1!} + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!}; \quad G_2(A, T) := T + \frac{A \cdot T^2}{2!}. \quad (3.25)$$

**Розробка модуля для вибору бажаного розподілення  $z$ -коренів.** Еталонний процес – це перехідний процес для динамічної системи, оптимальний відносно певного критерію – інтегральної квадратичної помилки, витрат енергії на управління, сумарних навантажень, трива-



лості перехідного процесу (ПП) та ін. В математичній теорії систем можна отримати нові результати за рахунок інтеграції аналітичних методів і вбудованих в математичні пакети числових методів. Було виконано узагальнення методу стандартних коефіцієнтів: задачі синтезу повністю алгебраїзовано і автоматизовано на базі нових підходів без явного визначення коефіцієнтів і коренів характеристичних рівнянь, зведено до функції від параметрів об'єкта управління [35].

### 3.4.2 Розробка програмних модулів для синтезу та моделювання стійкої до відмов вимірювачів системи

Проведемо порівняльний аналіз двох альтернатив побудови системи управління. На рис. 3.20 подано схему САУ з регулятором вектора стану та резервованими вимірювачами компонентів вектора стану  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Система повністю виходить з ладу при одночасній відмові трьох вимірювачів якогось з компонентів вектора стану. При виході тільки трьох з дев'яти вимірювачів система стає непрацездатною.

На рис. 3.21 подано альтернативу – САУ з регулятором вектора стану і системою ідентифікаторів стану. Кожен з ідентифікаторів розрахований для певної ситуації вимірювання. Кожен спостерігач видає оцінку всього вектора стану, за умови спостережуваності системи. Така система буде працездатною, якщо деякі компоненти вектора стану взагалі не вимірюються [169, 189, 276].

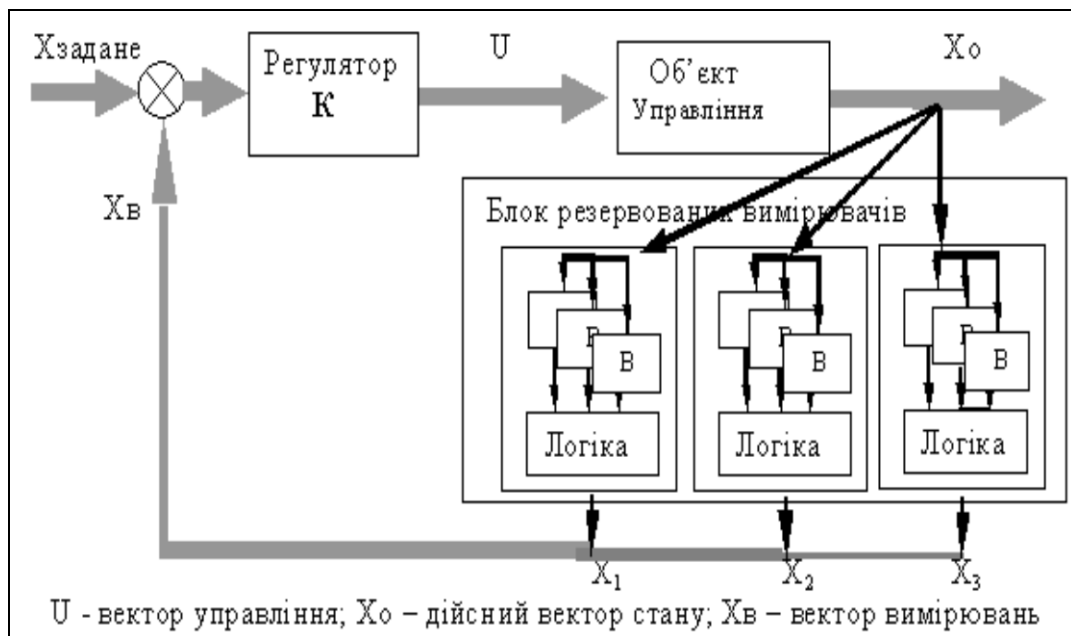


Рисунок 3.20 – Альтернатива 1 відмовостійкої системи. Резервування

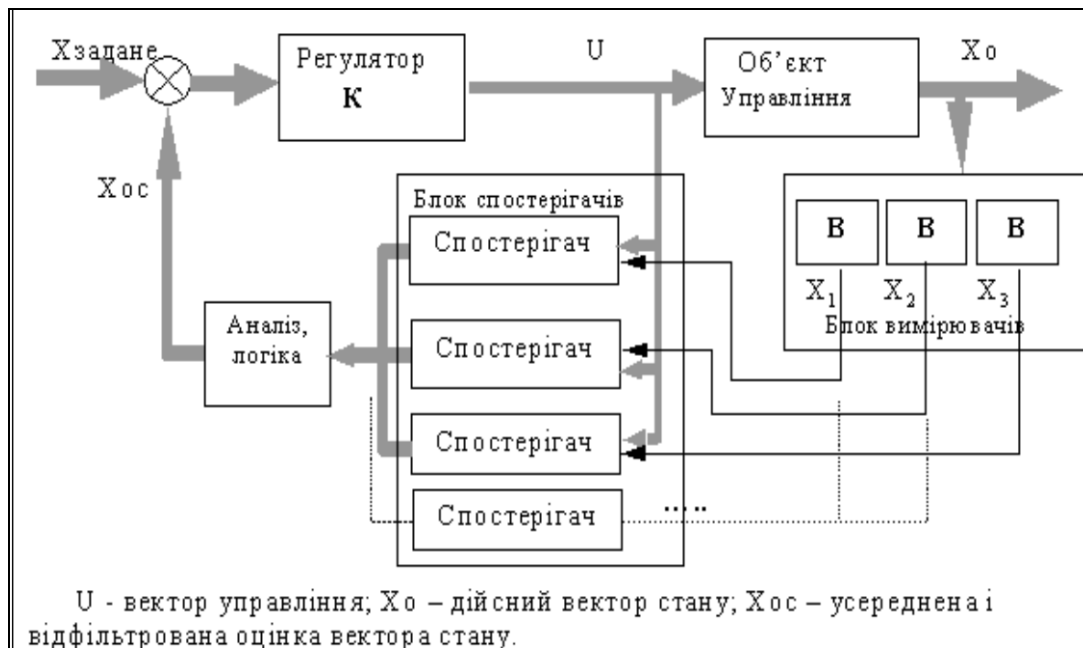


Рисунок 3.21 – Альтернатива 2 відмовостійкої системи. Система ідентифікаторів

Призначення блоків «Логіка», «Аналіз, логіка» в схемах (див. рис. 3.20, 3.21) – ідентифікація та ізоляція елемента, що працює некоректно. Аналогів подібної схеми побудови керованої системи не знайдено. Розробка структури моделей та результати досліджень є пунктом наукової новизни [35–38, 46, 61, 63, 90, 91].

Суть результату – організація інформаційної системи на базі неідентичного резервування не приладів, а системи обробки первинних даних – ідентифікаторів.

Конкретизуємо опис системи, поданої на рис. 3.21. На кожен з трьох спостерігачів подається тільки один сигнал  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  (можливі інші конфігурації кількості і поєднання вимірювачів та ідентифікаторів). Маємо три матриці вимірювань. Кожен із ідентифікаторів видає оцінку всього вектора стану, тобто значення  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . При вибраній структурі матриці об'єкта система у всіх випадках є спостережуваною. Всі ці варіанти дають коректні оцінки вектора стану.

При відмові одного з вимірювачів його вихід буде значно відрізнятися від інших. Блок «Логіка, аналіз» повинен ідентифікувати некоректний канал та ігнорувати його вихід. Деяко складніша ситуація при відмові двох вимірювачів, коли працездатний канал – один.

Конкретизуємо і формалізуємо відмови вимірювачів.

Часткова відмова – помилка вимірювання з номінальних 0–2 % збільшується до 10–30 %. Відмова може проявлятися як: адитивний шум, нечутливість, обмеження вихідного сигналу, збільшення квантування рівня і часу.

Повна відмова – вихідний сигнал стає нульовим. Цей випадок відповідає стандарту відмовобезпечності – якщо технічна підсистема виходить з ладу, то вона не повинна стати джерелом відмов інших, а тільки «обнулитись», відключитись.

Розроблено такі модулі:

- модуль синтезу швидкого регулятора;
- модуль синтезу швидкого спостерігача, де розглянуто три випадки: вимірюється тільки  $X1$ ; вимірюється тільки  $X2$ ; вимірюється тільки  $X3$ .

На цих модулях можна побудувати узагальнену програму синтезу як функцію користувача:

*Параметри\_спостерігача( параметри об'єкта, конфігурація вимірювання).*

З модулів «синтез», «регулятор», «спостерігач» зібрано модуль «модель САУ зі спостерігачем».

На рис. 3.22 подано шість процесів – з двома значеннями кроку квантування та трьома варіантами спостерігачів – на базі вимірювання  $X1$ ,  $X2$ ,  $X3$  відповідно.

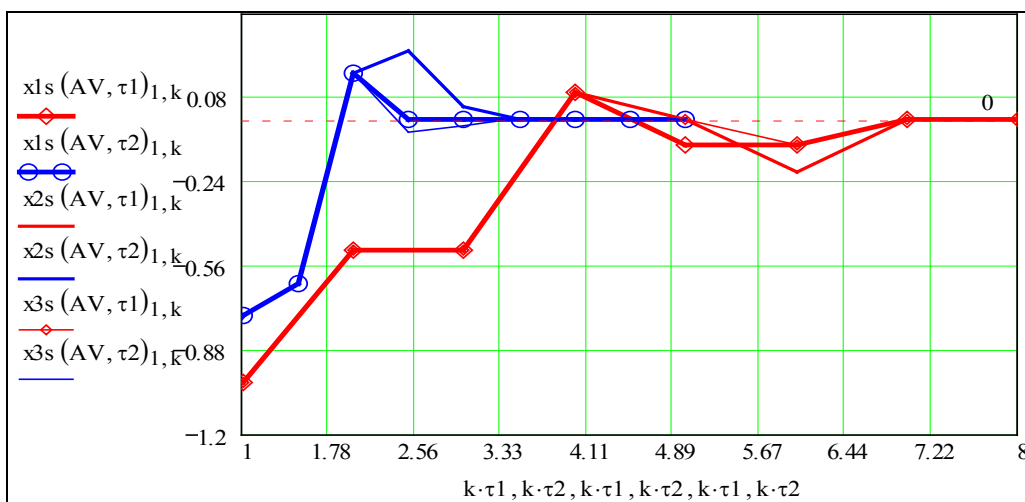


Рисунок 3.22 – Перехідні процеси в САУ. Координати

Останній крок розробки – модуль «моделювання відмовостійкої САУ». Модуль дозволяє вичерпно моделювати поведінку системи в різних конфігураціях відмов вимірювачів. Задаємось таким сценарієм моделювання: система відпрацьовує заданий зовнішній вхід (гармонічний сигнал, послідовність імпульсів або шум); на деякому кроці квантування відмовляє один із вимірювачів, потім – ще один. Для реалізації відмовостійкої системи і моделювання її згідно зі сценарієм необхідно розробити ряд модулів.

**Альтернативні варіанти функції відмов вимірювачів.** Функція  $Ot1(.)$  – обнулює відповідний компонент виходу, за умови  $k > kot_i$  – моменту відмови;  $Ot2(.)$  – починаючи з кроку  $kot_i$  – додає до вхідного сигналу шум.

$$Ot1(X, kot, k) := \begin{bmatrix} X_1 \cdot (1 - \hat{O}(k - kot_1)) \\ X_2 \cdot (1 - \hat{O}(k - kot_2)) \\ X_3 \cdot (1 - \hat{O}(k - kot_3)) \end{bmatrix}; Ot2(X, kot, k) := \begin{bmatrix} X_1 \cdot (1 + 3 \cdot \hat{O}(k - kot_1) \cdot rnd(1)) \\ X_2 \cdot (1 + 3 \cdot \hat{O}(k - kot_2) \cdot rnd(1)) \\ X_3 \cdot (1 + 3 \cdot \hat{O}(k - kot_2) \cdot rnd(1)) \end{bmatrix}.$$

Задаємо початкові стани об'єкта і спостерігача, матриці вимірювань

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x_n := x_0 - \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0 \\ -0.0 \end{pmatrix}; C1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо функції  $L01(A_v, T)$ ,  $L02(A_v, T)$ ,  $L03(A_v, T)$ , що подають структуру відмов для випадків вимірювання тільки координати, швидкості, прискорення. Функція логіки формування вихідної оцінки вектора стану об'єкта – центр проектування в даній роботі. Вимоги до цієї функції: детермінована «ізоляція» сигналів від елемента, що відмовив; простота, відсутність механічних та інших переключень. Система моделювання відмовостійкої САУ – кінцевий результат.

Нарешті збираємо програму моделювання відмовостійкої САУ. На рис. 3.23 подано фрагмент тексту програми, що також є і математичною моделлю, записаною в стандартах математики.

Головні елементи програми – модулі імітації відмов та інтеграції даних від паралельних інформаційних каналів. На рис. 3.24 подано приклад моделювання для таких вхідних даних. Модуль введення даних.

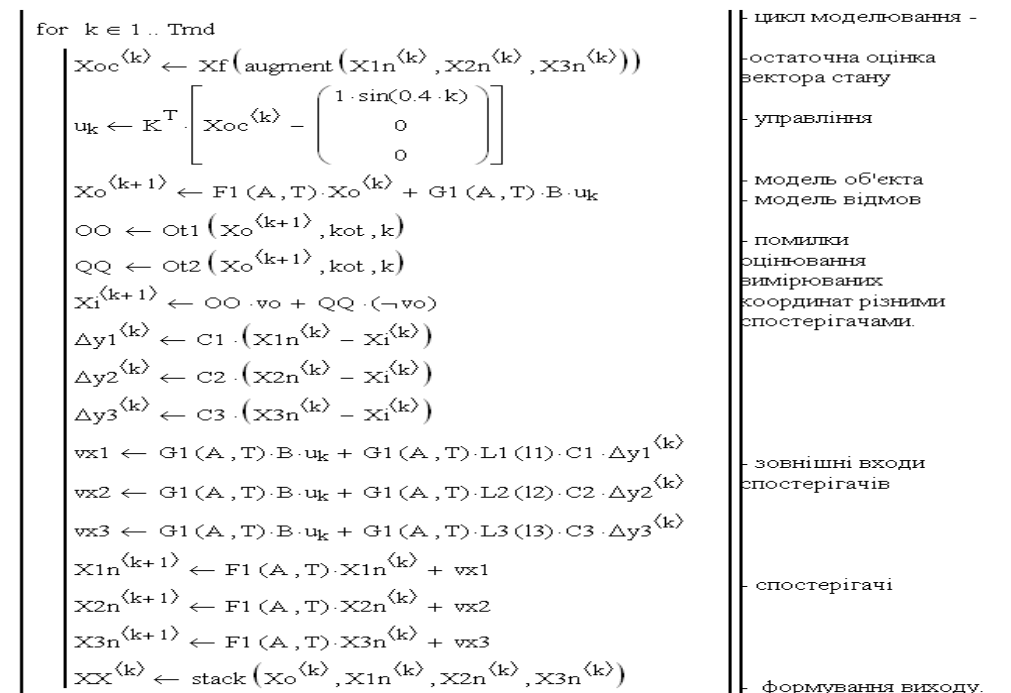


Рисунок 3.23 – Програма моделювання системи, стійкої до відмов вимірювачів

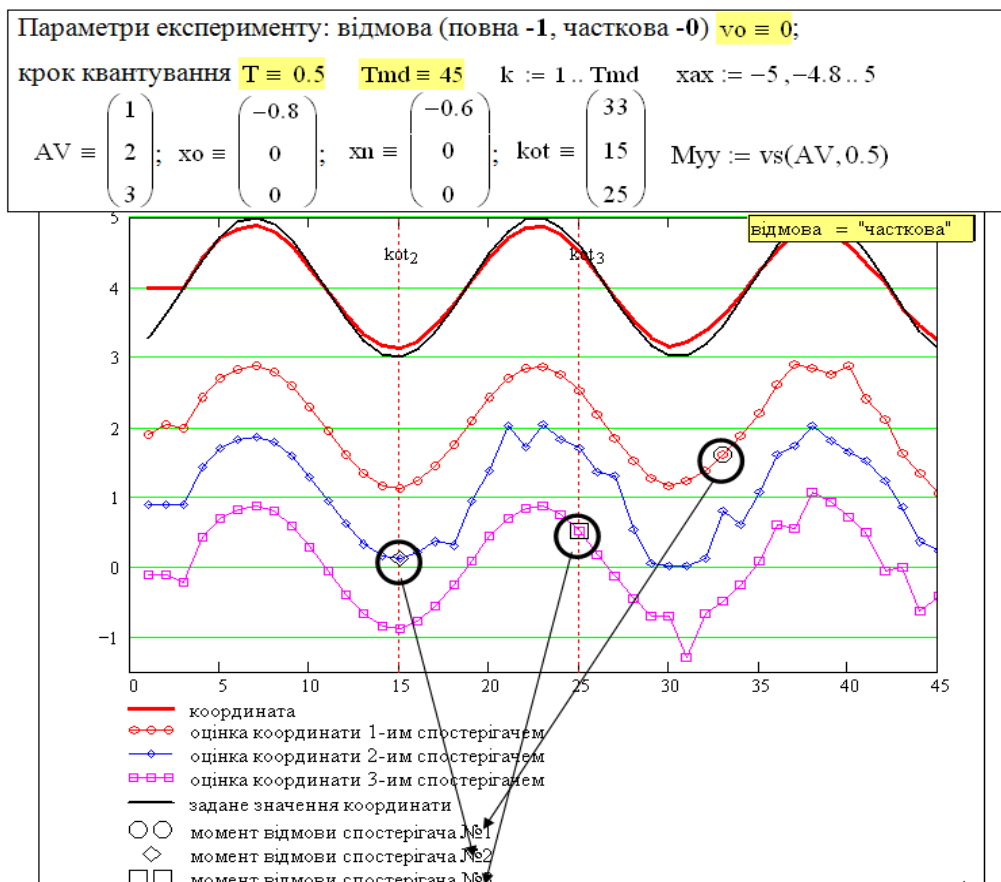


Рисунок 3.24 – Результати моделювання відмовостійкої САУ. Приклад

### **3.5 Побудова системи моделей для задачі оптимального управління розподіленою технологічною системою**

В цьому підрозділі розглядаємо задачу розподілу обмеженого ресурсу, що є спряженою задачею до задачі максимізації сумарного виробництва при обмеженні ресурсу. Це задача мінімізації виробничих витрат при обмеженні сумарного виробництва. Для розв'язання задачі використано новий варіант методу відкритого управління з декомпозицією управління в часі, коли на одному такті управління працює регулятор підтримки заданого навантаження, на наступному такті – екстремальний регулятор мінімізації витрат. Елементом новизни запропонованого методу є розбиття задачі управління між двома регуляторами в часі, що дозволяє використати регулятор навантаження як генератор тестових дій для екстремального регулятора. Тобто, можна назвати таке поєднання регуляторів «синергетичним». У кожного регулятора своя задача, але спільні виконавчі елементи. Головна увага приділена технологіям створення робочих моделей, придатних для проведення обчислювальних експериментів та методів синтезу, придатних для реалізації в системах реального часу.

#### **3.5.1 Система оптимального управління синтезом стиролу**

Розглядається хімічний реактор для синтезу стиролу. Стирол – сировина для великотоннажної пластмаси – полістиролу. Виробництво стиролу звичайно є масовим. Реактори для синтезу стиролу працюють разом, паралельно. Причини цього – велика потреба в продукті, старіння реакторів, періодична зупинка їх для заміни каталізатора при умові підтримки заданого рівня випуску продукції.

Паралельна робота реакторів, великі вимоги до надійності функціонування виробництва в цілому обумовлюють і методи управління – групового, одразу всіма реакторами. Перша ціль управління – підтримка потрібного рівня сумарного виробництва незалежно від стану окремих реакторів. Специфіка масового виробництва продуктів у реакторах в тому, що навіть малі частки відсотка зміни експлуатаційних витрат приводять до великих сумарних економічних ефектів. З цієї причини режими роботи реакторів – тиск, температуру, концентрації – ретельно оптимізують. Характеристики реакторів з часом погіршуються – проходить процес «отруєння каталізатора». Звичайно в бата-

реї реакторів паралельно працюють реактори з різною ефективністю (одиниць продукції на одиницю експлуатаційних витрат). Зрозуміло, що треба кращі реактори завантажувати більше. Друга ціль управління – таке розподілення навантаження по реакторах, що дає мінімум експлуатаційних витрат при заданому рівні випуску продукції. Розглянемо стисло технологічний процес синтезу стиролу (рис. 3.25).

В реакторі нагрівається етилбензол в присутності каталізатора, утворюється суміш стиролу, етилбензолу, бензолу, толуолу, що переганяється, і виділений етилбензол знову йде у реактор. Реактор підігрівається парою. Особливості системи – нелінійні і нестационарні характеристики реактора, а також паралельна робота декількох реакторів на потрібний сумарний вихід стиролу.

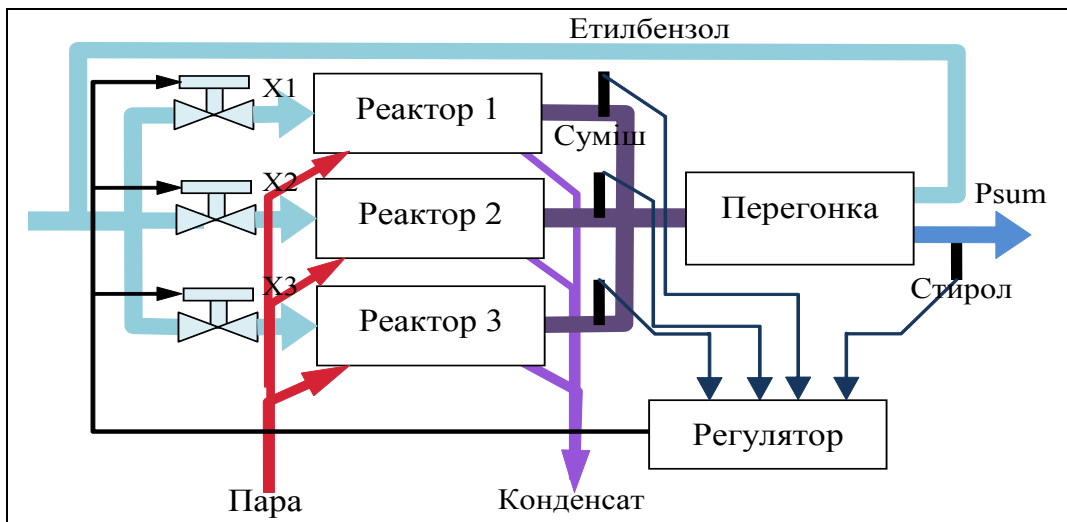


Рисунок 3.25 – Схема системи виробництва стиролу

Необхідно розробити систему оптимального управління розподілом етилбензолу по окремих реакторах з урахуванням обмеження на сумарну продуктивність. Критерій – сумарні виробничі витрати на заданий випуск продукту.

Зауваження. Технологічні об'єкти запровадження результатів даної роботи – металургійні агрегати виробництва феромарганцю, біореактори для переробки відходів птахофабрик, свинокомплексів, сільськогосподарських рослинних відходів. Дані для моделювання цих систем конфіденційні або неповні. Систему реакторів синтезу стиролу вибрано тому, що по цій тематиці достатньо публікацій з моделювання і оптимізації [222–224].

### 3.5.2 Розробка системи оптимального управління синтезом стиролу

Подане в аналогу [222] розв'язання задачі оптимізації розподілу навантаження між реакторами було відтворене в середовищі математичного пакету і досліджене. Подаємо його як предметний аналог для порівняння з розробленим методом. Математична модель реактора для аспекту «залежність виробничих витрат від виходу стиролу» – апроксимація реальної характеристики поліномом. Запишемо також похідну від цієї залежності [35].

$$\left. \begin{aligned} C(a_1, a_2, a_3, P) &:= 20 + a_1 \cdot P + 5 \cdot a_2 \cdot P^2 + a_3 \cdot P^5, \\ dC(a_1, a_2, a_3, P) &:= a_1 + a_2 \cdot P + 0.01 \cdot a_3 \cdot P^4. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Математична модель реактора для аспекту «залежність виходу стиролу від рівня подачі етилбензолу». Ця характеристика є оптимізованою за іншими вхідними змінними – витратою пари, температурою, тиском та іншими. Використовуємо як перше наближення модель з одним параметром  $b_1$ .

$$Pi(b_1, x) := b_1 \cdot x^{0,5}. \quad (3.27)$$

Задаємо ранжовані змінні  $P$  та  $X$  і будуємо графіки характеристик (рис. 3.26):

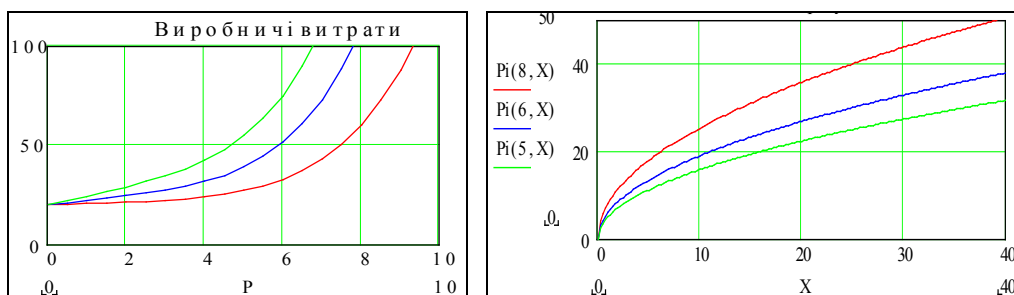


Рисунок 3.26 – Залежності виробничих витрат від виходу стиролу та виходу стиролу  $P$  від подачі етилбензолу  $X$

**Формулювання оптимізаційної задачі.** Задана цільова функція – сумарні виробничі витрати. Ціль оптимізації – мінімум цієї функції.

$$C_{sum} = F(P_1, P_2, P_3) = C_1(P_1) + C_2(P_2) + C_3(P_3). \quad (3.28)$$

Знайти  $\min \{F(P_1, P_2, P_3)\}$ .

Задано обмеження на сумарний вихід стиролу, тобто:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_{sum}, P_{sum} = P_{tr}, G(P_1, P_2, P_3) := (P_{tr} - P_1 - P_2 - P_3) = 0 \quad (3.29)$$



Для порівняння подаємо спочатку типове розв'язання цієї задачі методом невизначених множників Лагранжа. Управління процесом можна побудувати на безпосередньому обчисленні оптимальних значень виходу стиролу для кожного реактора. Потім ці значення встановлюються за допомогою відповідних локальних систем регулювання. Записуємо функцію Лагранжа

$$L(P1, P2, P3, \lambda) = F(P1, P2, P3) + G(P1, P2, P3) \cdot \lambda. \quad (3.30)$$

Записуємо необхідні умови екстремуму цієї функції:

$$\frac{d}{dP1} L(P1, P2, P3, \lambda) = 0; \frac{d}{dP2} L(P1, P2, P3, \lambda) = 0; \frac{d}{dP3} L(P1, P2, P3, \lambda) = 0. \quad (3.31)$$

Додаючи сюди рівняння обмеження, отримаємо чотири рівняння для чотирьох невідомих змінних –  $P1, P2, P3, \lambda$ . Підставимо конкретні значення функцій (3.29) і (3.30) в (3.31).

$$F(P1, P2, P3, \lambda) := a11 + a21 \cdot P1 + a31 \cdot P1^4 + a12 + a32 \cdot P2^4 + a13 + a23 \cdot P3 + a33 \cdot P3^4;$$

$$G(P1, P2, P3, \lambda) := Ptr - P1 - P2 - P3; L(P1, P2, P3, \lambda) = F(P1, P2, P3) + G(P1, P2, P3) \cdot \lambda.$$

Для знаходження аналітичних виразів похідних використаємо апарат символьних обчислень

$$\frac{\partial}{\partial P1} L(P1, P2, P3, \lambda) \rightarrow \frac{\partial}{\partial P3} L(P1, P2, P3, \lambda) \rightarrow \frac{\partial}{\partial P2} L(P1, P2, P3, \lambda) \rightarrow a22 + 4 \cdot a32 \cdot P2^3 - \lambda.$$

Вводимо значення параметрів функцій виробничих витрат для усіх реакторів:

$$a11 := .5; a21 := 0.25; a31 := 0.001; a12 := 1; a22 := 0.3; a32 := 0.001; a13 := 2; a23 := 0.3; a33 := 0.033.$$

Вводимо значення обмеження та початкові значення шуканих змінних:

$$Ptr := 80; P1 := 10; P2 := 10; P3 := 10; \lambda := 10.$$

Записуємо і розв'язуємо числовим методом систему рівнянь:

*Given*

$$\left. \begin{array}{l} a21 + 4 \cdot a31 \cdot P1^3 - \lambda = 0 \\ a23 + 4 \cdot a33 \cdot P1^3 - \lambda = 0 \\ a22 + 4 \cdot a32 \cdot P2^3 - \lambda = 0 \\ Ptr - P1 - P2 - P3 = 0 \end{array} \right\}; \left( \begin{array}{l} X1_{\text{опт}} \\ X2_{\text{опт}} \\ X3_{\text{опт}} \\ \text{лямОпт} \end{array} \right) := \text{Find}(P1, P2, P3, \lambda); \left( \begin{array}{l} X1_{\text{опт}} \\ X2_{\text{опт}} \\ X3_{\text{опт}} \\ \text{лямОпт} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} 33.023 \\ 27.667 \\ 19.31 \\ 144.304 \end{array} \right).$$

Контроль виконання обмежень:  $X1_{opt} + X2_{opt} + X3_{opt} = 80$ ,  $Ptr = 80$  – збіглося. Можна узагальнити цю задачу на випадок  $N$  реакторів, зробити розв’язання функцією значення обмеження:  $X_{opt}(Ptr)$ . Однак розв’язання можливе тільки для випуклих функцій з неперервними похідними.

### 3.5.3 Розробка альтернативної системи управління реакторами

На рис. 3.27 подано структурну схему системи [35]. Виходимо із визначених вище функцій системи управління техпроцесом: підтримка заданого рівня виходу стиролу; оптимізація розподілення навантаження між реакторами. Для виконання першої задачі беремо пропорційно-інтегральний регулятор. Виконання другої задачі ускладнено проблемами оперативного вимірювання характеристики  $C(P1, P2, P3)$  – сумарних виробничих витрат.

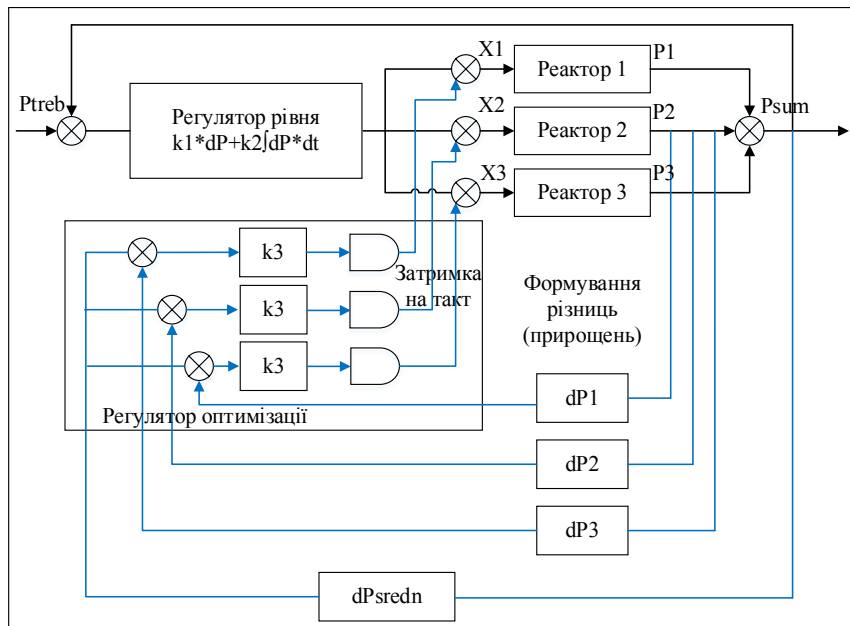


Рисунок 3.27 – Схема системи оптимального управління хімічними реакторами з двома регуляторами, що працюють послідовно

Замість цього використаємо індикатор – величину, що пов’язана з потрібною величиною монотонною залежністю. Такою величиною є похідна  $dP_i / dX_i$  – вихід стиролу на одиницю подачі етилбензолу.

Словесна модель регулятора оптимізації розподілення така: регулятор рівня подає однакові управління в усі реактори; вимірюються «відклики»  $dPi$  кожного з реакторів на це управління; формуються відхилення від середнього, із затримкою на такт; на реактори подаються «вирівнювальні» управління. В результаті збільшується навантаження реакторів, у яких  $dPi$  вище середнього, зменшується для тих, де  $dPi$  – нижче середнього.

**Розробка базової програми моделювання.** На підставі вибраних альтернатив побудови системи, згідно зі структурною схемою (див. рис. 3.27) записуємо текст програми (рис. 3.28). В програмі використовуємо векторизацію. Нижче подано для порівняння дві альтернативи подання присвоєння:

$$\begin{pmatrix} X_{1,q+1} \\ X_{2,q+1} \\ X_{3,q+1} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{if}(Xx_{1,q+1} < 0, 0, Xx_{1,q+1}) \\ \text{if}(Xx_{2,q+1} < 0, 0, Xx_{2,q+1}) \\ \text{if}(Xx_{3,q+1} < 0, 0, Xx_{3,q+1}) \end{pmatrix}; \quad X^{(q+1)} \leftarrow 0 \text{ if } \overrightarrow{X^{(q+1)}} < 0.$$

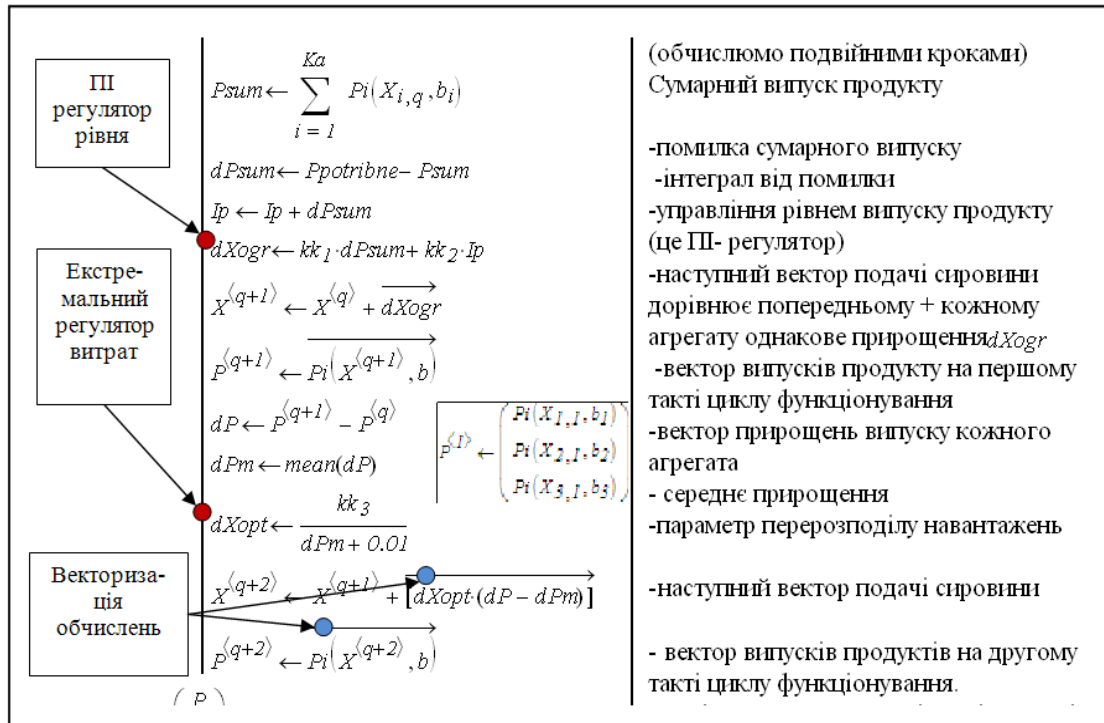


Рисунок 3.28 – Робоча модель адаптивної САУ з регуляторами, що працюють послідовно

Векторизація обчислень не тільки скорочує і спрощує запис програм обробки багатовимірних даних. Головний вигравш векторизації – у швидкості обчислень. Сучасні процесори виконують векторизовані вирази паралельно. Програма повертає масив векторів стану системи – розподілів навантажень окремих реакторів.

### 3.5.4 Дослідження системи управління реакторами

Виконуємо перевірку системи на стійкість та чутливість. Система в цілому нелінійна, тому аналітично можна знайти тільки певні оцінки стійкості та якості регулювання. Модель реактора – нелінійна, і реакція системи буде залежати від амплітуди вхідного сигналу. Точні оцінки чутливості і стійкості можна отримати тільки моделюванням. Для дослідження системи та вибору параметрів регулятора  $k_1, k_2, k_3$  створюємо стенд. Центр стенда – графіки перехідних процесів. Біля цих графіків розташовуємо блоки вхідних і вихідних даних. Далі подано приклад стенду. Вхідні параметри – продуктивність реакторів, параметри закону управління, задана видача:

$$N \equiv 25; \quad q := 1..N \cdot 2; \quad b \equiv \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \sqrt{kk} \equiv \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.05 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \text{Pr otribl} = 80;$$

$$\text{Sum}_q := \text{mean}(PP(kk)^{\langle q \rangle})$$

Наводимо приклад дослідження системи та вибору параметрів регулятора  $k_1, k_2, k_3$  (рис. 3.29).

Вхідні параметри: кількість кроків моделювання  $N = 70$ . Виводимо параметри закону управління, стартовий і кінцевий розподіли

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.05 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad kk = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.05 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \text{Pr}^{\langle 4 \rangle} = \begin{pmatrix} 4.29 \\ 26.5 \\ 35.54 \end{pmatrix}; \quad \text{Pr}^{\langle 2..N \rangle} = \begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Темп сумарного виробництва: стартовий  $Ka \cdot \text{mean}(\text{Pr}^{\langle t \rangle}) = 53$ ; заданий  $\text{Pr otribn} \equiv 72$ ; усталений  $Ka \cdot \text{mean}(\text{Pr}^{\langle 2..N \rangle}) = 72$  – система працездатна.

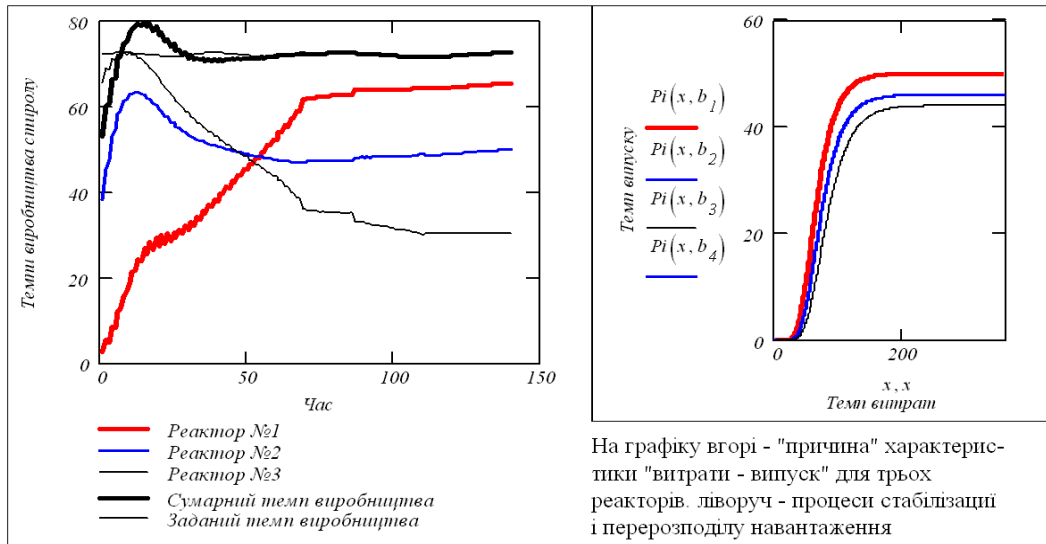


Рисунок 3.29 – Перехідні процеси в системі реакторів

Дослідимо вплив початкових умов на стійкість і усталені значення виходу. На рис. 3.30 подано три перехідних процеси для сумарного навантаження, навантажень окремих реакторів і динаміка критерію сумарні витрати, який мінімізується непрямо – регулятором корекції навантажень окремих реакторів. Звернемо увагу на те, що процеси для окремих реакторів мають скачки, а графік сумарного навантаження – гладкий. Можемо бачити специфічні коливання на початку процесу. Вони обумовлені дискретизацією управління і пошуковим характером роботи регуляторів. Ці ефекти в реальній системі згладжуються за рахунок інерційності реакторів. Моделювання для моделі реакторів з урахуванням інерційності і запізнень дало подібні результати.

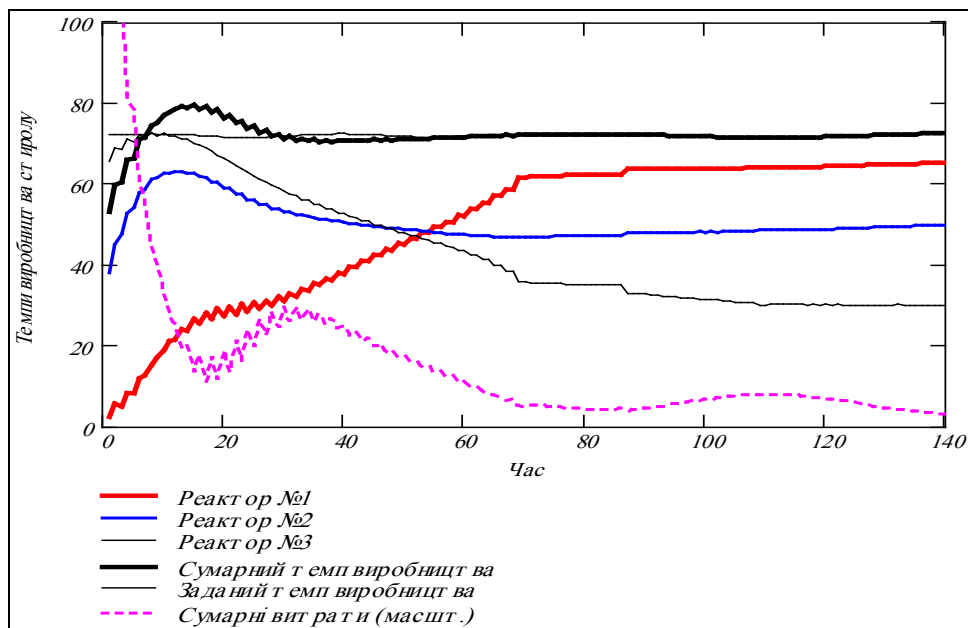


Рисунок 3.30 – Перехідні процеси в реакторах і динаміка сумарних витрат

Запропонована базова модель адаптивної системи оптимального розподілу навантаження між елементами дозволяє легко отримувати моделі і програми моделювання з урахуванням додаткових факторів. Зокрема, розроблена модель з урахуванням інерційності і нестационарності елементів (реакторів в даному прикладі). Результати розробки і досліджень наведені в [33, 35, 43, 76].

**Узагальнення розробок і досліджень управління** розподіленими технологічними системами. Виконані повні цикли розробки моделей адаптивних і відмовостійких систем з елементами, що працюють паралельно, – від побудови лінгвістичних моделей до аналізу результатів досліджень. Ці розробки мали такі цілі:

- розв’язання актуальних задач управління технологічними системами;
- розробка конкретних прикладів систем, задовільних і в номінальних, і в неномінальних умовах функціонування;
- отримання «експериментальних даних» відносно технологій розробки і витрат часу на створення моделей для використання в побудові метамоделі процесу розробки моделей розподілених систем.

В цьому розділі досліджені такі моделі систем:

- система термінального управління, оптимальна за критерієм витрат на управління і стійка до відмов виконавчих елементів;
- система управління із спостерігачами, стійка до відмов вимірювачів;
- адаптивна екстремальна система оптимального розподілу навантаження між технологічними агрегатами, з регуляторами стабілізації сумарного навантаження і оптимального розподілу навантаження, що працюють послідовно.

Схеми названих систем а також розробки екстремальної системи з реакторами, що працюють паралельно, [30] подані разом на рис. 3.31. В кожній з цих розробок були отримані нові наукові результати в області побудови систем регуляторів та методів синтезу параметрів регуляторів.

В роботі розглядається тільки один з цих результатів дослідження відмовостійких систем управління технологічними об’єктами – розробка адаптивних регуляторів систем з технологічними елементами, що працюють паралельно.

Сенс цього результату – декомпозиція алгоритму управління в послідовність зв'язаних спеціалізованих простих управлінь. Особливість декомпозиції екстремального регулювання в тому, що регулятор навантаження генерує дані для ідентифікації, потрібні для регулятора оптимізації. Адаптивні системи з тестовими діями відомі давно, але в даному випадку тестова дія одночасно є управлінням.

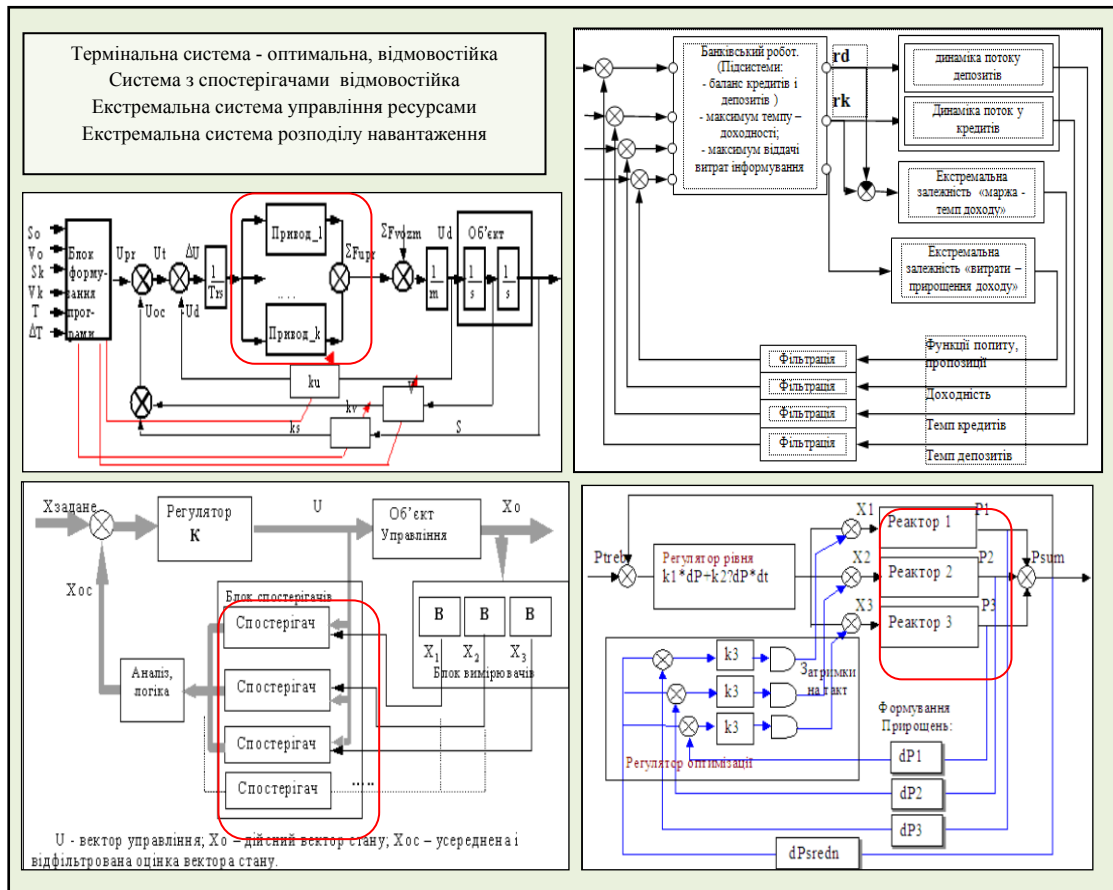


Рисунок 3.31 – Розробка адаптивних, відмовостійких розподілених систем

Результати дослідження системи з реакторами, що працюють паралельно, складають зміст нового наукового результату. Формулювання. Отримав подальший розвиток метод реалізації оптимального розподілу ресурсу в умовах високої невизначеності через побудову екстремальної системи з регуляторами, що працюють послідовно, за схемою «управління–тест, ідентифікація, управління–настроювання». Від існуючих адаптивних систем запропонована методика відрізняється працездатністю при довільних нелінійностях. Відмінність від аналогів – для систем, де потрібно підтримувати задане навантаження

і оптимізувати сумарну ефективність, відомі тільки системи управління з регуляторами, що працюють паралельно. Актуальність – задачі оптимального управління розподіленими системами зустрічаються на всіх рівнях виробництва – від локальних технологічних процесів до координації системи виробників галузі. Суть результату – комплекс робочих моделей для аналізу і синтезу систем з довільним числом елементів, що працюють паралельно, і довільними виробничими функціями.

### 3.6 Узагальнення: трирівнева декомпозиція

Проведені в розділах 2, 3 розробка і дослідження дозволяють виконати узагальнення декларованої в розділі 1 тривимірної декомпозиції. В процесі розробки моделей виконувались як операції розбиття моделі складної системи на функціональні, структурні та редуційні субмоделі, так і збирання монолітних моделей з системи певних субмоделей. Формалізуємо ці операції.

#### 3.6.1 Формалізація і обґрунтування трирівневої декомпозиції

Проаналізуємо операції декомпозиції і композиції на двох рівнях узагальнення і формалізації – теоретико-множинному і на рівні алгебраїзації [32, 33, 46, 49, 62, 65, 68, 69, 145].

**Функціональна декомпозиція.** На теоретико-множинному рівні функціональна декомпозиція розбиття заданої множини станів відношення системи, при якому окремі відношення задають зв'язки між підмножинами змінних стану.

Розглядаємо математичну модель відкритої системи  $S$  з множиною узагальнених станів  $X$  (яку потім деталізуємо на підмножини вихідних змінних та вхідних – управління і збурень), що залежить від деякої множини параметричних входів  $W$ ,  $S = S(W) \subset X \times X$ , а також є визначеною класифікаційна ознака для змістовного розбиття по класах  $X \Rightarrow \{X_j\}$ ,  $j = 1..M$  Тобто маємо схему спрощення:

$$\Sigma_{DF} = \{S: X \Rightarrow X, R \subset X \times X\}. \quad (3.32)$$

Для (3.32) має місце теорема [174, 175]. Якщо на  $X$  – множині станів спрощених через декомпозицію системи з відображенням  $S: X \Rightarrow X$



задано відношення еквівалентності  $R$  і спряжене з ним натуральне сюр'єктивне відображення  $\pi: X \rightarrow X/R$  в підмножину  $X_j \subset X$

$$\pi = \text{nat } R: X \Rightarrow X/R = \cup X_j, j \in J; \pi_j: X \Rightarrow X_j, \quad (3.33)$$

для якого  $S(X_j) = X_j$  (тобто підмножина відображується в себе), то відображення заданої системи  $S$  може бути розкладено (декомпововано) на  $M$  окремих підсистем  $S_j$ , тобто

$$\{S: X \Rightarrow X\} \Rightarrow \{\pi_j \cdot S \cdot (\pi_j)^{-1}: X_j \Rightarrow X_j, j \in J, |J| = M\}. \quad (3.34)$$

Окремі відображення  $S_j$  підсистем отримуються з заданого відображення  $S$  шляхом звуження області визначення на  $X_j$  – класи еквівалентності. Розбиття  $X/X_j, j \in J$  гарантує виконання умови сумісності  $\pi_j \cdot S \cdot (\pi_j)^{-1} \subset S$ .

Оскільки  $|X_j| = M_j < M = |X|$ , то така процедура приводить до системи моделей меншої розмірності. Це дає можливість аналізу і оптимізації системи по частинах. Змістовними прикладами спрощення може бути декомпозиція на функціональні підсистеми для автомобіля, системи переробки відходів в біореакторах – відповідно етапам технологічного процесу, математичної моделі системи на підсистеми  $S$  – «об'єкт»,  $V$  – «зовнішнє оточення»,  $U$  – «регулятор» з виділенням відповідних підсистем вимірювання стану  $y, v, u$ .

Розглянута схема декомпозиції не дає для практики нічого, крім осмислення і узагальнення. Конкретне відношення спрощення через декомпозицію вибирається на базі практики – технологій виробництва, призначення продукту та ін. Але ж конструкції і технології можуть бути побудовані на різних концепціях і фізичних процесах технологій.

Тобто теоретично узагальнене Месаровичем розбиття системи на функціональні підсистеми не вичерпує всіх можливих підходів до декомпозиції. Для дослідження моделей, процесів побудови моделей і моделювання потрібні розширення декомпозиційних схем, що відображують:

– дуальність моделі як відображення реального технічного об'єкта і еталона для майбутнього технічного об'єкта;

– динамічність моделі – параметричні та структурні модифікації для підвищення ефективності і адекватності моделі.

Урахування дуальності і динамічності обумовлює необхідність чергового узагальнення – метамоделі. В проекті UML введено ієрархію метамodelей.

З цими абстрактними теоретичними проблемами пов'язані суто практичні: ефективність сучасних безпілотної, біореактора, в першу чергу, від закладених в системи управління моделей ідентифікації і управління процесами. В цих прикладах модель є видом промислової продукції, корисність якої достовірно може бути визначена в значеннях певних критеріїв ефективності.

Критерієм ефективності декомпозиції є обсяг взаємозв'язків між підсистемами  $S_j$ . Теорема М. Месаровича про декомпозицію стверджує можливість декомпозиції будь-якої абстрактної системи в не менше ніж тримісні відношення з інтерпретацією «вхід», «вихід», «взаємозв'язки». Стверджується також, що не існує регулярних методів декомпозиції абстрактної системи в двомісні відношення [229].

**Редукційна декомпозиція.** В моделюванні завжди має місце ситуація, коли для об'єкта існує ряд моделей, що можуть бути упорядковані за складністю і менш складна модель має меншу адекватність. Формалізацією цього є редукційна схема спрощення. А. Горбань [32, 174, 175] запропонував редукційну схему спрощення математичних моделей, що в даній роботі дозволила узагальнити і обґрунтувати результати практики в різних сегментах виробництва. Схема задається відношеннями

$$\Sigma 2d = \{S: X \Rightarrow X; Hn: X \Rightarrow Z; Tr \subset Z \times Z\}, \quad (3.35)$$

де  $Hn$  – ін'єктивне відображення;  $Tr$  відношення спрощення ( $Tr = R$ ), що може бути або еквівалентністю ( $Tr = Q$ ), або квазіпорядком ( $Tr = R$ ).

Якщо  $Tr = R$ ,  $\Sigma rd = \Sigma r1 \approx \Sigma 1d$ . У випадку  $Tr = Q$  маємо:

$$\Sigma 2d = \Sigma 22 = \{Sp: Hn \cdot S \cdot Hn^{-1}: X; Hn: X \Rightarrow Z; Tr \subset Z \times Z\}. \quad (3.36)$$

Для (3.36) може бути сформульовано таке твердження: якщо в системі відношень (3.36) має місце

$$Z \cdot Q \cdot Z^{-1} = Z1 \subset Z; K = \text{nat}Q : Z \Rightarrow Z1,$$

то звуження (сюр'єкція) перетвореного відображення  $Szv$  на спеціалізовану підмножину  $Z1$  дає відображення спрощеної системи  $Szvs$ , тобто

$$S1 = K \cdot S \cdot K^{-1} : Z1 \Rightarrow Z1, Hm \cdot S \cdot Hm^{-1}, Z \Rightarrow Z.$$

Проведемо порівняльний аналіз функціональної і редуційної декомпозиції.

При функціональній декомпозиції повна система  $S$  розбивається на множину окремих моделей, що змістовно є математичними моделями функціональних підсистем

$$\Sigma 1d: S \Rightarrow \{(S_j, X_j)\}, j \in J,$$

де  $S_j$  – відношення повної підсистеми, звужене на область визначення  $X_j$ . Для того, щоб виконати зворотну операцію – агрегування окремих математичних моделей  $S_j$  в повну –  $S$ , необхідно задати структуру зв'язків між функціональними підсистемами. На цьому рівні опису абстрактних систем, як відношень на множинах, зв'язки задаються  $Zj \subset Xj$  множиною станів зв'язків між підсистемами. Зв'язки можуть бути для кожної підсистеми  $S_j$  класифіковані на входи і виходи.

При редуційному спрощенні [174] повна математична модель  $S$  розбивається на множину окремих редукованих моделей:

$$\Sigma 2d: S \Rightarrow \{(Sr_l, Z_l)\}, l \in L,$$

де  $Sr_l, Z_l$  – редуковане відношення і множина станів відповідно;  $l, L$  – індекс редукованої системи та індексна множина, відповідно  $l = 0$  відповідає «точній моделі» (повній системі), тобто:  $Sr_0 = S, Z_0 = X$ .

Нехай для  $(S, X)$  існує множина відношень спрощення  $\{Rk\}, k \in K$  і відношення «подібності»  $Tr$  – деяке рефлексивне, симетричне, не-транзитивне відношення (толерантність). Це відношення має інтерпретацію як нечітке поняття «модель  $Sr_i$  тієї ж природи, що і модель

$Sm$ », або « $Sri$  подібна до  $Sm$ ». Кожне відношення спрощення породжує кінцевий ланцюг (порядок) спрощених моделей, де пара сусідніх моделей пов'язана відношенням

$$(Sri, Zi)Tr(Sr(i-1)) \wedge (Sri, Zi)Qr(Sr(i-1)),$$

де  $Q$  відношення «простіше» ( $Sri, Zi$ ),  $i$ -та спрощена модель в ряді моделей спрощених заданим відношенням. Приклад – моделі апроксимації рядом Тейлора або Фур'є: наближення 1-го, 2-го ... порядків. В окремих застосуваннях редуційної схеми, наприклад, при апроксимаціях динамічних і статичних залежностей використовується термінологія « $Sri$  є оцінка  $Sr(i-1)$ ». Математичні моделі, що отримуються за допомогою різних відношень спрощення  $Rk, Rm$  з однієї моделі  $Rk(S, X), Rm(S, X), k, m \in K$  не можуть бути упорядковані за складністю без додаткових даних про структури, інтерпретації моделі, критерію складності. Тому довільне послідовне застосування відношень спрощення породжує деревовидний порядок на множині редукованих моделей.

Необхідність у використанні систем редукованих моделей виникає в системах реального часу, де потрібний результат повинен бути не тільки задовільним за точністю, але і вчасним – без неприпустимого запізнення. Послідовність редукованих моделей природним способом виникає в інноваційних розробках, коли паралельно ведуться розробки технічної системи і її моделі – спочатку створюється простіша модель, потім вона деталізується і корегується. Формалізацію такого процесу можна знайти у Беллмана – він назвав це «функціональна апроксимація». Звична функціональна ієрархічна декомпозиція базувалась на стабільних виробах, технологіях і виробництвах в стабільному оточенні інших виробників галузі.

**Структурна декомпозиція.** Функціональна і редуційна декомпозиція не вичерпують можливі способи розбиття систем на частини. Звична функціональна ієрархічна декомпозиція – відображення минулих реалій, коли певний виріб, певна технологія трималися без змін десятками років. Це були виробничі системи і вироби – незмінні, неадаптивні і досить стабільне зовнішнє середовище Редуційна декомпозиція породжує упорядковані ієрархічні структури моделей, придатних до вбудовування в комп'ютерні системи управління. Однак цих двох декомпозицій недостатньо у випадках високої невизначеності

для об'єкта, коли є тільки цілі, обмеження і альтернативи побудови об'єкта. Ситуація великої невизначеності виникає також, коли певний технічний напрям швидко і стихійно розвивається при відсутності науково обґрунтованого і практично корисного «модельного забезпечення» (американський термін для такої ситуації «ізолювані від науки області»). В таких випадках бувають альтернативні моделі стихійної реальності. В проектуванні технічних систем часто використовується паралельне пророблення версій проекту, в процесі пророблення певні версії відбраковуються – це інтерпретація структурної декомпозиції.

Вводимо структурну декомпозицію [32, 46, 63] моделі певного об'єкта  $\Sigma 3d$ ,  $\{S, X\}$  в структурні класи

$$\Sigma 3d: S = \{S_i, X_i\}, i \in J,$$

де  $S_i$  – математична модель  $i$ -го структурного класу, що визначається як група відносно деякої операції  $S_{il} \in \{S_i\}: g_i(S_{il}) = S_{ik} \in \{S_i\}$ .

Неформально деяка окрема структурна ММ  $(S_i, X_i)$  описує повну систему  $(S, X)$  з деякою припустимою точністю, що оцінюється критерієм

$$Q(x(t), xi(t), V), x(t) \in X(t), xi(t) \in Xi(t), v \in V,$$

де  $v$  – реалізація збурення, невизначеності. Множина  $\{S_i, X_i\}$  утворює клас еквівалентності за ознакою існує

$$v \in V: ((S_k, X_k) \in \{S_k, X_k\}, i, k \in J) \implies Q(xk(t), xi(t), v) < Qr. \quad (3.37)$$

Змістовно  $Q()$  є критерієм близькості виходів повної ММ і окремої, спеціалізованої відносно деякого стану невизначеностей (ВС)  $v \in V$ .

Очевидно, умова належності (3.37) не визначає якісь границі множини  $\{S_i, X_i\}$ , не задає порядок на цій множині. В окремих випадках, коли можливо задати порядок на множині зовнішніх середовищ, упорядкування елементів множини  $\{S_i, X_i\}$  виконується за критерієм  $Q(\cdot)$ . В загальному випадку на  $\{S_i, X_i\}$  можливо виділити підмножину Парето

$$\{S_l, X_l\} l \in L \in J \exists l, f \in L \exists v \in V: Q(xl(t), xi(t), v) \geq Q(xf(t), xi(t), v), \quad (3.38)$$

що інтерпретується як наявність певної реалізації зовнішнього середовища для певної ММ  $\{Sl, Xl\}$ , що належить до множини  $(Si, Xi)$  і буде найкращою серед ММ цього класу за критерієм  $Q()$ .

Розглянутий аналіз декомпозицій на рівні абстрактних теоретико-множинних моделей є неконструктивним в умовах ізоляції теоретико-множинного рівня від інших рівнів дослідження. В даній роботі обов'язкова складова дослідження – доведення моделі до рівня робочої і проведення досліджень на робочій моделі. Робочі моделі є необхідним доповненням і заміником для досліджень процесів розвитку, особливо – розвитку інноваційного.

Неконструктивність абстрактних моделей суттєво звужується, якщо виконати розширення проблеми декомпозиції як проблеми побудови і дослідження пари операторів «декомпозиція–композиція».

### **3.6.2 Синтез декомпозиційної структури для систем К-класу і Д-класу**

Вводимо два класи розподілених систем за ознакою створення.

**Розподілені системи К-класу.** Аналіз інформації відносно процесів розвитку певних класів виробів, виробництв, систем управління підприємствами дозволяє виділити окремий клас розподілених систем різної природи – обчислювальних, соціо-техніко-економічних, інформаційних, які можна описати єдиною математичною моделлю « $N$  елементів,  $M$  задач». Поведінка елемента описується узагальненою імовірнісною моделлю зростання з обмеженням та імовірнісною моделлю локального управління розподілом ресурсу елемента.

**Розподілені системи Д-класу.** Зміна концепції оптимізації обумовлює концепції декомпозиції. Аналіз практики проектування і реальних структур великих систем дозволяє диференціювати розбиття «ціле–частина» мінімум на три класи. Функціональна декомпозиція – розбиття математичної моделі (ММ) на субмоделі, кожна з яких відображує якусь окрему функцію повної ММ. Редукційна декомпозиція – розбиття ММ системи на субмоделі, що належать до одного структурного класу апроксимаційних моделей. Кожна з субмоделей відображає повну ММ системи, але з різною точністю. Структурна декомпозиція – розбиття ММ системи на субмоделі, що належать до різних структу-

рних класів і є еквівалентними відносно критеріїв точності відображення реального об'єкта.

Складність проблеми декомпозиції в тому, що вона є багаторівневою: продуктивними є дослідження проблеми на рівнях загальної теорії систем, прикладних теорій – теорії управління, теорії ймовірності, і потім на рівні конкретних технічних наук – аерокосмічних систем, металургійних і агробіологічних систем і також системи освіти. Якщо обмежитись одним рівнем – результати досліджень будуть непродуктивними. Для забезпечення ефективної стратифікації проблеми декомпозиції необхідно знайти загальні правила і процедури переходу між рівнями.

Фактично в реальних процесах розробки моделей мають місце як процеси декомпозиції, так і композиції. Об'єднаємо два еволюційних процеси розвитку реальних систем та їх моделей в одну схему (рис. 3.32). Логіка схеми: певний технічний об'єкт може розглядатись або як система в аспекті його конструювання і виробництва, або як елемент, що може використовуватись в системах вищого рівня.

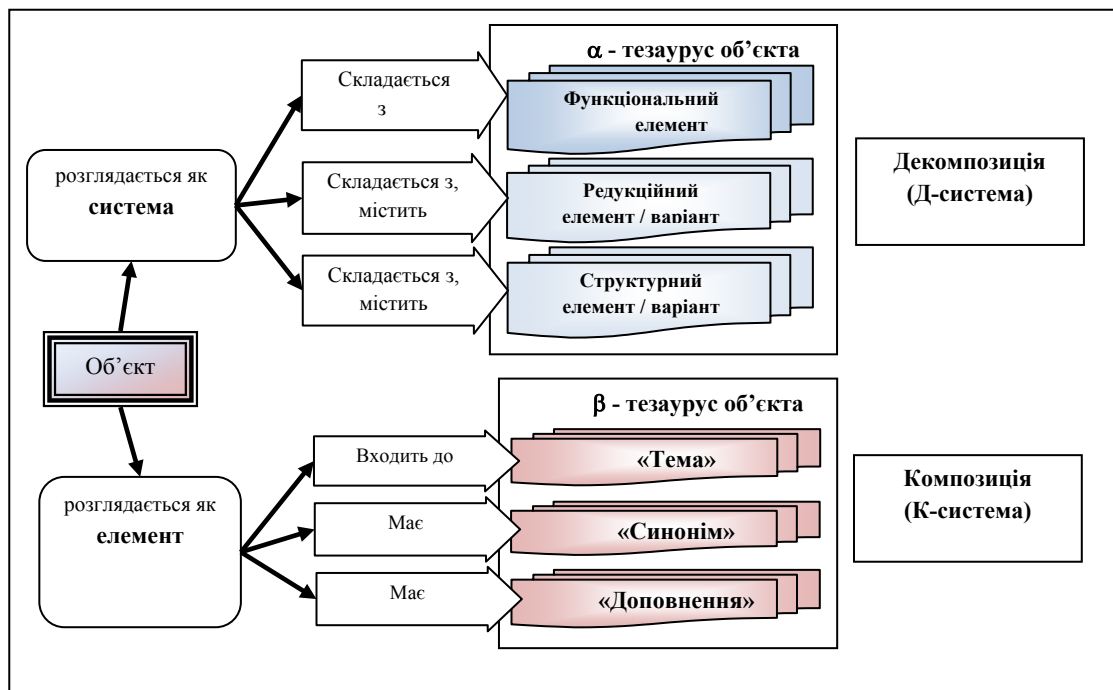


Рисунок 3.32 – Схема процесів тривірневої декомпозиції та композиції

Розроблені та досліджені моделі дозволяють показати конструктивність запропонованої концепції трирівневої декомпозиції. У літературі немає твердих стандартів на термінологію в області класів декомпозицій. Тому стисло визначимо введені декомпозиції.

**Декомпозиційна структура К-класу.** В роботі об'єднуються в симетричну структуру два еволюційні процеси розвитку реальних систем і їх моделей через розділення і об'єднання підсистем. Згідно з цією схемою кожен об'єкт може розглядатися і як система, яка може складатися із структурних, функціональних і редуційних елементів, і як підмножина систем, до складу яких може входити даний елемент.

Термінологію для композиції взято з лінгвістики, оскільки на початкових етапах створення технічної системи, вона існує у вигляді логіко-лінгвістичної системи, де використання деякого елемента характеризується: «темою» – цільовим призначенням системи, де він використовується; «синонімом» – можливим заміником цього елемента в даній темі і «доповненням» – необхідними при використанні цього елемента в даній «темі» (контексті) іншими елементами.

На рис. 3.33 подано порівняльний аналіз запропонованого підходу і прямих аналогів. Питання алгебраїзації і операцій декомпозиції виходить за межі задач, однак, ведуться дослідження в цьому напрямку. Для окремих випадків отримані програмні реалізації операторів декомпозиції.

На базі аналізу і узагальнення отримано *Новий науковий результат*.

*Формулювання.* Вперше запропоновано і реалізовано концепцію побудови системи моделей інноваційного розвитку на базі 3D-декомпозиції (структурної, функціональної, редуційної), де, на відміну від існуючих підходів і методів, в систему моделей включаються і використовуються паралельно моделі різних структурних класів і моделі одного структурного класу, але з різними рівнями редуції. Паралельне використання альтернативних моделей забезпечує взаємоконтроль моделей інноваційного розвитку для ще не реалізованих виробничих систем та підвищення надійності прогнозування для реалізованих виробничих систем



Існуючі підходи до декомпозиції	Запропонований підхід до декомпозиції
<p>Багатокрокова декомпозиція процесу прийняття рішень (динамічне програмування, Р. Беллман [24]).</p> <p>Багатокрокова декомпозиція процесу прийняття рішень (метод принципу максимуму, Л. Понтрягін [249]).</p> <p>Багаторівневі ієрархічні декомпозиції: <b>страти, шари, ешелони</b> (М. Месарович [229, 230]).</p> <p>Багаторівнева декомпозиція процесу розвитку. <b>Анатомічний і фізіологічний</b> принципи декомпозиції моделі складної системи (М. Пешель [246]).</p> <p>Мерономія, таксономія, коророзбиття (Ю. Шрейдер, А. Шаров [280]).</p>	<p>Еволюційний підхід:</p> <p><i>K-система</i>: результат процесів розвитку системи з множиною однорідних елементів.</p> <p><i>D-система</i>: результат процесів утворення системи через розбиття «монолітного» елемента згідно з певними операціями декомпозиції.</p> <p><i>Синтез існуючих підходів</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Розпаралелювання задач і даних в обчисленнях.</li> <li>2. Декомпозиція систем: функціонально-структурно-редукційна декомпозиція (FSR).</li> <li>3. Декомпозиція процесів – багатокрокова декомпозиція управління.</li> </ol> <p>Декомпозиційна структура для аналізу і синтезу розподілених систем на базі FSR декомпозиції і TZD композиції.</p>

Рисунок 3.33 – Порівняння запропонованої декомпозиційної структури з аналогами

*Аналоги* – декомпозиції «страта, рівень, ешелон» (М. Месарович [230]) та «мерономія–таксономія» (Ю. Шрейдер [280], М. Пешель [246]), «морфологічний ящик» (Ф. Цвіккі [350]). Результат 3D-декомпозиції – багатоваріантна, надлишкова структура. *Актуальність* – розробка нових моделей для нових задач є потужним сектором індустрії виробництва «інтелектуальної продукції», що потребує раціональних структур моделей і раціональних технологій їх конструювання. *Суть результату* – надлишковість: зменшує обсяг змін при переході від спрощених до більш точних моделей, підвищує рівень контролю коректності та стійкість до помилок розробки. Ієрархія операторів декомпозиції:  $DS(.)$  – структурна,  $DF(.)$  – функціональна,  $DR(.)$  – редукційна. Класи декомпозицій: однокрокові 1D –  $DS( )$ ,  $DF(.)$ ,  $DR(.)$ ; двокрокові 2D –  $DS(DF(.))$ ,  $DF(DS(.))$ ,  $DR(DF(.))$ ,  $DR(DS(.))$ ; трикрокові 3D –  $DS(DF(DR(.)))$ ,  $DF(DS(DR(.)))$ ...

### Висновки до розділу 3

Центральна проблема розподілених виробничих систем – оптимальний розподіл управління між локальними управліннями і централізованим управлінням. Одна з вторинних, похідних проблем – проблема формування узгоджених з глобальними цілями локальних управлінь. Локальне управління крім підвищення ефективності централізованого управління породжує нову властивість цілісної розподіленої системи – живучість, складовими якої є відмовонечутливість, відмовостійкість та відмовобезпечність.

*Проведено дослідження моделей локальних управлінь, що дозволило узагальнити існуючі і запропоновані нові методи локального управління.* Проведено дослідження розподілених систем двох рівнів – продуктів виробництва і виробничих систем в аспекті ефективності в номінальних і неномінальних умовах. Створено моделі, що підтвердили можливість побудови розподілених систем, що не потребують додаткових витрат на забезпечення живучості.

*Виконано інтеграцію процесів розробки моделей і проведення досліджень на моделях.* В процесі проведення досліджень отримано нові результати стосовно властивостей розподілених виробничих систем: визначені залежності усталених розподілів від початкових умов та ефективностей елементів; показано, що усталені розподіли є композиціями двох типів розподілів; доведено, що відомі стійкі гіперболічні рангові розподіли можуть бути результатом дії детермінованих механізмів.

В підсумку отримані результати досліджень дозволяють більш точно прогнозувати розвиток розподілених систем. В результаті дослідження на моделях з урахуванням невизначеностей процесів освоєння показано, що існує оптимальний рівень збурень, що стабілізує розвиток розподілених систем.

На базі запропонованих декомпозиційних методів розроблено екстремальну систему управління, що складається з двох регуляторів – стабілізації сумарного навантаження і оптимізації розподілу навантаження між окремими реакторами, – що працюють послідовно. Регулятори працюють послідовно, так що регулятор рівня забезпечує інформацією регулятор оптимального розподілу. Система моделювання і алгоритм адаптивного управління мають великий потенціал подальшого розвитку і вдосконалення.

В результаті проведених досліджень отримано нові наукові результати.

Вперше запропоновано і реалізовано узагальнену структуру і метод управління окремим виробником в активному оточенні інших виробників певного сегменту виробництва, що відрізняється від існуючих методів декомпозицією процесу управління на такі кроки: визначення пропорції розподілу ресурсу виробничої системи між частками на ризикове і детерміноване управління; розподілу цих часток між виробництвами окремих продуктів. Запропонований метод локального управління є узагальненням – змішаною стратегією на базі відомих детермінованих та імовірнісних методів, – що дає можливість адаптації локального управління станом сегмента виробництва до невизначеностей стану виробництва, потреб, появи нових технологій; можливість імітації управління окремих виробників сегмента за рахунок доступної статистики і побудови імітаційної моделі системи виробників для реалізації нового підходу «один на фоні всіх» до оцінки ризиків певного виробника з урахуванням імітації дій інших виробників.

Отримав подальший розвиток метод реалізації оптимального розподілу навантаження у виробничих системах з елементами, що працюють паралельно в умовах високої невизначеності за допомогою екстремальної адаптивної системи, що відрізняється від існуючих методів оптимального адаптивного управління використанням регуляторів стабілізації навантаження виробничої системи і мінімізації витрат виробництва, що працюють послідовно, де перший регулятор крім стабілізації навантаження генерує тестові дані для другого регулятора, що перерозподіляє навантаження для мінімізації витрат виробництва. Запропонований метод дає можливість забезпечити задовільну роботу виробничої системи при нелінійностях функцій виробництва елементів з класу нестрого монотонних і нестрого позитивних функцій.

Вперше запропоновано і реалізовано концепцію побудови системи моделей виробничої системи на базі трирівневої декомпозиції – структурної, функціональної, редуційної, що відрізняється від існуючих підходів і методів декомпозиції моделей виробничих систем тим, що кожний елемент системи моделей є результатом застосування трьох відповідних операцій декомпозиції моделі різних структурних класів, з різними рівнями редуції (спрощення). Паралельне використання альтернативних моделей в регуляторах, ідентифікаторах, предикторах подібно неідентичному резервуванню в технічних системах підвищує ефективність і надійність. Запропонована декомпозиційна структура дозволяє формалізувати процес побудови моделей виробничих систем, що тільки створюються.

Нові наукові результати відображені в публікаціях [33–40, 64, 65, 74, 81, 82, 85, 97].

## РОЗДІЛ 4

### МЕТАМОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ

В цьому розділі подано розробку і дослідження моделей двох рівнів – моделей розвитку розподіленої виробничої системи, що тільки створюється, і моделі процесу побудови цієї моделі. Модель процесу побудови моделі не є черговим ієрархічним рівнем моделі розподіленої виробничої системи, а саме метамоделлю. В розділі 3 було запропоновано класифікаційну структуру для математичних моделей виробничих систем – трирівневу декомпозицію. Ця структура частково заповнена розробленими в розділах 2, 3 моделями функціонування і розвитку виробничих систем.

Наступний природний і необхідний крок дослідження процесів створення робочих моделей – *формалізація процесів створення системи моделей функціонування і розвитку виробничої системи*. Так ми природним чином приходимо до поняття метамоделі, як моделі реального процесу створення нових моделей для виробничих систем, що тільки створюються. На базі методологічних результатів розділу 2, оптимального агрегування і дезагрегування, вибрано для розробки і дослідження метамоделі таку послідовність процесу побудови:

- розробка і дослідження концептуальної агрегованої метамоделі;
- розробка і дослідження деталізованої метамоделі.

Початкові дані для побудови і дослідження агрегованої метамоделі – результати досліджень (розділи 1, 2, 3) і аналіз різномірної інформації про реальні виробничі системи і продукти виробництва. Реалістичність і актуальність вибраного напрямку підтверджується практикою, де процеси які виконувались досить ізольовано і послідовно, тепер інтегровані.

В цьому розділі – два паралельні процеси:

- побудова і дослідження метамоделі;
- продовження побудови системи моделей розподіленої виробничої системи класу: від моделі класу «виробники, продукти» переходимо до більш реалістичної і складної розширеної моделі «виробники, лінійки продуктів, користувачі».

#### 4.1 Визначення метамodelей – modelей процесів побудови modelей розподілених виробничих систем

**Постановка проблеми.** В умовах глобалізації головним інструментом прогнозування і планування є робочі (реалізовані в програмному середовищі) математичні моделі систем класу « $N$  виробників,  $M$  продуктів,  $K$  споживачів» ( $N \times M \times K$  – систем). Побудова математичних modelей для складних, відкритих, таких що розвиваються систем, вимагає адекватної концепції декомпозиції. Проблема міждисциплінарна, тобто «нічийна» – маємо справу з розподіленими системами, що функціонують за монолітними, нероз'ємними соціо-технічними механізмами. Аналоги і прототипи роботи: багатокрокова декомпозиція процесу прийняття рішень [24–26, 249, 250]; багаторівневі ієрархічні декомпозиції – страти, шари, ешелони [228–230]; багаторівнева декомпозиція процесу розвитку, анатомічний та фізіологічний принципи декомпозиції [246], мерономія, таксономія, коророзбиття [280].

**Визначення метамodelі.** Метамodelь змістовно – певна декомпозиційна структура моделі розвитку розподіленої виробничої системи, де задані певні детерміновані та імовірнісні алгоритми модифікації та створення субmodelей цієї декомпозиційної структури. Тобто, метамodelь – це процес розвитку системи modelей – кінцевий стан якого – задовільна, реалізовна модель інноваційного розвитку розподіленої системи. Термін «метамodelь» – поширене і багатозначне поняття.

Найближче, з позицій інформаційних технологій, до автоматизації процесів розробки програм і «орієнтованого на моделювання інжинірингу» була система UML, де введено багаторівневу систему modelей від  $M_0$  реальності до modelей реальності  $M_1$ , метамodelей  $M_2$ . В UML, чисто комерційному продукті, число таких рівнів не обмежується. Це свідчить про актуальність підходу до моделювання як галузі виробництва. Конкретизуємо ці визначення стосовно тематики даної роботи. Метамodelь процесу розвитку виробничих систем це модель процесів сумісного розвитку створюваної виробничої системи і створюваної моделі цієї виробничої системи.

Modelі інноваційного розвитку формально належать до іншого прагматичного класу, ніж моделі-відображення існуючих реальних об'єктів або процесів. Назвемо ці класи так: *deskриптивні моделі* – такі, що описують існуючий реальний об'єкт; *presкриптивні моделі* –

такі що вказують, яким повинен, або може бути майбутній реальний об'єкт. Ці два класи мають суттєво відмінні процеси їх побудови, тобто метамоделі. На рис. 4.1, 4.2 подано схеми процесів двох типів.

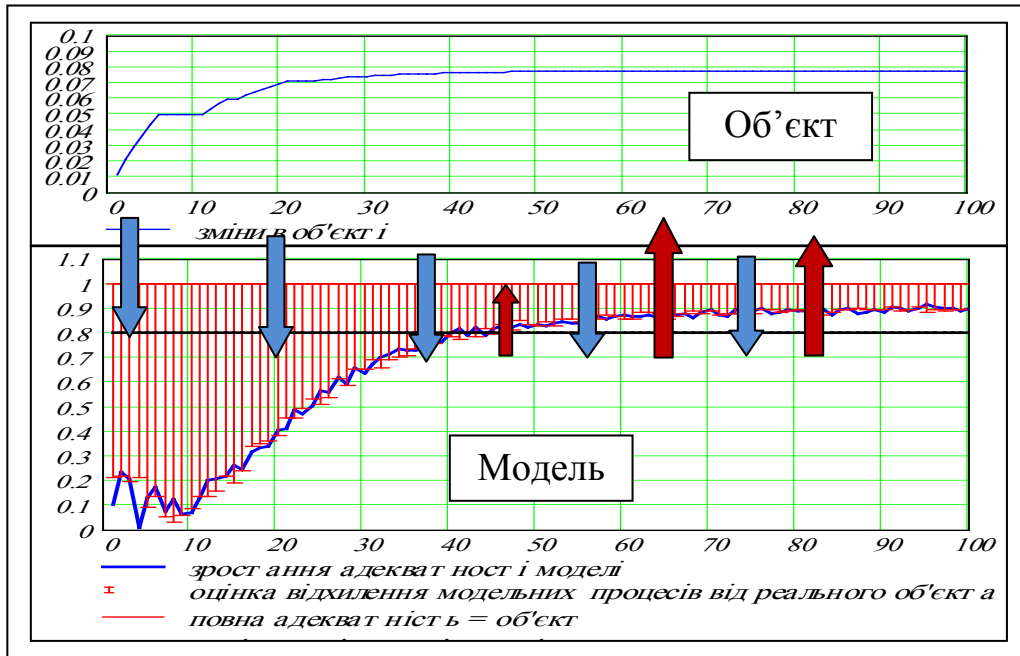


Рисунок 4.1 – Схема процесу «побудова моделі існуючого об'єкта»

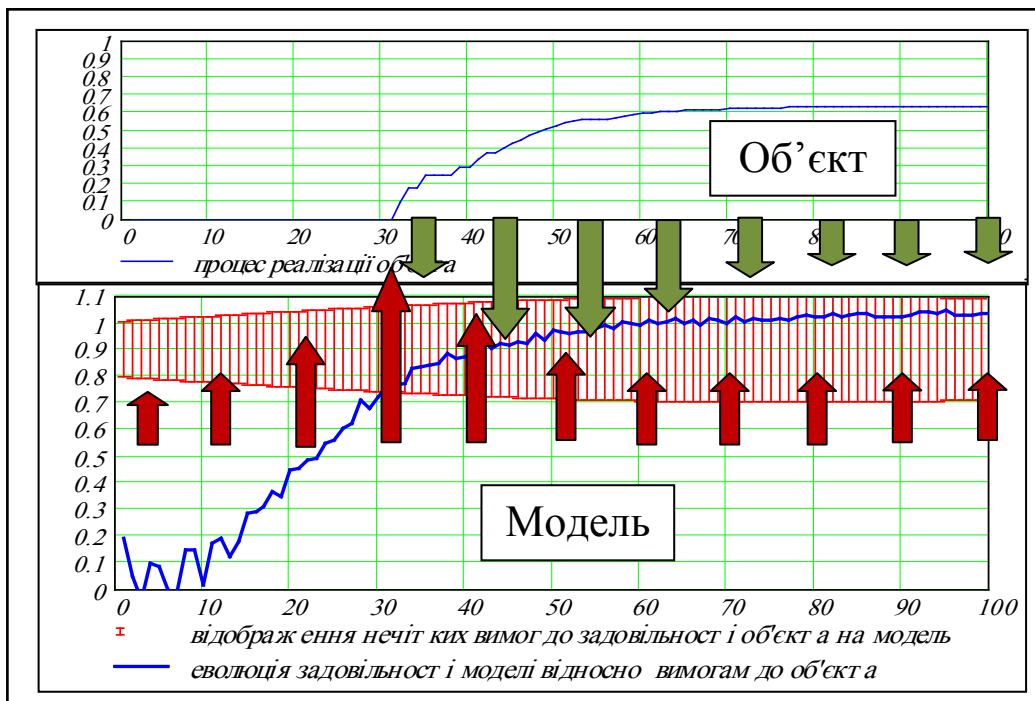


Рисунок 4.2 – Схема процесу «побудова нової моделі для нового об'єкта»

Графіки на рис. 4.1 і 4.2 побудовані за моделями нульового наближення – нелінійними моделями випадкових процесів – створення моделей базується на бібліотеках («базах знань») міжрівневих елементарних моделей. Міжрівневі моделі – математичні моделі, що використовуються на різних рівнях ієрархічної моделі виробничої системи. Формалізація категорії міжрівневих моделей виконана М. Месаровичем [230]. Прикладом може бути використання імовірнісних моделей і моделей нечіткої логіки в обчислювальних мережах – від процесів в мікросхемах до процесів в Інтернеті. В даній роботі одним з таких міжрівневих модулів є модуль «імовірнісне зростання з обмеженням з довільними законами розподілів ймовірностей і нечіткостей».

На рис. 4.3 подано три реалізації процесу класу «імовірнісне зростання з обмеженням з довільними законами розподілів ймовірностей і нечіткостей». Можемо бачити, що накопичення випадкових відхилень на кожному кроці процесу приводить до великих розкидів в середині складного процесу. Реальний процес може породжуватись взаємодією десятків природних (розробників) і штучних (програми) інтелектів. В моделі постульовано цілеспрямованість (згідно з визначенням М. Месаровича [230]), раціональність (згідно з визначенням раціональних технологій А. Горбаня [175]) процесу створення системи моделей розподіленої виробничої системи.

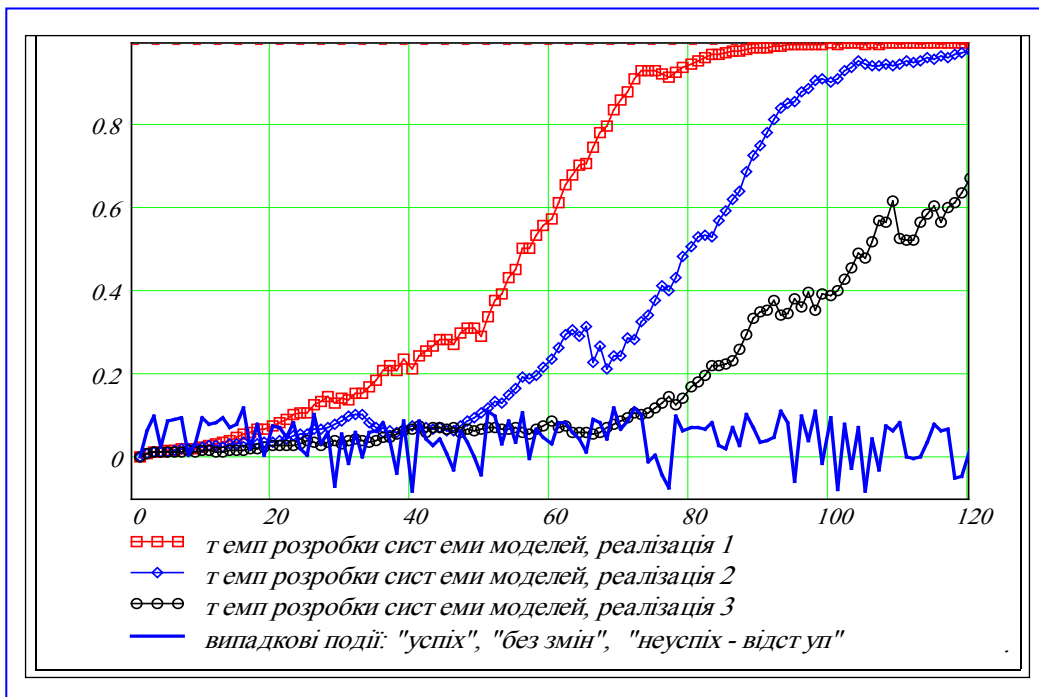


Рисунок 4.3 – Реалізації процесів побудови моделей нових об'єктів

Введені нами два типи процесів розробки моделей виробничих систем «об'єкт моделювання–модель об'єкта», «модель об'єкта–об'єкт» – певні корисні ідеалізації. Між цими класами моделей можна побудувати неперервний ланцюг процесів розробки і виробництва технічних систем. Відомо багато моделей прогнозування тривалості і вартості процесів розробки нових технічних систем [194]. Параметрами упорядкування моделей природно вибрати коефіцієнт новизни  $\alpha_1$  та коефіцієнт освоєння  $\alpha_2$ .

Коефіцієнт новизни  $\alpha_1$  – відношення (вартостей, мас) не нових до нових компонентів технічної системи. Для розробок нових транспортних літаків  $\alpha_1 = 90\text{--}95\%$ . Навіть для таких технічних систем, як космічні апарати, термоядерні генератори, що не мали прямих прототипів:  $\alpha_1 = 70\text{--}80\%$ .

Для подальшої роботи з метамоделями потрібно дати операційні визначення для поняття «стан системи моделей об'єкта». Почнемо з добре розробленої області динаміки технічних систем. Не виникає технічних проблем для визначення стану транспортних засобів, наприклад вектор координат в тривимірному просторі. З незначними проблемами можна визначити вектор стану біореактора чи трубчастій обертальної печі в значеннях температури, тиску, змісту компонентів та ін. Стан системи масового обслуговування можна задати чергами в системі.

Вибираємо для визначення стану процесу створення певної моделі: готовність моделі до цільового використання, яку зручно задати в діапазоні  $(0, 1)$ . Простіша множина станів: 0 – модель непридатна, 1 – модель придатна для цільового використання. На базі експертних і аналітичних процедур для конкретних ситуацій можна визначити неперервну нечітку шкалу задовільності моделі. Найближчий аналог проблеми вимірювання задовільності моделі – проблема вимірювання продуктивності вчених і конструкторів – розробників інтелектуальної продукції [275].

В даній роботі системи моделей породжуються тривимірною декомпозицією моделі складної системи в структурні, функціональні, редуційні субмоделі, тому природно описати стан системи моделей за допомогою «інформаційного куба», де координати відповідають номеру структурної версії, номеру функціональної підсистеми, номеру редуційної підсистеми (3.32), (3.35), (3.38). Кожен елемент «інфо-



рмаційного куба» – структура даних, що містить структуру і параметри субмоделі. Після підготовчої роботи можемо дати формальне визначення стану системи моделей об'єкта, коротко – стану метамоделі.

**Стан системи моделей об'єкта** – ієрархічна матрична структура, перший рівень якої – субмоделі, упорядковані згідно зі структурно-функціонально-редукційною декомпозицією [34], інші рівні містять структуру і параметри субмоделей. Формалізуємо поняття «оператор перетворення стану системи моделей». Побудуємо оператор перетворення стану як узагальнення відомих дискретних моделей динаміки [35, 169], розглянемо їх в порядку ускладнення:

– лінійна система, стан об'єкта задається вектором

$$x_{k+1} = A \cdot x_k + B \cdot u_k; \quad (4.1)$$

– адитивно-нелінійна система, стан об'єкта задається матрицею

$$Ms_{k+1} = Ms_k + Ud(Ms_k, dMs_k); \quad (4.2)$$

– нелінійна система, стан об'єкта задається структурою даних – матрицею, елементи якої можуть бути векторами, матрицями:

$$Msd_{k+1} = Op(Msd_k, U_k, P). \quad (4.3)$$

В цих рівняннях  $x_k$ ,  $u_k$  – вектори стану і управління;  $A$ ,  $B$  – відповідні матриці;  $Ms_k$  – матриця стану, елементами якої можуть бути вектори, матриці;  $dMs_k$  – прирощення матриці стану за крок квантування;  $Ud(\cdot)$  – оператор управління;  $Op(\cdot)$  – оператор, що бере:  $Msd_k$  – поточний стан;  $U_k$  – поточне управління;  $P$  – вектор параметрів і повертає наступний стан об'єкта  $Msd_{k+1}$ . В ситуації, коли рівняння (4.1)–(4.3) описують один і той же об'єкт, то ці моделі є елементами редукційної декомпозиції моделі складної системи в послідовність моделей, де кожна наступна модель є спрощенням попередньої [112].

Конкретизуємо ці моделі відносно задач даного дослідження. Маємо моделі трьох рівнів агрегування (редукції). Дотримуємось методології Беллмана побудови моделей виробничих систем за наявності невизначеностей [24–26].

На рис. 4.4 представлені визначення елементів метамоделі.

**Об'єкт** – регресія нормованого показника готовності виробничої системи  $x_2(t)$  від часу та відповідні точки статистичних даних.

**Модель об'єкта** - регресія нормованого показника готовності моделі  $x_1(t)$  від часу та відповідні точки статистичних даних.

**Стан метамоделі**  $(x_1(t), x_2(t))$

**Оператор переходу:** функція користувача, що бере стан системи, управління, функції зв'язків, збурення і повертає новий стан системи:

$$Fm\ mod = \begin{pmatrix} F\ mod(x_{1_k}, x_{2_k}, fmm_0, fpm_0, um, k) \\ Fprs(x_{1_k}, x_{2_k}, fpp_0, fmp_0, up, k) \end{pmatrix}$$

**Метамодель:** пара:  $[(x_{1_k}, x_{2_k}), Fm\ mod]$ , де  $(x_{1_k}, x_{2_k})$  - множина припустимих станів системи,  $Fm\ mod$  - оператор переходу між станами.

**Класи функцій розвитку** – стохастичні, «зростання з обмеженням».

**Класи функцій зв'язків:** стохастичні зростаючі, спадні, екстремальні.

**Вхід моделі** – нечіткі, стохастичні функції розвитку і зв'язків.

**Вихід моделі** – нечіткі, стохастичні функції розвитку системи «модель - об'єкт» та розподіли імовірностей для кінцевих показників - розподіли імовірностей часу досягнення заданих рівнів готовності об'єкта і моделі або розподіли імовірностей рівнів готовності в заданий момент часу.

**Інтерпретація метамоделі:** модель «виробники, продукти – користувачі».

Рисунок 4.4 – Формалізація агрегованої метамоделі системи «модель–об'єкт»

подаємо моделі у двох формах – в інтегральній і в прирощеннях [172, 173]:

– скалярна модель для середніх – одновимірні моделі

$$xs_{k+1} = fs1(xs_k, us_k, vs_k); \quad xs_{k+1} = xs_k + fs2(xs_k, us_k, vs_k) \cdot \Delta t; \quad (4.4)$$

– векторна модель для частотних розподілів – одновимірні моделі

$$xv_{k+1} = Fv1(xv_k, uv_k, vv_k); \quad xv_{k+1} = xv_k + Fv2(xv_k, uv_k, vv_k) \cdot \Delta t; \quad (4.5)$$

– матрична модель для імітації елементів моделі класу  $N \times M$

$$xm_{k+1} = Fm1(xm_k, um_k, vm_k); \quad xm_{k+1} = xm_k + Fm2(xm_k, um_k, vm_k) \cdot \Delta t; \quad (4.6)$$

– узагальнена матрична модель для імітаційної моделі класу  $N \times M \times K$  з тривимірними структурами стану – «інформаційними кубами», що мають координати «виробник, продукт, користувач»:

$$xkb_{k+1} = Fm3(xkb_k, ukb_k, vkb_k); \quad xkb_{k+1} = xkb_k + fm2(xkb_k, ukb_k, vkb_k) \cdot \Delta t. \quad (4.7)$$

Тепер можемо дати формальне визначення оператора переходу.

*Оператор переходу* – алгоритм (функція користувача), що бере стан системи з множини припустимих станів системи, управління та збурення і повертає новий стан системи, що належить підмножині припустимих станів системи.

*Метамоделю* – пара:  $[(xkb), Fm3]$ , де  $(xkb)$  – множина припустимих станів системи,  $Fm3$  – оператор переходу. Була розроблена модель першого наближення для процесу сумісного розвитку виробничої системи та її моделі.

На рис. 4.5 подано «інформаційний блок» – відображення процесу створення нової моделі для системи з інформаційним обміном – від схеми до програмної системи.

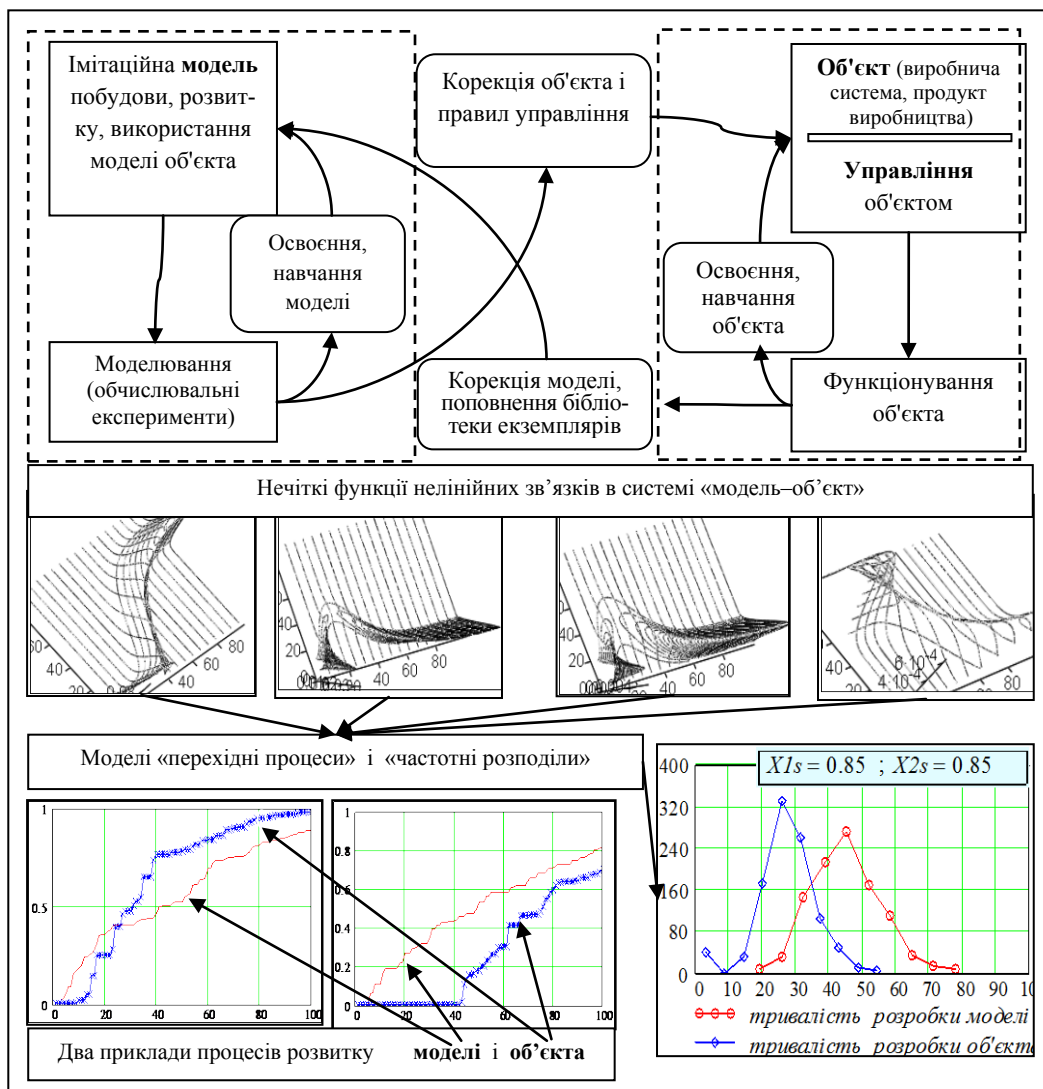


Рисунок 4.5 – Побудова метамоделі «модель-об'єкт»

Подано три стандартних кроки створення моделі:

– перший крок – розробка схеми системи з нелінійними, нечіткими і стохастичними зв'язками;

– другий крок – розробка моделей типових нелінійних, стохастичних і нечітких зв'язків (ці функції зібрані з великої кількості літератури з проектування, виробництва і технологічного прогнозування, наприклад [234, 253]);

– третій крок – перехідні процеси і розподіли ймовірності для термінів розробки моделі і об'єкта.

Далі розглядаємо два приклади побудови системи моделей для задачі моделювання розподілених систем класу «виробники, продукти, користувачі». Розглядаємо технічну задачу – виробництво продуктів одного класу, що відрізняються рівнем цінності для споживача.

## **4.2 Розробка імітаційної моделі для систем класу «виробники, продукти, користувачі»**

Розглядаємо процес побудови робочої моделі «виробники, продукти, споживачі», що є розширенням моделі «виробники, продукти» з розділу 3. Розроблено дві версії моделі – з імітацією кожного виробника, продукту, споживача і частково агрегована модель, де споживачі згруповані за рівнем потреб.

Призначення розробки – отримання нової моделі для нової задачі – управління випуском лінійки продуктів, відпрацювання технології створення моделей і проведення досліджень, побудова інтерпретації для метамоделі.

### **4.2.1 Лінгвістична і графова моделі системи «виробники, продукти, користувачі»**

Згідно з задекларованою в розділі 2 технологією створення робочих моделей, користувач продукту характеризується «ресурсом», інформованістю – спроможністю розрізняти вироби різних виробників та досвідом використання продукту, і наявністю власного досвіду використання продукту та схильністю до використання (американські виробники програмно-апаратних засобів дають безкоштовно в університети зразки нових продуктів – щоб студенти, що стануть спеціалістами, замовляли відповідні марки).

**Система користувачів** характеризується обсягом даного регіону, розподілом доходів в даному регіоні, насиченістю регіону, залежністю середньої імовірністю вибору в залежності від рівня доходу і рейтингу продукту.

**Продукт виробництва** (марка) на ринку характеризується собівартістю, ціною, корисністю і якістю (цінністю), функцією пропозиції і функцією «навчання» користувачів.

**Система продуктів і виробників певної галузі.** В певній галузі існують продукти різної ціни і якості. Потенційно можливо дати оцінку корисності (цінності) продуктів і побудувати залежність «ціна–цінність». Відобразимо лінгвістичну модель в граф зв'язків і впливів.

На рис. 4.6 виділено підсистеми моделей – функціонування (поведінки) користувачів, моделі функціонування виробників, окремо виділяємо моделі управління. Згідно з технологією створення [255, 258] робимо базові моделі першого наближення, такі що можна розширювати і налаштовувати на різні продукти, виробництва і ринки. Нові моделі повинні створюватись саме так – спочатку відлагоджується спрощена базова модель, а потім додаються послідовно розширення і уточнення, кожен крок ретельно тестується.

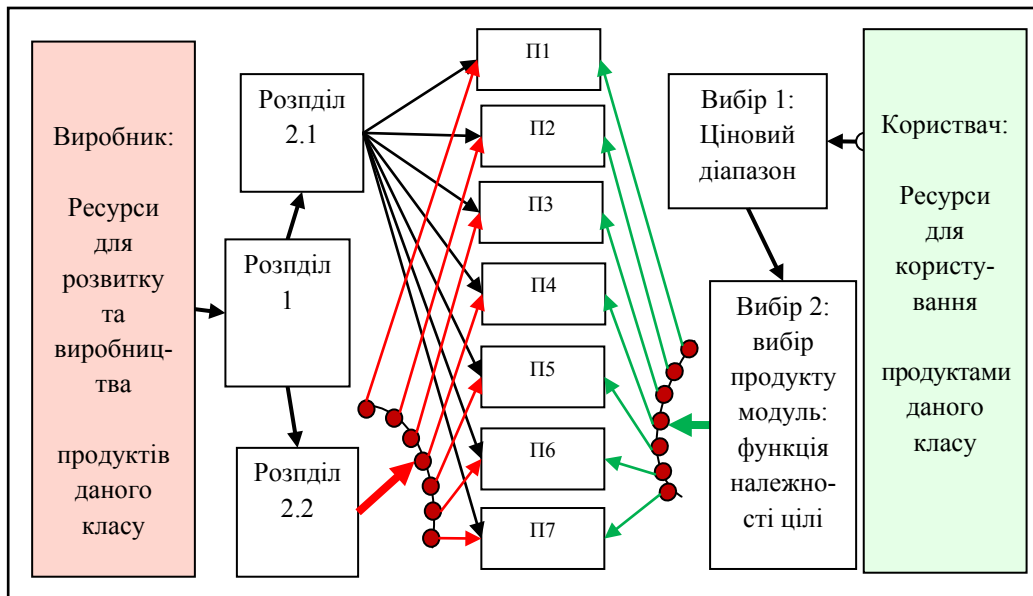


Рисунок 4.6 – Схема процесів «вибір споживача => лінійка продуктів <= вибір виробника»

Виділяємо модуль «система марок продуктів». Звичайно користувач має справу з множиною продуктів, упорядкованих за виробниками та ціною. Ставимо конкретну задачу: побудову модуля, що бере «хмару точок» на площині «ціна-цінність», а повертає залежності «середня ціна – цінність».

#### 4.2.2 Розробка моделі лінійки продуктів

Призначення цього і наступного підрозділів – показати цілісність і раціональність методології створення математичних моделей функціонування і розвитку виробничих систем. Інтеграція розробки моделей і досліджень на цих моделях суттєво підвищує ефективність досліджень.

Задаємо тестову модель даних. Задаємо: крок  $hag := xms \div Msf$ ; «причина» –  $xs_i := i \cdot hag$ ; шум: середнє  $mu := 0$ ; варіація  $va := 0.4$ . Параметри тестових наборів даних:  $A := 1$ ;  $w := 0.04$ ;  $s := 8$ . Модель даних:

$$yS_i := 10 \cdot A \cdot (1 - e^{-w \cdot xs_i})^s + ash \cdot rnorm(2, mu, va)_i \cdot natuc. \quad (4.8)$$

Визначення параметрів регресії. Можуть бути різні гіпотези про механізми утворення залежності «ціна-цінність» і відповідні моделі – наприклад, квадратична, експоненціальна залежності. Виконуємо ідентифікацію. Задаємо початкові значення змінних  $An := 2$ ;  $wn := 0.05$ ;  $sn := 3$ . Використовуємо вбудований метод оптимізації пакета: *Minerr* (*шукані змінні*) (рис. 4.7).

$$\text{Given} \sum_{i=1}^{Msf} [yS_i - 10 \cdot An \cdot (1 - e^{-wn \cdot xs_i})^{sn}]^2 = 0; \begin{pmatrix} Ao \\ wo \\ so \end{pmatrix} := \text{MinErr}(An, wn, sn).$$

Підставляємо розв'язок в модель регресії  $ysi(x) := 10 \cdot Ao \cdot (1 - e^{-wo \cdot x})^{so}$ .

Робимо модуль «система лінійок продуктів від окремих виробників». Поняття «лінійка продуктів» є нечітким. Виробники повинні орієнтуватись в стихійних споживацьких оцінках продуктів – вони можуть означати нову перспективну область потреб, або необхідність змін. Зробимо базову модель лінійки продуктів ринку як об'єднання лінійок продуктів окремих виробників. Використовуємо базову модель (4.8).

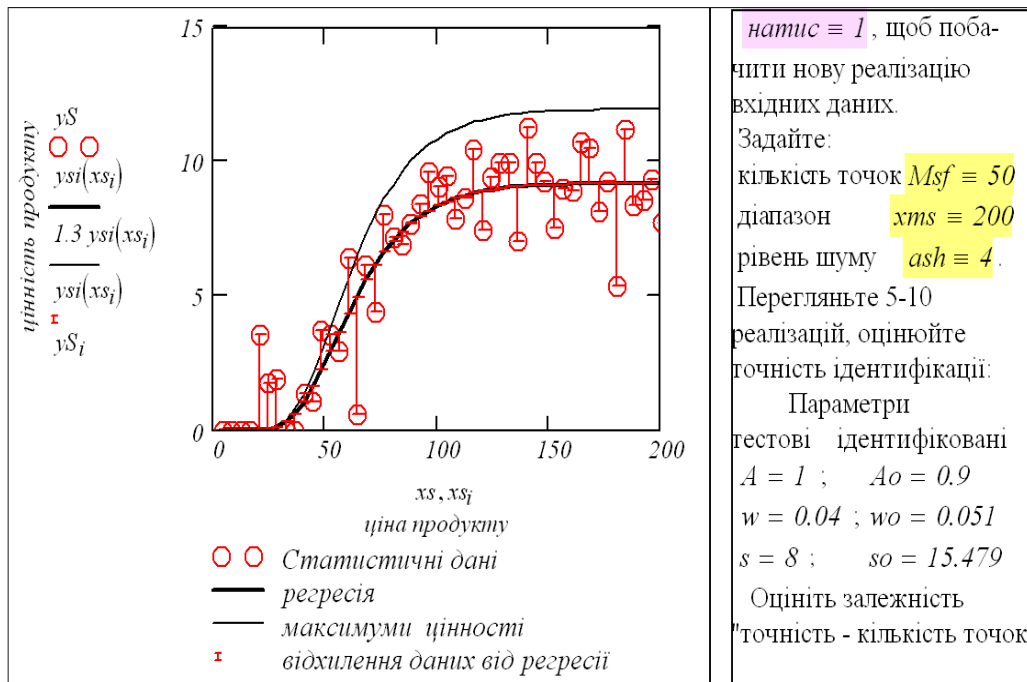


Рисунок 4.7 – Отримання моделі «лінійка продуктів»

Задаємо матрицю параметрів  $M_p$ , де кожний стовпець задає параметри моделі відповідного виробника. На рис. 4.8 подано структуру даних лінійки продуктів.

$$M_p := \begin{pmatrix} 130 & 100 & 80 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0.04 & 0.03 & 0.05 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \text{"амплітуда цінностей - цінність/ціна"} \\ w & \text{"частота - зростання цінності при рості ціни"} \\ s & \text{"увігнутість - ціновий поріг цінності"} \\ krk & \text{"крок зміни ціни"} \\ ash & \text{"амплітуда шуму (розкиду)"} \\ dsh & \text{"дисперсія шуму (нормальний розподіл)"} \\ zapoln & \text{"заповнення лінійки продуктів"} \end{pmatrix}$$

Рисунок 4.8 – Структура даних лінійки продуктів

Робимо функцію користувача  $LinP(V_p, K_k)$ , що генерує імітацію реальної лінійки для певного класу продуктів. Технологічна особливість програми в тому, що спочатку генерується вектор випадкових відхилень цінностей продуктів, а потім вже в циклі обчислюються значення цінностей для відповідних цін. Розроблений модуль бере матрицю параметрів  $M_p$ , а повертає матрицю лінійок продуктів  $Mlp$ . Обробка масивів підвищує ефективність модуля.

$$\begin{array}{l}
\text{LinP}(Vp, Kk) := \\
\left. \begin{array}{l}
Vypad \leftarrow Vp_1 \cdot Vp_5 \cdot \text{rnorm}(Kk, 0, Vp_6) \\
\text{for } i \in 1..Kk \\
\left[ \begin{array}{l}
cinnist_i \leftarrow \left[ Vp_1 \cdot \left( 1 - e^{-Vp_2 \cdot Vp_4 \cdot i} \right)^{Vp_3} + Vypad_i \right] \cdot (\text{rnd}(1) < Vp_7) \\
cinnist_i \leftarrow \max(cinnist_i, 0)
\end{array} \right. \\
cinnist
\end{array} \right\} \quad (4.9)
\end{array}$$

Зроблено ще одну функцію  $\text{LinPci}(LiPr, indCi)$  – перерахунку лінійки продуктів при змінах цін.

### 4.2.3 Розробка моделі вибору користувача на лінійці продуктів

Модуль вибору споживача є центральним в системі моделей і повністю новою розробкою – за відсутністю прототипів. Сьогодні успіх у споживачів будь-якого продукту суттєво залежить від структури і поведінки системи споживачів. Відібрано такі альтернативи.

Альтернатива 1. Будуємо двовимірну функцію розподілу імовірності вибору від ціни, цінності, рівня потреб та згортаємо ціну і цінність у відношення «цінність/ціна» – отримуємо залежність імовірності вибору активності користувача.

Альтернатива 2. Використовуючи нечітку логіку, будуємо функції належності для цілі – максимізації цінності/ціни і обмеження по доходу, згортаємо. Після аналізу і випробування на моделях «нульового наближення» вибираємо другу альтернативу. Згідно з технологіями застосування нечіткої логіки [33, 34, 53, 160, 206, 246, 339] створюємо і згортаємо функції належності. Функція належності цілі. Транслюємо словесний опис логіки «поріг–насичення» в математичну модель відношення «цінність/ціна»:

$$fnc(ci, A, w, s) := \frac{A}{ci} \cdot (1 - e^{-w \cdot ci})^s. \quad (4.10)$$

Функція належності ресурсного обмеження. Транслюємо висловлювання «чим дорожче – тим менша імовірність вибору» в модель

$$fnd(ci, dox, fuz) := 1 - \text{pnorm}(ci, Kcd \cdot dox, fuz), \quad (4.11)$$

де  $Kcd$  – коефіцієнт зв'язку між граничною, «справедливою» ціною і бюджетним обмеженням користувача. В першому наближенні вважаємо залежність лінійною. На рис. 4.9 подано приклад моделі вибору.



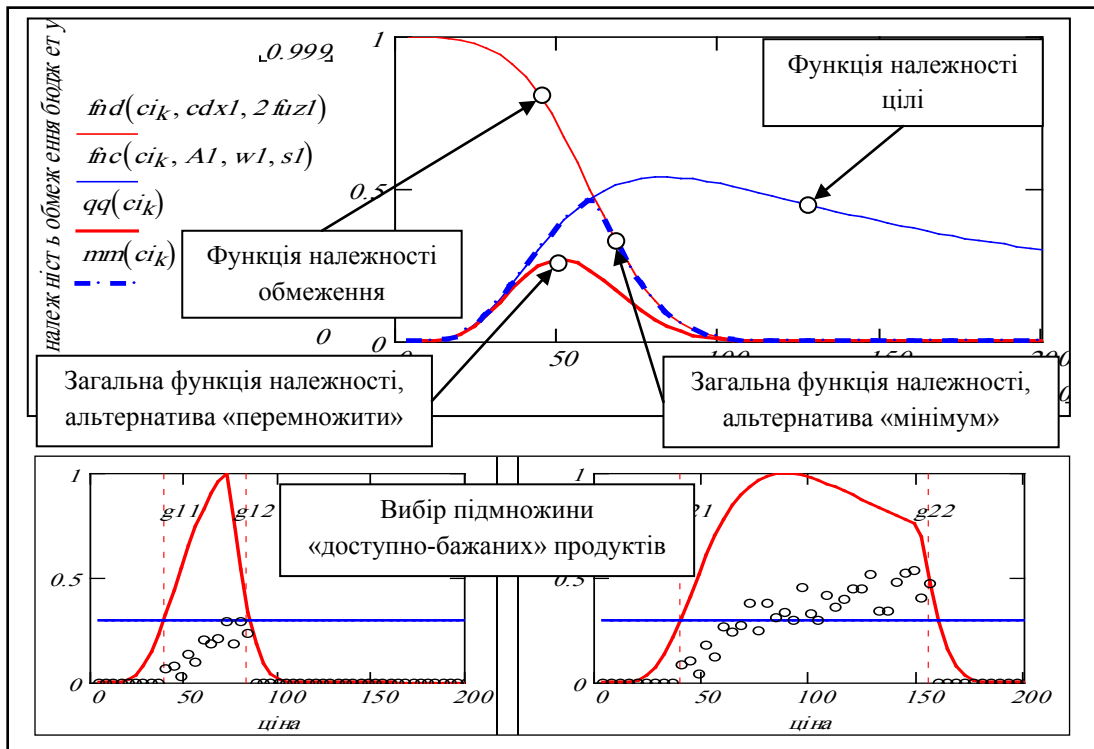


Рисунок 4.9 – Приклади функцій належностей цілей і функцій належностей обмежень

**Згортка функцій належності цілі і обмеження.** Згорнути функції належності цілі та обмежень в загальну функцію належності можна двома способами – перемножити значення функцій або брати мінімальне значення з двох значень для кожного значення ціни. Запишемо альтернативні функції.

$$\left. \begin{aligned} ZFNI(cin) &:= \min(fnd(cin, cdxl, fuzl), fnc(cin, Al, wl, sl)); \\ ZFNI(cin) &:= fnd(cin, cdxl, fuzl) \cdot fnc(cin, Al, wl, sl); \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

На рис. 4.10 подано результати згорток для цих двох альтернатив: «перемножити» і «мінімум», що дають приблизно однакові загальні функції належності

$$\left. \begin{aligned} qq(ce) &:= fnd(ce, cdxl, 2 fuzl) \cdot fnc(ce, Al, wl, sl); \\ mm(ce) &:= \min(fnd(ce, cdxl, 2 fuzl) \cdot fnc(ce, Al, wl, sl)); \end{aligned} \right\}$$

Запишемо загальну функцію належності в зручній для векторизації обчислень компактній формі. Вибираємо альтернативу «мінімум» для згортки. Параметри функцій збираємо у вектори параметрів.

$$pD = \begin{pmatrix} dox \\ fuz \\ Kcd \end{pmatrix}; pC = \begin{pmatrix} A \\ w \\ s \end{pmatrix}; zfn(ci, pD, pC) = \min(fnd(ci, pD), fnc(ci, pC)).$$

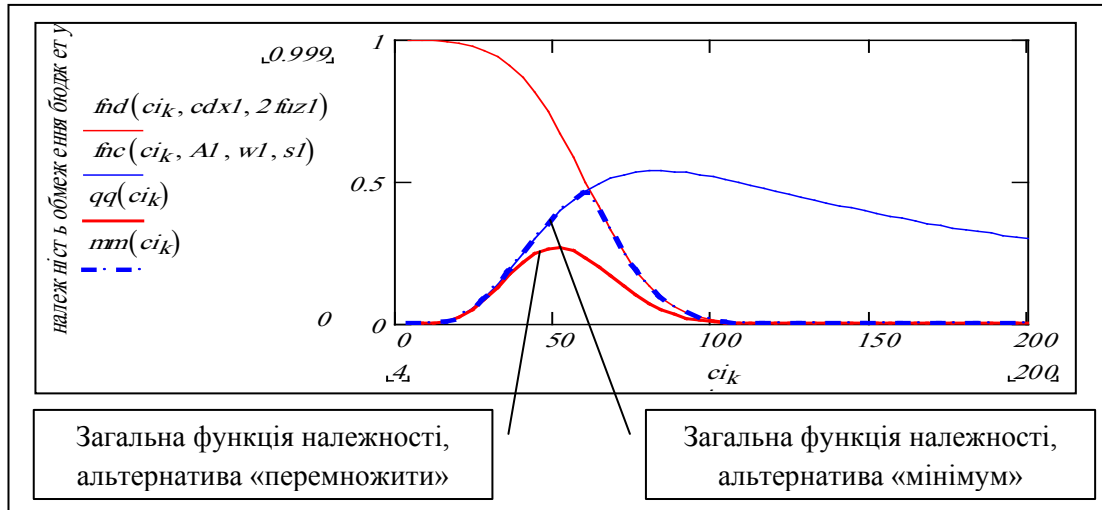


Рисунок 4.10 – Альтернативи загальної функції належності

Збираємо вектори параметри у матрицю  $pdC = stack(pD, pC)$ .

Перевизначимо відповідні функції належності

$$fnc(ce, pC) := \frac{pC_1}{ci} \cdot (1 - e^{-pC_2 \cdot ce})^{pC_3}; fnd(ce, pD) := 1 - pnorm(ce, pD_3 \cdot pD_1, pD_2);$$

$$zfn(ce, pD, pC) := \min \left[ (1 - pnorm(ce, pD_3 \cdot pD_1, pD_2)), \left[ \frac{pC_1}{ce} \cdot (1 - e^{-pC_2 \cdot ce})^{pC_3} \right] \right].$$

Вибираємо таку альтернативу загальній функції належності  $zfn(ce, pdc)$

$$zfn(ce, pdc) := \min \left[ (1 - pnorm(ce, pdc_3 \cdot pdc_1, pdc_2)), \left[ \frac{pdC_4}{ce} \cdot (1 - e^{-pdC_5 \cdot ce})^{pdC_6} \right] \right]. \quad (4.13)$$

Робимо модуль, що виділяє нечітку підмножину бажаних і припустимих продуктів. Для обчислень на множині елементів системи «для всіх виробників, продуктів, споживачів» застосовуємо векторизацію – це набагато прискорює обчислення і робить алгоритми безкомпромісно примітивними. Для цього всі об'єкти обчислень слід трансформувати у матриці і вектори. Це можна зробити по-різному. Подаємо виб-

ране рішення: робимо таку функцію користувача (нижче – розшифрування):

$$select(zfn, linpr, por) := linpr \cdot (zfn > por)$$

відібрати(ЗагальнаФункціяНалежнСпоживача, ЛінійкаПродуктів, Порог).

Для застосування векторизації усі вхідні змінні робимо масивами однакової розмірності

$$\begin{aligned} LiPr &:= linP(Mp^{(3)}, Kk); \quad zfn(ci_v, pdc1); \\ zfnV2_v &:= zfn(ci_v, pdc2); \\ porn(p, Nr) &:= \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..Nr \\ V_i \leftarrow p \\ V \end{array} \right. \end{aligned}$$

Створюємо «технологічні» вектори складені з порогу відбору:

$$\begin{aligned} por1 &:= 0.3; \quad por2 := 0.3; \quad Por1 := porn(por1, length(LiPr)); \\ Por2 &:= porn(por2, length(LiPr)). \end{aligned}$$

Для подальшого використання потрібні нормалізовані значення цінності відібраних продуктів (вони інтерпретуються як імовірності вибору), а всю попередню низку модулів пакуємо в один модуль:

$$\begin{aligned} linPfn(pdc, LiPr, por, Kk, hag) &:= \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..Kk \\ zfnV_k \leftarrow zfn(hag \cdot k, pdc) \\ zfnN \leftarrow \frac{zfnV}{\max(zfnV)} \\ LinPro \leftarrow LiPr \\ Por \leftarrow porn(por, length(LinPro)) \\ \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ psix \leftarrow selec(zfnN, LinPro, Por) \\ syma \leftarrow mean(psix) \cdot length(psix) \\ norm \leftarrow \frac{psix}{syma} \end{array} \right. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Будуємо приклади функцій виділення задовільних та бажаних підмножин продуктів (рис. 4.11).

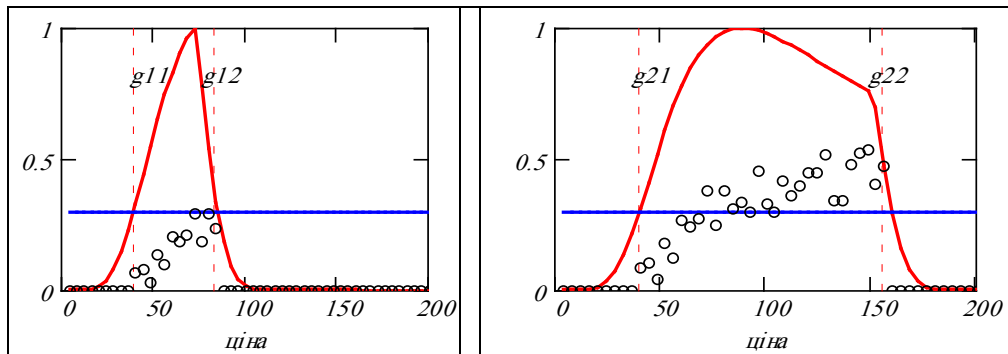


Рисунок 4.11 – Приклади функції виділення підмножини доступних продуктів

Побудували дворівневу модель вибору споживача: спочатку він вибирає підмножину припустимо бажаних марок продукту, а потім вибирає одну з них, за правилами, які будуть втілюватись у наступних модулях.

#### 4.2.4 Розробка моделі вибору і навчання користувача

Модуль «вибір користувача з навчанням» повинен імітувати процеси вибору споживачем певного з продуктів лінійки та зміни оцінки продукту за результатами споживання. Маємо такі альтернативи розподілу доходів: 1) на базі статистичних даних, на яких «закріплюється» (ідентифікується) простіша модель навчання, з часом оцінки продуктів наближуються до «істинних»; 2) пропорційно споживанню і спілкуванню з іншими користувачами та пошуку в засобах масової інформації.

Вибираємо альтернативу з якої, змінюючи параметри, можна отримати інші альтернативи. Вважаємо, що існує можливість об'єктивно оцінити цінність кожного продукту. В програму імітаційного моделювання можна ввести «істинні оцінки цінності». Отримання певного продукту певним користувачем викликає відповідну зміну «оцінки цінності». За результатами моделювання «оцінка цінності» коректується в сторону наближення до істинної. Джерелом зміни оцінки цінності є також «оцінка соціуму» – середня оцінка даної марки продукту на множині покупців, реалізована різноманітними засобами Інтернету.

В розділі 3 подано програмний модуль  $vp7(Mu)$  – вибору без навчання. Модифікуємо цей модуль включенням до нього модуля навчання. Наводимо зі скороченнями процес побудови модуля. Це приклад застосування методології і технології створення робочих моделей

до задачі, для якої в літературі не знайдено прототипів розробки. Для тестування беремо систему «3 користувачі, 3 продукти». Кінцевий результат – програма імітаційного моделювання, що має задовільну швидкодію ПК для систем порядку 1000 користувачів, 100 продуктів, 10 виробників. Задаємо вхідні дані:  $Mu$  – поточну матрицю нормованих оцінок товарів,  $Muis$  – вектор «істинних» оцінок продуктів,  $dMu$  – матрицю оцінок користувачами.

**Розробка модуля «переоцінка цінностей»**  $dmu(vyb, bolv, nvz)$ . Ставимо за мету зробити модуль максимально простим і обчислювально ефективним. Задаємо однаковий розкид поточного оцінювання для всіх продуктів і споживачів  $xilavka := 0.2$  і формуємо відповідну матрицю  $Nvz_{i,j} := xilavka$ . Задаємо матрицю «істинних цінностей» продуктів і матрицю поточного вибору

$$Nvz = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \quad Bolv := \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 & 0.75 \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix} \quad Vyb := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо скалярний вираз – алгоритм обробки вхідних даних

$$dmu(vyb, bolv, nvz) := \begin{array}{l} kys \leftarrow vyb \cdot nvz \\ qq \leftarrow vyb \cdot bolv + rnd(kys) - 0.5 \cdot kys \\ qq \end{array} \quad (4.15)$$

Векторизуємо функцію (4.15). І одразу тестуємо її (тепер видно, для чого усі вхідні дані подано матрицями однакової розмірності):

$$dMU := \xrightarrow{dmu(Vyb, Bolv, Nvz)} dMU = \begin{pmatrix} 0 & 0.665 & 0 \\ 0.117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.143 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

**Розробка моделі «корекція оцінок цінностей»**  $zmip(m, dm, \alpha)$ . Робимо дві версії модуля, розрахованого на векторизацію обчислень. Задаємо параметр «швидкість навчання»  $\alpha := 0.3$ .

$$zmip(m, dm) := (dm > 0) \cdot dm + \neg(dm > 0) \cdot m \quad (4.17)$$

$$zmip(m, dm, \alpha) := (dm > 0) \cdot [dm \cdot \alpha + m \cdot (1 - \alpha)] + \neg(dm > 0) \cdot m \quad (4.18)$$

Векторизуємо функції (4.17), (4.18) і тестуємо їх.

$$\overrightarrow{zmin}(Mu, dMU) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.665 & 0.1 \\ 0.117 & 0.33 & 0.3 \\ 0.1 & 0.34 & 0.143 \end{pmatrix}; dMU = \begin{pmatrix} 0 & 0.665 & 0 \\ 0.117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.143 \end{pmatrix}; \quad (4.19)$$

$$\overrightarrow{zminp}(Mu, dMU, \alpha) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.43 & 0.1 \\ 0.245 & 0.33 & 0.3 \\ 0.1 & 0.34 & 0.463 \end{pmatrix}; Mu = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.33 & 0.1 \\ 0.3 & 0.33 & 0.3 \\ 0.1 & 0.34 & 0.6 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Нагадаємо інтерпретацію елементів матриць – це імовірність вибору даного продукту даним користувачем. Ми нормуємо рейтинги продуктів для того, щоб використовувати їх як оцінки імовірностей вибору. Робимо модуль  $nrmlez(Mu, dMU, Al)$ , що враховує результати випробування і нормалізує нову матрицю рейтингів.

На рис. 4.12 подано разом текст модуля і результати його тестування. Це елемент задекларованої раціональної технології – коли змінюємо щось в тексті модуля – одразу бачимо результати роботи праворуч.

$nrmlek(Mu, dMU) :=$	$\begin{aligned} & \overrightarrow{M} \leftarrow zmin(Mu, dMU) \\ & kk \leftarrow cols(Mu) \\ & qq \leftarrow rows(Mu) \\ & \text{for } i \in 1..kk \\ & \quad \left  \begin{array}{l} nn \leftarrow qq \cdot mean(M^{i,i}) \\ M^{i,i} \leftarrow M^{i,i} \div nn \end{array} \right. \\ & M \end{aligned}$	$Mu = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.33 & 0.1 \\ 0.3 & 0.33 & 0.3 \\ 0.1 & 0.34 & 0.6 \end{pmatrix} \quad qq := rows(Mu)$ $nrmlek(Mu, dMU) = \begin{pmatrix} 0.73 & 0.5 & 0.18 \\ 0.14 & 0.25 & 0.55 \\ 0.12 & 0.25 & 0.26 \end{pmatrix}$ $qqmean(\overrightarrow{zmin}(Mu, dMU)) = 0.898$ $qqmean(nrmlek(Mu, dMU)) = 1$
----------------------	---	---

Рисунок 4.12 – Текст і тестування модуля нормалізації матриці оцінок продуктів користувачами

Робимо альтернативний модуль з додатковим параметром  $0 \leq Al \leq 1$  – темпом навчання. Він також враховує вплив результатів чергового вибору та випробування продуктів користувачами і нормалізує нову матрицю рейтингів.

$nrmli\dot{x}(Mu, dMU, A) :=$	$\begin{array}{l} \overrightarrow{M} \leftarrow \overrightarrow{zmin}(Mu, dMU, A) \\ kk \leftarrow cols(Mu) \\ qq \leftarrow rows(Mu) \\ \text{for } i \in 1..kk \\ \left  \begin{array}{l} nn \leftarrow qq \cdot mean(M^{<i>}) \\ M^{<i>} \leftarrow M^{<i>} \div nn \end{array} \right. \\ M \end{array}$	(4.21)
-------------------------------	--	--------

Зберемо тепер перевірені субмодулі в модулі, що інтегрують послідовні етапи обробки вхідних даних в один етап. Спочатку випробуємо ті конструкції, що можуть бути синтаксично коректними але не будуть виконуватись в даному середовищі.

$$\overrightarrow{zmin}(Mu, \overrightarrow{dmu}(Vyb, Bolv, Nvz)) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.765 & 0.1 \\ 0.164 & 0.33 & 0.3 \\ 0.1 & 0.34 & 0.096 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$\overrightarrow{zmin}(Mu, \overrightarrow{dmu}(Vyb, Bolv, Nvz), \alpha 1) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.33 & 0.1 \\ 0.3 & 0.33 & 0.3 \\ 0.1 & 0.34 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Будуємо на базі цього виразу третю версію  $nrmli\dot{x}2(Mu, Vyb, Bolv, Nvz, A)$  модуля, що бере матрицю поточного стану оцінок продуктів користувачами  $Mu$ , поточну матрицю вибору користувачів  $Vyb$  та параметри: «істинні оцінки продуктів»  $Bolv$ , невідзначеності оцінок продукту  $Nvz$  та темпи навчання користувачів  $A$ , а повертає матрицю наступного стану оцінок продуктів користувачами.

В програмному аспекті вирази (4.22), (4.23) еквівалентні чотирьом вкладеним циклам. В мікропроцесорних системах стрілка над виразом веде до розпаралелювання обчислень елементами обчислювальної системи. В математичному аспекті – це алгебризація і приведення складних алгоритмів обробки складних структур до квазіодновимірної форми. В розділі 2 розглянуто новий оператор оптимального агрегування [33, 56, 59, 60, 94, 103, 104, 212]. Оператор оптимального агрегування

дозволяє звести оптимізаційну задачу нелінійного програмування до алгебраїчної. Велика перевага методу – лінійне, замість експоненційного, зростання обсягу обчислень при зростанні розмірності задачі.

$nrmlz2(Mu, Vyb, Bolv, Nvz, Al) :=$	$  \begin{aligned}  & M \leftarrow \overrightarrow{zminp}(Mu, \overrightarrow{dmu}(Vyb, Bolv, Nvz), Al) \\  & kk \leftarrow cols(Mu) \\  & qq \leftarrow rows(Mu) \\  & \text{for } i \in 1..kk \\  & \quad \left  \begin{aligned}  & nn \leftarrow qq \cdot mean(M^{(i)}) \\  & M^{(i)} \leftarrow M^{(i)} \div nn  \end{aligned} \right. \\  & M  \end{aligned}  $	(4.24)
-------------------------------------	--	--------

Розробка програмних модулів, орієнтованих на використання векторизації, відкриває ще один корисний для теорії і практики моделювання напрям алгебризації математичних моделей динаміки розподілених систем: подаємо складний багатовимірний об'єкт (структуру даних) як «псевдо-одновимірний», робимо відповідний цій структурі оператор перетворення, і далі оперуємо з об'єктами, як з одновимірними.

#### 4.2.5 Розробка програми випадкового вибору користувача з навчанням

Доповнимо програму без навчання (розділ 3) розробленими модулями  $dmu(Vyb, Bolv, Nvz)$  та  $nrmlz2(Mu, dMU)$ , в склад якого входить модуль  $zmin(Mu, dMU)$ . Програма  $vp10(Vpa, Al)$  бере вектор параметрів, що складається з таких компонентів:

$$Vpa = \left( \begin{array}{l} "Mf - \text{матриця оцінок продуктів їжі споживачами}" \\ "Blv - \text{матриця "істинної" цінності і продуктів їжі}" \\ "Nvz - \text{матриця розкидів оцінок продуктів їжі споживачами}" \end{array} \right),$$

а повертає програма вектор, що складається з таких матриць:

$$Vxid = \left( \begin{array}{l} "Vyb - \text{матриця поточних виборів продуктів їжі споживачами}" \\ "Mf - \text{скоректована матриця оцінок продуктів їжі споживачами}" \\ "KolKur - \text{вектор темпів продажів продуктів їжі}" \end{array} \right).$$



Для імітаційного моделювання необхідно імітувати розподіл користувачів за доходами (бюджетними обмеженнями). Зробимо відповідний модуль. Вибираємо для модуля логнормальний розподіл: він починається з нуля, закінчується у нескінченості, як і доходи реальних індивідів чи організацій. Записуємо аналітичний вираз для щільності розподілу (рис. 4.13)

$$pl(x, \mu, \sigma) := \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2 \cdot \sigma^2} (\ln(x) - \mu)^2\right]. \quad (4.25)$$

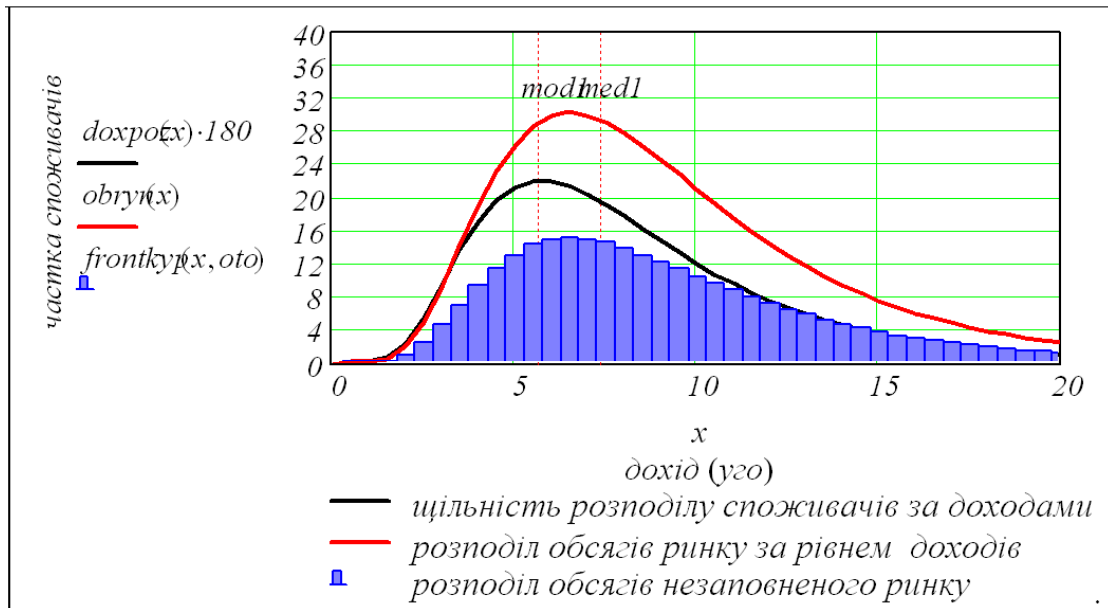


Рисунок 4.13 – Частотні розподіли користувачів – частки користувачів, сукупного ресурсу, незаповнених потреб

Розширимо модель розподілу доходів в соціумі для урахування ситуацій збільшення, зменшення перерозподілу доходів на множині користувачів. Модифікуємо модель доходів на базі простішої гіпотези (зсув розподілу)

$$doxpom(x, nd) := dlnorm(x - nd, \mu + 0.1nd, roz), \quad (4.26)$$

де  $x$  – рівень доходу;  $nd$  – параметр типу «національний дохід на одиницю».

#### 4.2.6 Розробка моделі системи «виробники, продукти, користувачі»

Робимо останній крок в створенні робочої моделі для нової задачі – будуємо «програмний сервіс» навколо модуля «вибір–навчання». На рис. 4.14 подано головну програму – робоча модель системи. Тестуємо програму. Нижче подано структуру виходу програми.

$$NxMxK \left[ \begin{pmatrix} \text{linpfrS} \\ \text{Mistic} \\ \text{Nvyzl} \end{pmatrix}, Al \right] = \begin{pmatrix} \{51,1\} \\ \{50,50\} \end{pmatrix} \quad BYby := NxMxK \left[ \begin{pmatrix} \text{linpfrS} \\ \text{Mistic} \\ \text{Nvyzl} \end{pmatrix}, Al \right]$$

$NxMxK(Vepr, Al) :=$ <pre> Mf1 ← Vepr2 Misc1 ← Vepr1 Nevy ← Vepr3 KolKur1 ← KypKyp for k ∈ 1..Tm     ByBy ← vp10 <math>\left[ \begin{pmatrix} Mf_k \\ Misc1 \\ Nevy \end{pmatrix}, Al \right]</math>     vybpok ← ByBy1     Mfk+1 ← ByBy2     KolKur<sup>(k)</sup> ← ByBy3     "qq"     vyx ← <math>\begin{pmatrix} Mf \\ KolKur \end{pmatrix}</math> </pre>	<p>Розпаковуємо вектор параметрів:  <i>Mf1</i> - стартові значення матриці оцінок продуктів користувачами  <i>Misc1</i> - матриця істинних оцінок продуктів  <i>Nevy</i> - матриця невизначеностей оцінок продуктів споживачами.          Цикл по кроках процесу розпаковуємо вихід підпрограми <i>vp10(Vepr, Al)</i>:  <i>vybpok</i> - матриця "вибір споживачів";  <i>Mfk+1</i> - наступне значення матриці оцінок продуктів;  <i>KolKur<sup>(k)</sup></i> - вектор темпів продаж продуктів;          Бачимо, що програма - просто цикл "по кроках моделювання", в якому виконується модуль <i>vp10</i>.</p>
--	--

Рисунок 4.14 – Головна програма – робоча модель системи

Головна програма записана в «традиційному» вигляді. Неважко записати її в «псевдоодновимірній формі»

$$Stan^{(k+1)} = dvp(Stan^{(k)}, dverp, Al) \quad (4.27)$$

Термін «псевдоодновимірна форма» введено для того, щоб підкреслити можливість для користувача оперувати з об'єктом моделювання, як з єдиним цілим. На рис. 4.15 подано приклади видачі програми.

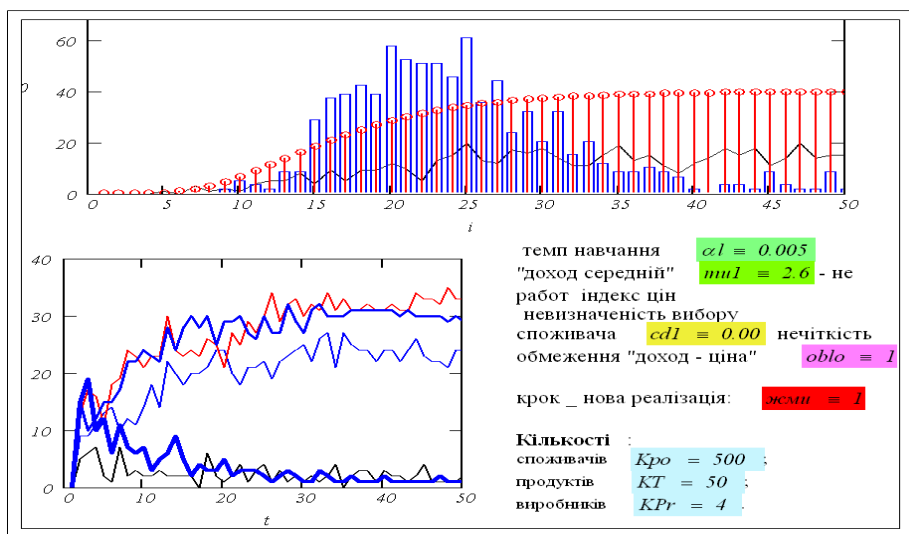


Рисунок 4.15 – Приклад результатів моделювання системи «виробники, продукти, користувачі»

Отримана програма виявилась генератором нових результатів відносно властивостей розподілених систем даного класу «виробники, продукти, користувачі».

### 4.3 Розробка імітаційної моделі для систем класу «виробники, продукти, агреговані користувачі»

В попередньому підрозділі подано побудову моделі «виробники, продукти, користувачі» і результати досліджень – властивості усталеного розподілу продаж (потреб) для збуреної і незбуреної лінійки продуктів. Крім звичайних проблем оптимізації, для них виникає проблема «локальної нестійкості лінійки продуктів». В цьому підрозділі робимо модель, орієнтовану на аналіз і синтез управління лінійкою продуктів. Пошук в літературних джерелах Інтернету за ключем «лінійка продуктів» дав більше одного мільйона посилань, пошук за ключем «математичні методи управління лінійкою продуктів» дав два десятки посилань, з яких тільки одне релевантне – оптимальне управління лінійкою з двох продуктів. Тобто тема управління розподіленим об'єктом – лінійкою продуктів – актуальна, але мало висвітлена в наукових публікаціях. Деталізуємо об'єктивні і суб'єктивні складові цінності певного класу продуктів. Суть проблеми в тому, що ноутбук, мобільний телефон мають не тільки об'єктивну складову корисності – надійність, пам'ять, швидкодію – але і суб'єктивну – престижність та ін. Зробимо модель нульового наближення, що відображує ці реалії, будуюмо графіки (рис. 4.16).

Функція корисності

$$K(x) = A_{kor} \cdot (1 - e^{-W_{kor} \cdot x})^{Skor}. \quad (4.28)$$

Функція престижності

$$P(x) = A_{pr} \cdot (x^{Spr} - C_m^{Spr}). \quad (4.29)$$

Функція цінності

$$Z(x, \alpha_{sam}) = K(x) \cdot \alpha_{sam} + P(x) \cdot (1 - \alpha_{sam}). \quad (4.30)$$

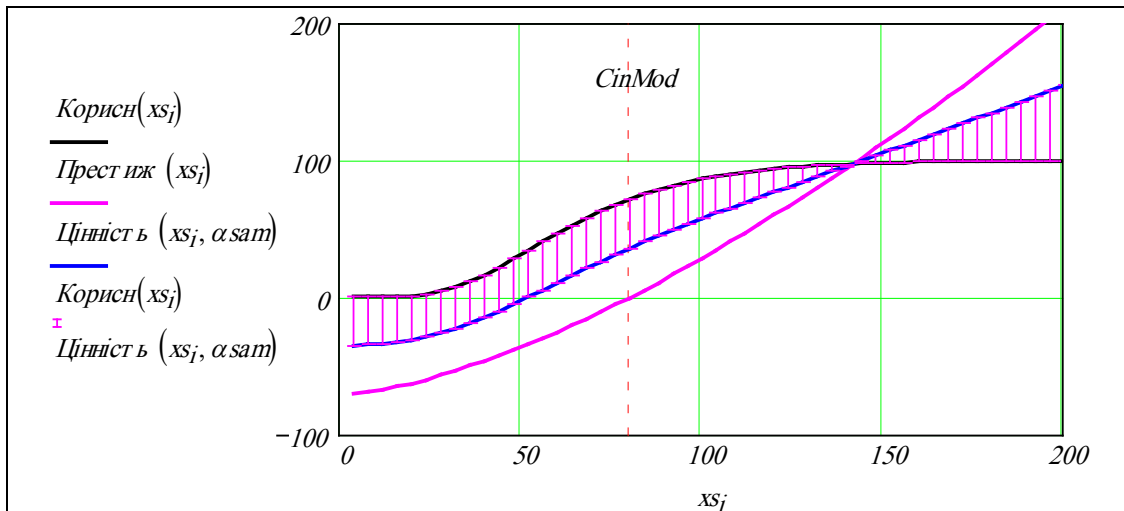


Рисунок 4.16 – Розширена модель лінійки продуктів –  
урахування суб’єктивної і об’єктивної складових цінності

На рис. 4.16 подано такі залежності: функція «корисність»  $K(x)$  – залежність «ціна–цінність» для користувача, що ігнорує складову «престижність» (значення параметра «незалежність від групових стандартів»  $\alpha_{sam} = 1$ ); функція «престиж»  $P(x)$  – залежність «ціна–цінність» для користувача, що орієнтується тільки на престижність (значення параметра «незалежність від групових стандартів»  $\alpha_{sam} = 0$ ); функція «цінність»  $Z(x)$  сформована для «середнього» індивіда ( $\alpha_{sam} = 0.5$ ). Тобто параметризували функцію «ціна–цінність» для відображення в моделях розподілених систем різних категорій користувачів.

Сьогодні проектування технічних систем починається і закінчується з аналізу і прогнозування функцій, наведених на рис. 4.16. Розглянемо в першому наближенні еволюцію функції «ціна–цінність» як характеристики розподіленої системи «лінійка продуктів». Для конкретного продукту з різних причин можуть змінюватись як ціна, так і цінність. Формуємо модель корисності, що дозволяє відображувати усталені зміни ціни і корисності як результат витрат виробників на технічний прогрес та інновації,

$$K(x, A_{kor}, W_{kor}, S_{kor}) = A_{kor} \cdot (1 - e^{-W_{kor} \cdot x})^{S_{kor}}.$$

Будуємо графіки залежностей (рис. 4.17) – контроль моделі.

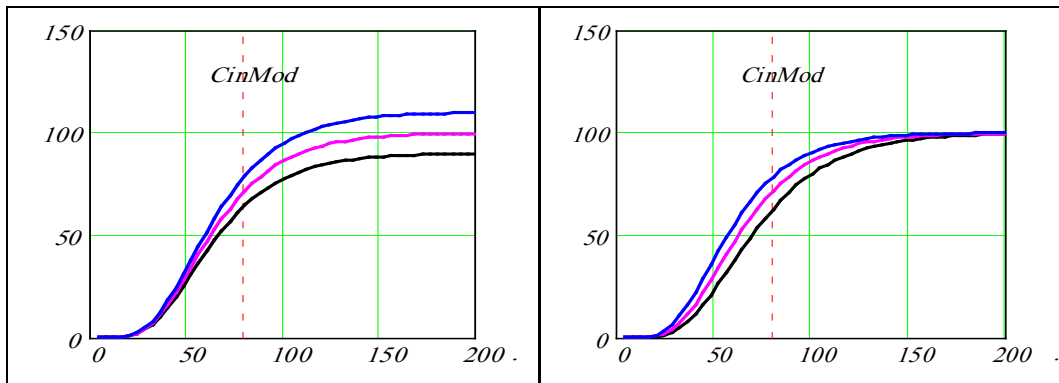


Рисунок 4.17 – Зміна корисності продуктів лінійки при незмінній вартості і зміна цін продуктів лінійки при незмінній корисності

### 4.3.1 Вибір концептуальної моделі динаміки лінійки продуктів

Маємо задачу розробки математичної моделі складної нелінійної нестационарної, нечіткої розподіленої системи, для якої не знайдено прямих прототипів. Як аналоги і джерела робочих модулів використовуємо моделі з розділів 2 і 3.

Розглянемо такі процеси, зв'язки, залежності, механізми: перетікання користувачів між сусідніми продуктами лінійки; управління продуктом: інформування і навчання користувача, «викладка» продукту, цінова стратегія, вдосконалення продукту – зміна цінності; управління власною лінійкою в середовищі лінійки всіх виробників.

В розділі 2 розроблено і досліджено агреговані моделі розвитку розподілених систем, в розділі 3 – моделі з імітацією поведінки окремих елементів. В цьому розділі змінюємо порядок розробки системи моделей «виробники–продукти–користувачі»: спочатку імітаційну модель розподіленої системи (підрозділ 4.2), потім – модель з агрегованими «користувачами». В результаті отримуємо дві взаємозв'язані і взаємодоповнюючі моделі. Використовуємо паралельно два взаємозв'язані підходу до розробки моделі:

1. В *імітаційній моделі* відтворюється поведінка кожного «елемента» розподіленої системи – «виробника», «продукту», «користувача». Терміни в лапках – тільки етикетки, що конкретизуються відповідно до специфіки задачі, – будівництво, Інтернет, автосервіс, біореакторні системи. До виробництва не тільки природно, але і необхідно віднести логістику та ритейл – обов'язкові елементи вертикально інтегрованих систем.

2. У агрегованій моделі відтворюється поведінка таких об'єктів, як «виробники», агрегована система «користувачі», «продукти лінійки». Між іншим, яскравим прикладом лінійки продуктів може бути упорядкована множина «підручники з моделювання». За рахунок детермінованих і імовірнісних взаємодій елементи утворюють цілісні об'єкти з стабільними і незвичними властивостями. Ці властивості формулюються в термінах деяких упорядкувань елементів, наприклад, рангових і частотних розподілів, одновимірних і багатовимірних. Розглянемо приклад (рис. 4.18).

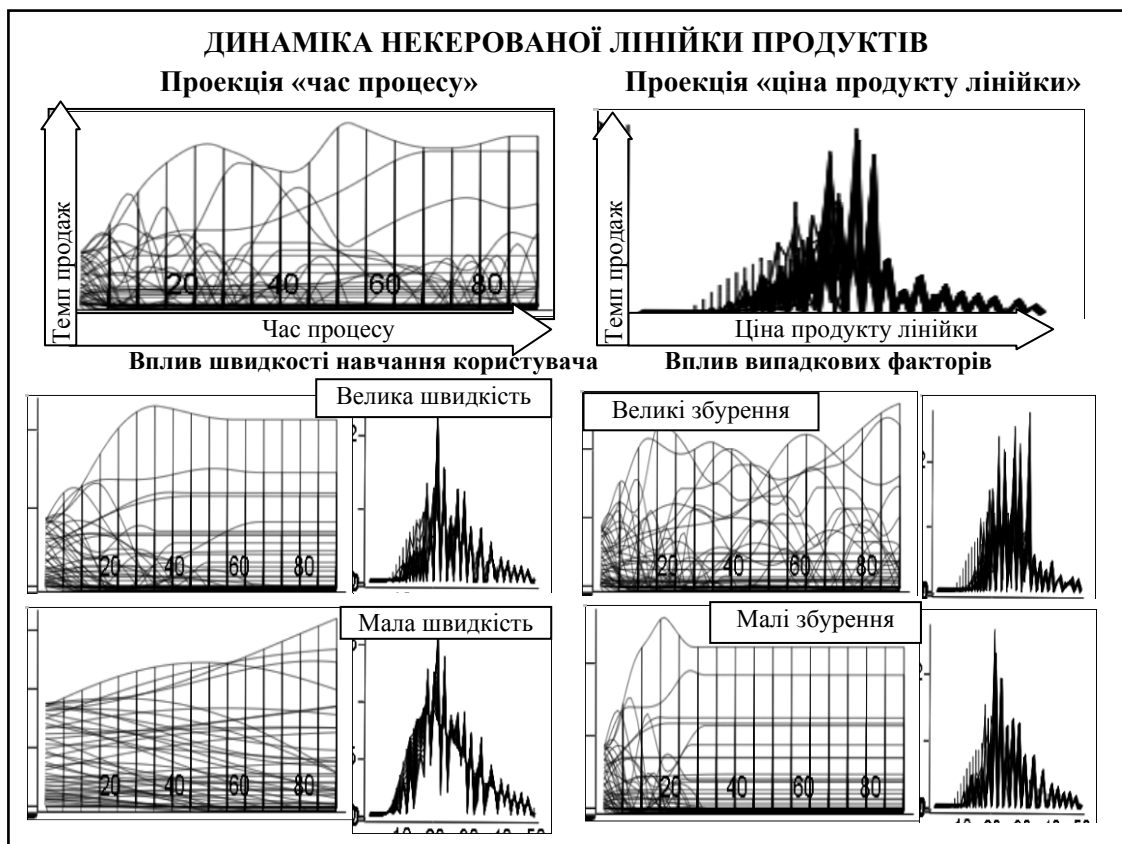


Рисунок 4.18 – Дві проекції агрегованої моделі динаміки лінійки продуктів

В одній проекції бачимо гладкі, майже лінійні процеси зміни темпів виробництва продуктів лінійки, друга проекція – процес зміни частотного розподілу продуктів лінійки за ціною. Можна назвати це «ерозія некерованої лінійки продуктів». На рис. 4.18 подано чотири обчислювальних експерименти – «вплив швидкості «навчання користувачів» та «вплив рівня випадкових збурень». В модель включені випадкові збурення лінійки і випадковість вибору користувачів.

Математичні моделі докомп'ютерної науки базуються на отриманні аналітичних результатів ціною жорстокої прокрустизації об'єкта моделювання і регулятора. Типова фраза з таких робіт: «якщо виконуються умови лінійності, випуклості, існування неперервних похідних, компактності, малого впливу ..., то система матиме єдиний екстремум і він буде усталеним станом...». Сьогодні існують можливості розробки математичних інструментів для роботи з такими «диморфними» об'єктами – в одній «проекції» – випуклими, гладкими, неперервними, в іншій – невивуклими, негладкими, розривними.

Природним чином аналогом методології створення робочих моделей виявилась методологія об'єктного програмування – об'єкти, методи об'єктів, конструктори, поліморфізм. Методологічним аналогом також виявився підхід на базі алгебризації моделей динамічних систем. Однак задача створення математичних моделей не може бути розв'язаною в рамках цих підходів. Вона більш невизначена порівняно з конструюванням програм на базі об'єктного підходу, а підхід на базі алгебризації теорії динамічних систем розроблено переважно для лінійних і лінеаризованих динамічних систем. Важливим інтеграційним компонентом запропонованої методології є «нові інформаційні технології». Це дуже широке поняття. Однак, в даній роботі цьому терміну відповідає така технологія створення нових моделей: декомпозиція задачі в підсистеми, що реалізуються «односторінковими» модулями. «Односторінкові» модулі будуються за принципами побудови випробувальних стендів для технічних систем – містять упорядковані зони введення і виведення, головну програму та сервісні програми. Така інтегрована інформаційна система дозволяє розробнику працювати в онлайн-режимі створення моделі. Розробник часто починає з декількох простіших моделей (нульове наближення), швидко реалізує і перевіряє свої моделі-знахідки, моделі-гіпотези, моделі-альтернативи. Тобто, працюючи (синтаксично коректна) модель стає генератором нових знань відносно задачі моделювання. Вже при налагодженні і контролі нових модулів (субмоделей) з'являються нові, «антиінтуїтивні» результати – не такі, що очікувались.

#### **4.3.2 Побудова агрегованої моделі динаміки лінійки продуктів**

Робимо базову робочу модель лінійки продуктів. Задаємо кількість видів продуктів  $колмп := 50$ ; масштаб цін  $\Delta p := 4$ ;  $сn_v := v \cdot \Delta p$ ; параме-

три функції: «амплітуда» (цінності)  $Ald := 10$ ; «частота» (нахил)  $wld := 0.04$ ; «увігнутість» (поріг цінності)  $sld := 8$ ; амплітуда «шуму»  $ashy = 0.03$ ; середнє  $mu := 0$ ; розкид  $sgm := 5.3$ .

Модель незбуреної лінійки

$$VP0_n := Ald \cdot (1 - e^{-wld \cdot n \cdot hag})^{sld}. \quad (4.31)$$

Модель збуреної лінійки

$$VP_n := Ald \cdot (1 - e^{-wld \cdot n \cdot hag})^{sld} + \frac{n \cdot ashy}{КОЛМН} \cdot rnorm(2, mu, sgm)_1 \cdot Jmi; VP_n := \max(VP_n, 0). \quad (4.32)$$

Припускаємо, що є потрібна інформація для сортування лінійки за цінністю і відношенням «цінність–ціна». Будуємо графіки (рис. 4.19).

$$VP_s := sort(VP); VPp_n := \frac{VP_n}{n}; VPp_s := sort(VPp); VPplg_n := (VP_n)^2 \div n.$$

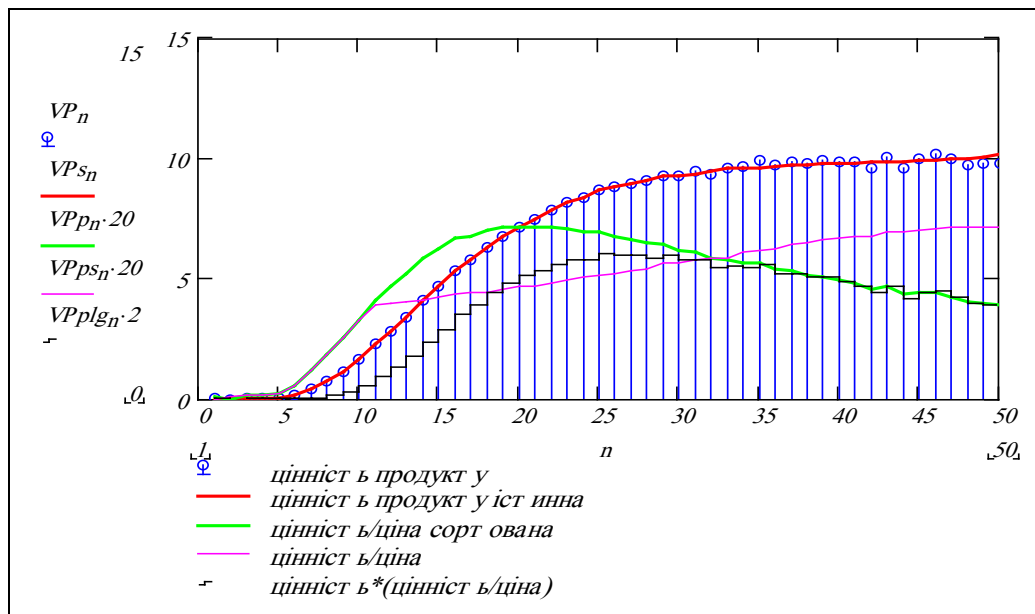


Рисунок 4.19 – Аналіз моделі лінійки продуктів

Цю просту модель слід модифікувати, враховуючи нерівномірність заповнення лінійки продуктами. Спираючись на функціональні базові субмоделі і результати їх тестування, виконаємо черговий крок конкретизації цілі даної роботи – побудови інтегрованої моделі системи «виробники–продуктова лінійка–користувачі». Вводимо змінні: «користувачі», «розподіл доходів» і «лінійка продуктів», «цінність–ціна», змінну (вектор) «розподіл темпів постачання». Мета – отримати



ефективний оператор, що відображає дві функції у функцію «розподіл темпів постачання продуктів лінійки»:

$$rtP(t) = Opo(VP(t), dDk(t)), \quad (4.33)$$

де  $rtP(t)$  – усталений частотний розподіл темпів постачання по цінах;  
 $VP(t)$  – цінності продуктів ранжовані по цінах = «ціна–цінність», лінійка;  
 $dDk(t)$  – частотний розподіл споживачів по доходах.

Реальні процеси встановлення темпів продажів інерційні. Припустимо існування  $rtPo$  – усталеного стану розподілу. Будуємо на цій основі модель глобальної динаміки лінійки. Усталений стан розподілу

$$rtPo = \lim_{t \rightarrow \infty} Opo(VP, dDk); \quad (4.34)$$

динаміка руху до усталеного стану – при відсутності збурень лінійки

$$rtP^{(t+1)} = rtP^{(t)} + Kg \cdot \left( \overrightarrow{(rtP^{(t)} - rtPo)} \right) \cdot \Delta t. \quad (4.35)$$

На рис. 4.20 подано перевірку на імітаційній моделі залежностей (4.34) та (4.35). У відповідних середовищах моделювання ця схема є виконуваною програмою моделювання в реальному часі (пакети Matlab, VisSim). В підсумку, складну імітаційну модель зведено до оператора, що перетворює входні розподіли, – ранговий і частотний, у вихідний розподіл. В імітаційній моделі відображено випадковість вибору користувачів.

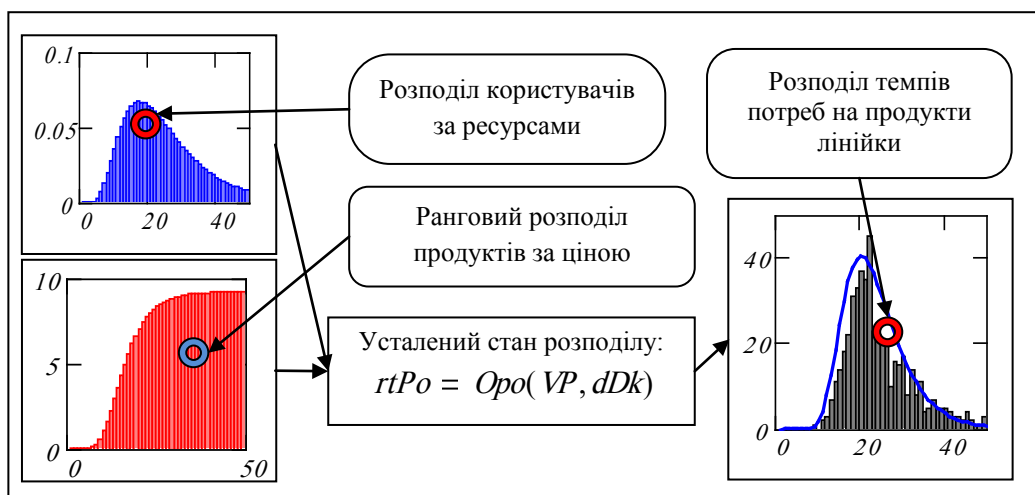


Рисунок 4.20 – Відображення входних розподілів в усталений стан розподілу темпів потреб

### 4.3.3 Розробка моделей локальної динаміки лінійки продуктів

Задаємо швидкість навчання  $\alpha_{oby} := 0.09$ . Робимо перше наближення:

– обмін з сусіднім продуктом зліва

$$\Delta levo = rtP_{k-1,t} \cdot (VP_k - VP_{k-1}) \cdot \alpha_{oby}; \quad (4.36)$$

– обмін з сусіднім продуктом справа

$$\Delta prav = rtP_{k+1,t} \cdot (VP_k - VP_{k+1}) \cdot \alpha_{oby}; \quad (4.37)$$

– результат обмінів

$$rtP_{k,t+1} = rtP_{k,t} + \Delta levo + \Delta prav. \quad (4.38)$$

Змістовне управління продуктом, власне лінійкою, реалізується через зміну ціни  $dp_k$  та зміну цінності через кількісні і якісні зміни продукту, що відбивається в обчисленні приросту цінності  $dVP_k$ .

Всі ці управління вимагають витрат, враховуємо це в моделі

$$zVP_k = fzvp1(dVP_k) + fzvp2(dVP_k) \cdot rtP_{k,t}, \quad (4.39)$$

де  $fzvp1(dVP_k)$  – функції постійних і  $fzvp2(dVP_k)$  – змінних витрат, що оцінюються за статистичними даними.

Синтез локального управління певним продуктом лінійки може виконуватись за такими альтернативними вимогами:

- максимізація очікуваного приросту темпу потреб на продукт;
- вихід продукту з «ями» між двома сусідніми домінуючими елементами хоч би у рівноважну або домінуючу позицію на лінійці.

Вводимо в модель імовірнісний і детермінований вибір споживача. На імовірнісний вибір можуть впливати і слабкі фактори, наприклад, розташування продукту (мала моторна техніка реалізується краще в придорожніх крамницях, якщо її виставити на узбіччі дороги). Для дрібних продуктів (електроприлади, комплектуючі) інтенсивність попиту залежить від «висоти, довжини полиці».

Детермінований вибір користувача змістовно означає, що споживач запам'ятовує після єдиної проби продукт, що йому сподобався чи не сподобався і потім «застрягає» на своєму виборі. Перехід на новий продукт вимагає інтенсивного впливу інформаційних джерел, яким користувач повністю довіряє.

Робимо модуль «локальний перерозподіл попиту», що бере період моделювання, функцію розподіл темпу постачання, функцію «лінійку продуктів», параметри процесу навчання користувачів і повертає процес перерозподілу темпів продажів протягом заданого періоду моделювання.

Беремо з підрозділу 4.2 модель розподілу користувачів з ресурсними обмеженнями. Приймаємо гіпотези про «справедливий розподіл цінності» при зростанні регіонального виробництва (для всіх груп доходи змінюються в одному напрямку) (рис. 4.21). Задаємо параметри

$$NN := 40; \quad x := 0.05..NN; \quad \mu := 2; \quad \text{roz} := 0.5; \\ \text{doxpom}(x, nd) := \text{dlnorm}(x - nd, \mu + 0.1nd, \text{roz}),$$

де  $x$  – рівень бюджетного обмеження;  $nd$  – параметр типу «регіональне виробництво на душу населення». Виробника і ритейлера цікавить не частота, а об'єм потреб в даному ціновому сегменті лінійки. Робимо функцію «сумарна потреба в продукті для категорії користувачів з бюджетним обмеженням  $x$  на одиницю вимірювання» (= щільність сумарних потреб в продукті):

$$\text{doxsum}(x, nd) := \text{doxpom}(x, nd) \cdot x.$$

Розставимо на рис. 4.21 «моди» – максимуми частоти рівня обмеження:  $\text{mod1} := 6$ ,  $\text{mod2} := 9$ .

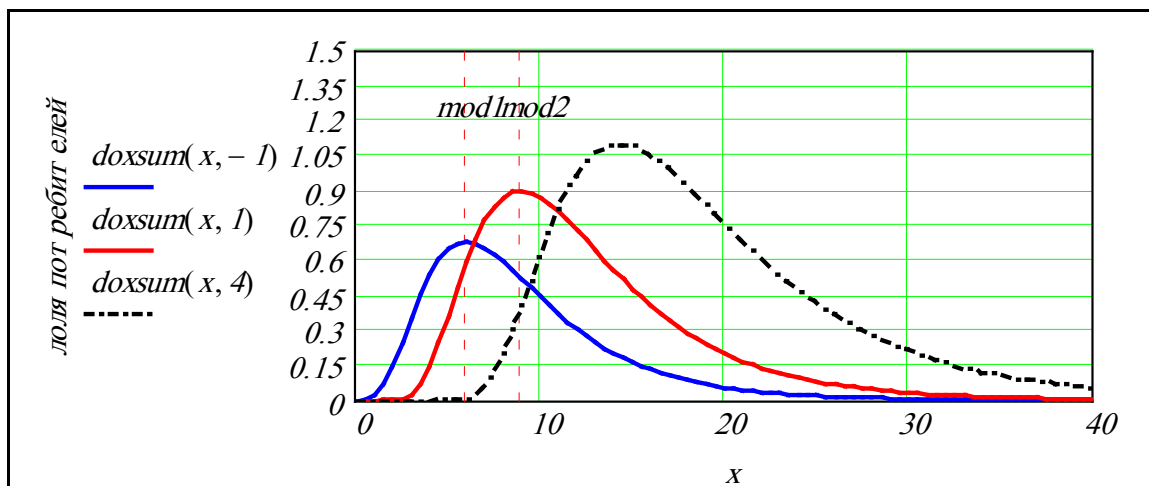


Рисунок 4.21 – Еволюція розподілу ресурсів користувачів при зміні ресурсного обмеження

Для заданого ресурсного обмеження кожен користувач, що діє раціонально, знайде точку рівноваги, з якої йому не вигідно переходити на більш чи менш цінні продукти. Цю задачу розглянули в 4.2 як задачу вибору користувача на дискретній лінійці продуктів і побудували модель вибору на базі нечіткої логіки. Тепер розглядаємо цю задачу з позицій виробника, що бажає оптимізувати лінійку, модельний ряд своїх продуктів, щоб охопити більше категорій користувачів.

Якщо розглядати всі продукти лінійки і всіх споживачів як цілісні об'єкти і відповідні детерміновані моделі, то можна припустити існування «рівноважної лінійки», на якій не перетікають користувачі до більш чи менш дорогих продуктів лінійки. Аналіз глобальних впливів не є об'єктом дослідження в даній роботі. В першому наближенні вважаємо лінійку глобально рівноважною, але збуреною локально. Змістовно, джерелом локальних збурень є дії окремих виробників.

Формалізуємо поняття локально збуреної лінійки:

$$\delta VP := (VP - VP_0). \quad (4.40)$$

На рис. 4.22 подано незбурену рівноважну лінійку і локально збурену рівноважну лінійку, рівноважний розподіл темпів постачання (проекція розподілу доходів) і, власне, збурення лінійки (графіки побудовані в різних масштабах).

$$rtPo_n := doxsum(0.5n,1).$$

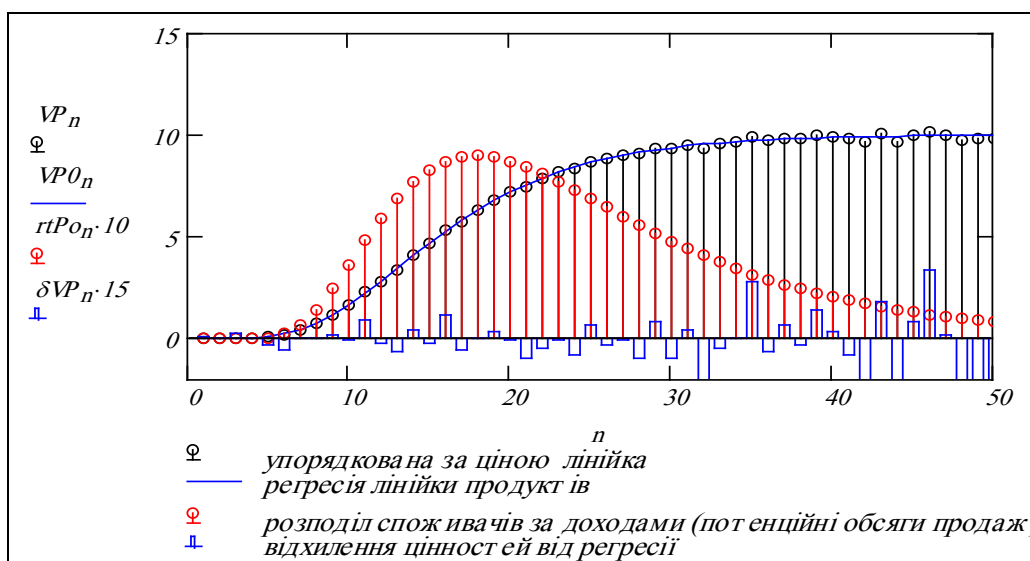


Рисунок 4.22 – Модель локально збуреної лінійки

Логічно припустити, що збурення лінійки викликать перетікання користувачів між ціновими сегментами, якщо користувачі ці збурення можуть безпосередньо вимірювати або оцінювати. На цьому припущенні з урахуванням реалій вимірювання цін і цінностей будемо з (4.35)–(4.38) модель динаміки (4.41).

Цей модуль відтворює динаміку перерозподілу темпів між кожними трьома сусідніми елементами на кожному кроці періоду моделювання при заданому значенні параметра «темپ навчання» (інформування) користувачів  $\alpha o b$

$Lok(rtPo, VP, \alpha ob) :=$	$  \begin{aligned}  &kolP \leftarrow length(VP) \\  &k2P \leftarrow length(rtPo) \\  &rtP^{(1)} \leftarrow rtPo \\  &for\ t \in 1..Tm \\  &\quad   \quad for\ k \in 2..kolP - 1 \\  &\quad \quad   \quad \begin{aligned}  &\Delta levo \leftarrow rtP_{k-1,t} (VP_k - VP_{k-1}) \cdot \alpha ob \\  &\Delta prav \leftarrow rtP_{k+1,t} (VP_k - VP_{k+1}) \cdot \alpha ob \\  &rtP_{k,t+1} \leftarrow rtP_{k,t} + (\Delta levo + \Delta prav) \\  &rtP_{k,t+1} \leftarrow max(rtP_{k,t+1}, 0)  \end{aligned} \\  &\quad \quad   \quad Obryn_t \leftarrow \sum_{q=1}^k rtP_{q,t} \\  & \quad \quad (rtP\ Obryn)  \end{aligned}  $	(4.41)
-------------------------------	--	--------

Робимо альтернативну версію програми моделювання перерозподілу потреб на основі припущення повної інформації користувачів про цінності продуктів. Такі припущення виправдані, якщо продукт споживається часто, цінність визначається легко, інформаційний обмін між користувачами – інтенсивний і ефективний. В процесі тестування моделі (4.41) не тільки підтверджено коректність функціонування моделі (порівнянням з імітаційною (4.27), див. рис. 4.15), але й отримано нові результати про властивості процесів в локально збуреній лінійці продуктів.

На рис. 4.23 подано два тривимірних графіки – перехідні процеси для кожного продукту лінійки. В залежності від ціни і цінності потреби в продуктах перерозподіляються згідно з моделлю динаміки (4.42).

На верхньому графіку подані процеси для великих збурень, на нижньому – для малих.

Без локального управління лінійка нестійка – користувачі переходять до більш ефективних продуктів. Швидкість таких процесів залежить від інтенсивності «навчання» користувачів.

$$\begin{array}{l}
 \text{Lok}(\text{rtPo}, \text{VP}, \alpha \text{ob}) := \\
 \quad \text{kolP} \leftarrow \text{length}(\text{VP}) \\
 \quad \text{k2P} \leftarrow \text{length}(\text{rtPo}) \\
 \quad \text{knorm}_1 \leftarrow 1 \\
 \quad \text{Obryno} \leftarrow \sum_{k=1}^{\text{k2P}} \text{rtPo}_k \\
 \quad \text{rtP}^{(1)} \leftarrow \text{rtPo} \\
 \quad \text{for } t \in 1.. \text{Tm} - 1 \\
 \quad \quad \text{for } k \in 2.. \text{kolP} - 1 \\
 \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{razn} \leftarrow |\delta \text{VP}_k - \delta \text{VP}_{k+1}| \\
 \text{yslo} \leftarrow \delta \text{VP}_k > \delta \text{VP}_{k+1} \\
 \text{otbery}_{k,t} \leftarrow \text{yslo} \cdot \text{razn} \cdot \text{rtP}_{k+1,t} \\
 \text{zabery}_{k,t} \leftarrow \neg \text{yslo} \cdot \text{razn} \cdot \text{rtP}_{k,t} \\
 \text{obmen} \leftarrow (\text{otbery}_{k,t} - \text{zabery}_{k,t}) \cdot \alpha \text{ob} \\
 \text{rtP}_{k,t+1} \leftarrow \max[(\text{rtP}_{k,t} + \text{obmen}), 0] \\
 \text{rtP}_{k+1,t+1} \leftarrow \max(\text{rtP}_{k+1,t} - \text{obmen}, 0)
 \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad \text{Obryn}_t \leftarrow \sum_{q=1}^{\text{k2P}} \text{rtP}_{q,t} \\
 \quad \quad \quad \text{knorm}_t \leftarrow \text{Obryno} \div \max(\text{Obryn}_t, 0.7) \\
 \quad \quad \quad \text{rtP}^{(t)} \leftarrow \overrightarrow{(\text{rtP}^{(1)} \cdot \text{knorm}_t)} \\
 \quad \quad \quad (\text{rtP } \text{knorm } \text{otbery } \text{zaberyt})
 \end{array} \tag{4.42}$$

На рис. 4.24 подано процеси на протязі довгого періоду, при незмінних ціні й цінності кожного продукту лінійки. Загальні тенденції процесів – зникнення неефективних продуктів і відповідне зростання потреб у продуктах – лідерах в певних діапазонах цінності. Потім виникають лідери другого порядку, до яких переходять потреби від продуктів оточення.

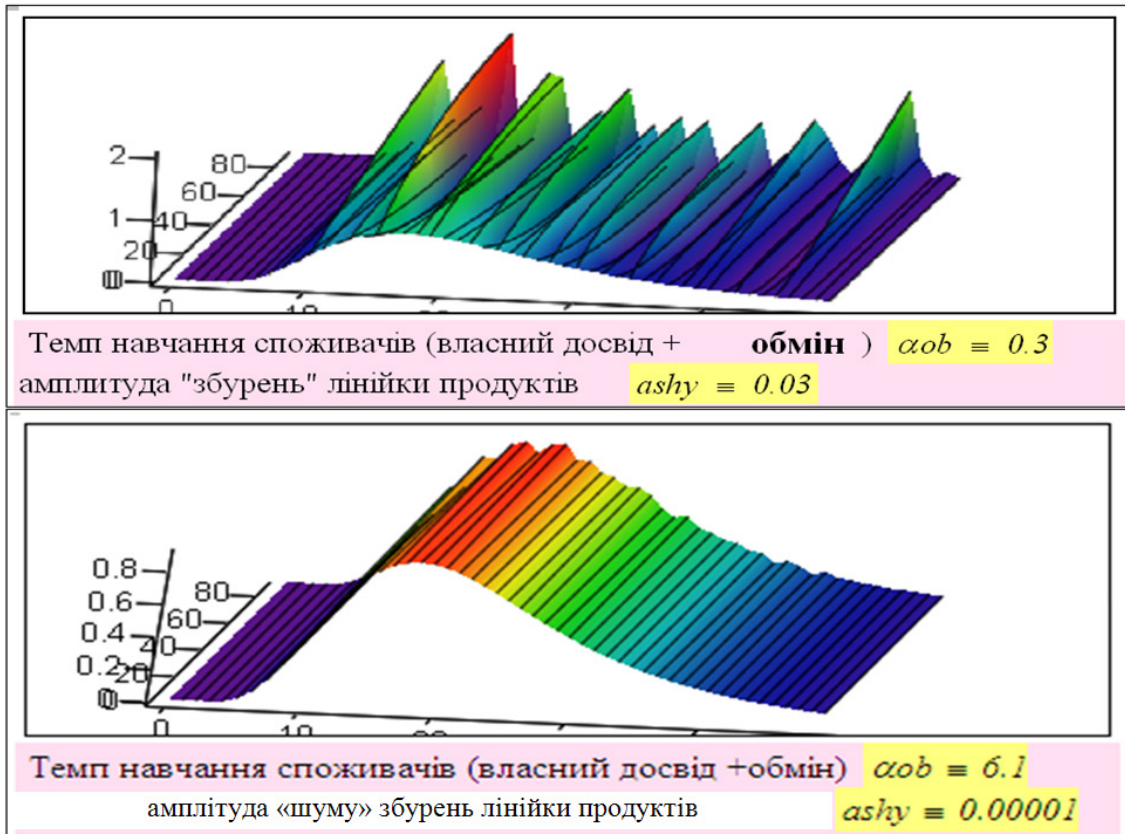


Рисунок 4.23 – Перехідні процеси для лінійки при великих і малих збуреннях

На рис. 4.24 подано приклад процесів, коли залишається менше половини продуктів і система приходить в усталений стан: інтервали «ціна–цінність» збільшуються так, що навколо кожного продукту лінійки виникає стійкий кластер користувачів. В цілому на моделі проведено ряд досліджень [109, 110, 114, 115, 121, 122, 129]. Однак вичерпне дослідження об'єкта – тема для окремої роботи.

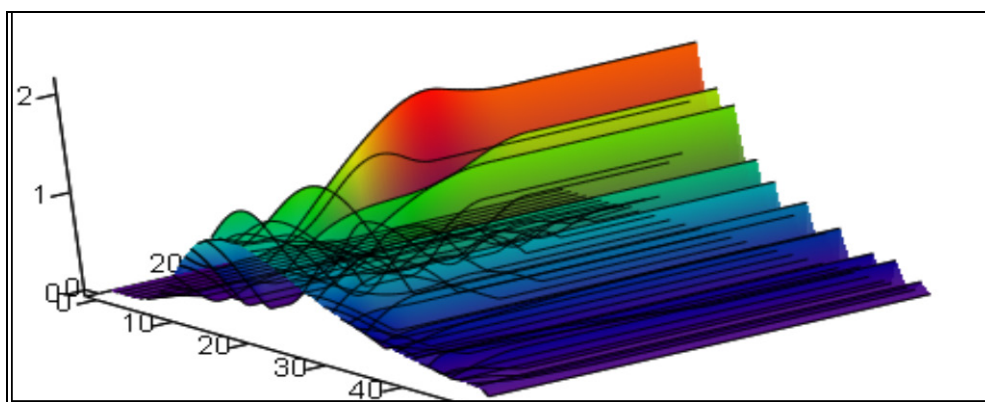


Рисунок 4.24 – Перехідні процеси для збуреної лінійки – усталені стани

В рамках даної роботи це приклад результативного створення нової моделі для складного розподіленого об'єкта.

Тепер можемо виконати наступний крок розробки – фактично нову ітерацію в процесі розробки моделі за повною схемою: «конкретизована словесна модель–графічна модель–уточнені функціональні суб-моделі–модифікована модель динаміки керованої лінійки». Тепер можемо більш чітко і більш наближено до практичної реалізації поставити задачу управління складним розподіленим об'єктом «лінійка продуктів». На рис. 4.25 подано узагальнену матрично-векторну схему розподіленої системи управління лінійкою продуктів.

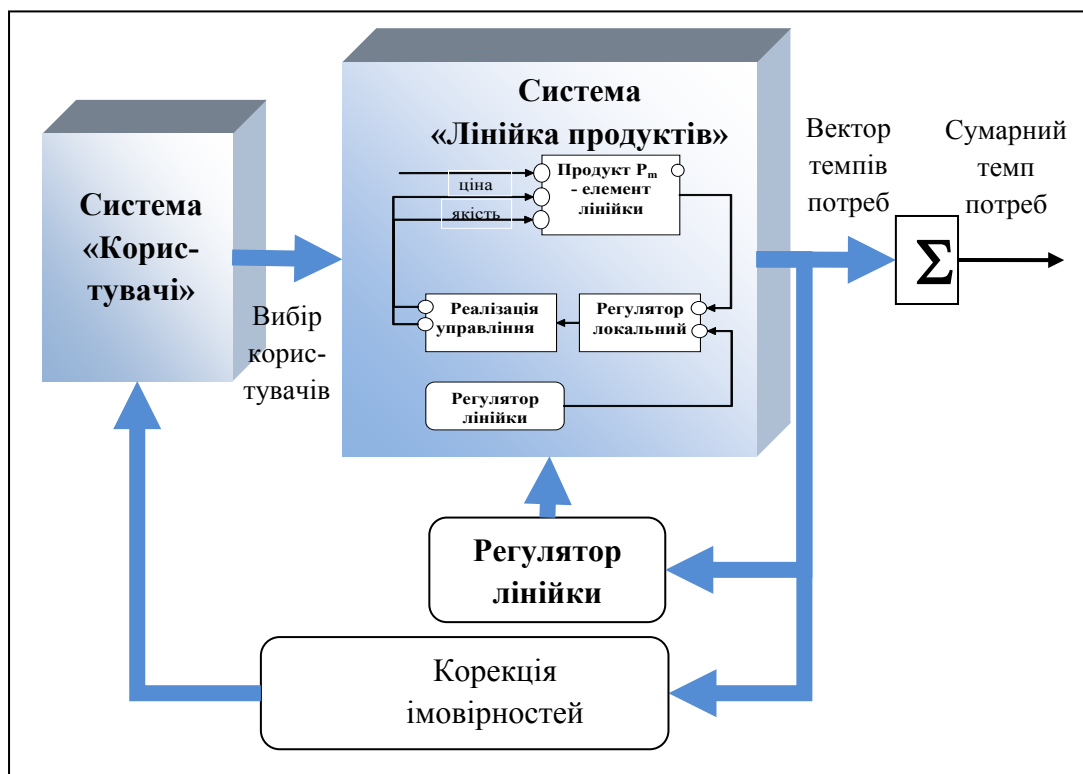


Рисунок 4.25 – Узагальнена матрично-векторна схема системи управління лінійкою продуктів

Класичні здобутки методів оптимізації, моделювання, статистики і ризикології непридатні для побудови ефективних моделей цього класу. Проведено вичерпне дослідження альтернативних моделей. На рис. 4.26 подано результати моделювання за альтернативними моделями.



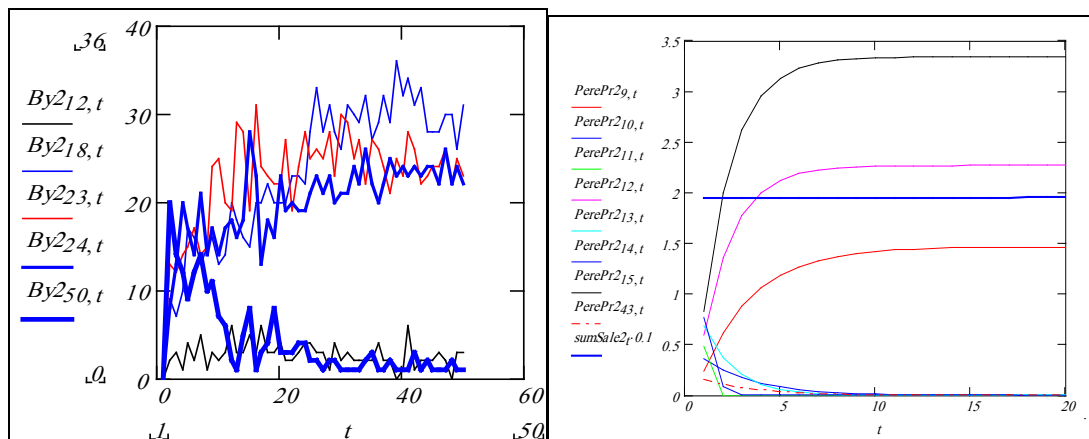


Рисунок 4.26 – Перехідні процеси для темпів потреб на окремі продукти лінійки, побудовані за альтернативними моделями системи «виробники, продукти, користувачі»

Якщо перейдемо від розгляду динаміки окремих елементів до цілісних систем «користувачі» і «продукти», то теж зможемо отримати оператор перетворення вхідних розподілів для користувачів і продуктів в стани розподілу темпів потреб на продукти лінійки.

Тепер, коли зібрали та розробили системи моделей для технічних систем різних класів (розділи 2–4), можемо виконати конструктивне узагальнення процесів розробки робочих моделей. Перша задача для узагальнення – зв'язок процедур декомпозиції певної моделі в субмоделі і композиції часткових моделей в модель цілісного об'єкта.

#### 4.4 Декомпозиційні структури. Узагальнення і класифікація імітаційних моделей розподілених систем

Узагальнимо результати побудови систем моделей в підрозділах 4.2–4.3 розробка імітаційної моделі для систем класу «виробники, продукти, агреговані користувачі». В зв'язку з швидкими змінами виробів, технологій, потреб побудова моделей від статистики та апроксимацій стала фактично неможливою. В роботі вибрано альтернативний шлях – побудова моделі на базі виявлених законів і «механізмів», подібних тим, що є в механіці або електродинаміці. Це просто необхідно для розробки задовільних математичних моделей для прогнозування і оптимального управління виробничими системами. Статистичні дані залучаються на етапах верифікації і модифікації моделей.

Напрацьовані в розділах 2–4 моделі можуть бути основою класифікаційної структури типу «морфологічний ящик». Алгоритм вирішення проблеми за допомогою методу морфологічного ящика [350] є таким:

- гранично точно сформулювати проблему;
- виявити і охарактеризувати всі параметри можливих рішень (визначити класифікаційні ознаки і їх значення);
- сконструювати морфологічний ящик з множиною вирішень проблеми, оформивши його у вигляді морфологічної таблиці або іншим способом;
- проаналізувати рішення, що містяться в морфологічному ящику з погляду поставлених цілей (цільовій функції);
- вибрати і реалізувати оптимальні рішення.

В цій канонічній послідовності змінюємо останній пункт: зберігаємо і упорядковуємо всі моделі розподілених систем. Сучасні програмні засоби дозволяють розробнику і користувачу зосередитися на пошуку «проектних рішень» стосовно моделей. У цих умовах вдала базова модель стає генератором знань для удосконалення цієї ж моделі.

Об'єднуємо в класифікаційну схему розроблені математичні моделі розподілених систем «виробники, продукти, користувачі». На рис. 4.27 подано схему системи моделей, що будується згідно з виділеними класами і підкласами моделей.

Сформулюємо, проблему згідно з вимогами морфологічного аналізу: розробка нових математичних моделей для нових задач, призначених для прогнозування і планування розвитку при кінцевих витратах часу.

Виявимо параметри можливих рішень: розподілені системи, що досліджуються в даній роботі складаються з елементів таких класів: «виробники», «продукти», «лінійки продуктів», «користувачі». Моделі елементів цих класів можуть бути в різних рівнях агрегування і спрощення. Шкала агрегування: від подання моделі системи елементів певного класу параметром – константою, до імітаційної моделі, де відтворюється поведінка кожного елемента даного класу.

Схема системи моделей на рис. 4.27 фактично утворює морфологічний ящик. В іменах для моделей схеми використані такі означення:  $N$  – число виробничих елементів;  $M$  – число продуктів;  $K$  – число споживачів;  $L$  – число лінійок продуктів;  $L_m$  – число продуктів в складі лінійки певного класу;  $n_1, m_1, k_1$  – відповідні агреговані моделі (один агрегований виробник, один агрегований продукт, один агрегований користувач).

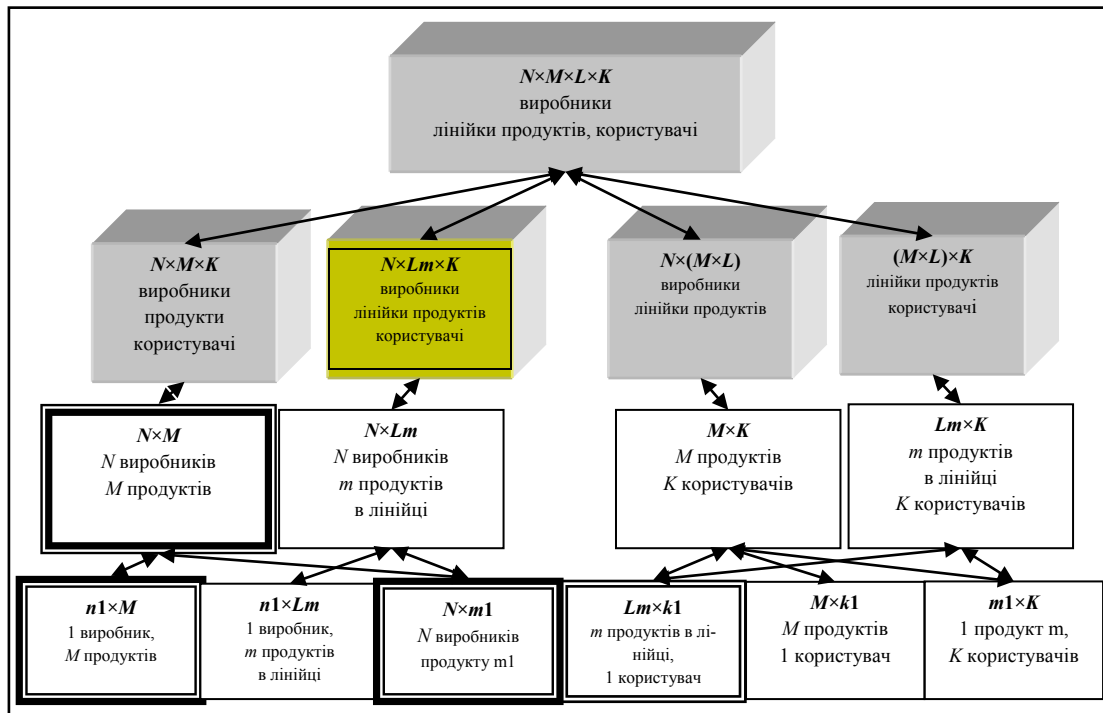


Рисунок 4.27 – Класифікація імітаційних моделей розподілених систем

Подвійними рамками на рис. 4.27 виділені вже розроблені моделі, об'ємними блоками виділені підсистеми моделей, що містять структурні, функціональні і редукційні субмоделі. Тонкими лініями позначені ще не розроблені моделі. Обґрунтування вибраної схеми класифікації: проблемний ящик містить не тільки реалізовані, вже створені матеріальні чи інформаційні елементи, але й такі, що не створені на рівні робочих моделей або матеріальних зразків. Це вирішальний фактор для роботи над моделями інноваційного розвитку виробничих систем.

Роботу виконано для створення робочих моделей розподілених систем високої розмірності, що реалізуються як програми для ЦОМ. Важливим фактором практичної цінності робочих моделей є час обчислень, витрати обчислювальних ресурсів. Тому в означеннях моделі відображується розмірність моделі. В класифікаційній схемі на рис. 4.28 моделі впорядковані саме по розмірності об'єктів обробки. Позначення типу « $N \times M \times K$ » – це не математичні вирази чи слова природних мов, а просто імена моделей і програм – зручні для користувача й утворені за стандартами мов програмування (є певна подібність введеної системи  $NMK$ -системам лінійних рівнянь введених Гауссом).



Рисунок 4.28 – Схема зміни станів метамоделі розподіленої виробничої системи

В підрозділі 4.1 подано абстрактне визначення стану метамоделі, тепер побудовано деталізовану інтерпретацію цього стану для випадку розробки математичних моделей розподілених систем класу «виробники, продукти, користувачі». За результатами дослідження NМК-моделей розподілених виробничих систем отримано нові наукові результати. Вперше запропоновано, реалізовано і досліджено концепцію метамоделі – математичної моделі спільного розвитку системи «нова виробнича система та імітаційна модель цієї системи», що відрізняється від існуючих підходів і методів формуванням імітаційної моделі на базі тривірневої декомпозиції (результат № 6); двостороннім інформаційним обміном «об’єкт–модель»; урахуванням дуальності цільового призначення моделі виробничої системи як відображення суттєвих властивостей об’єкта, як еталона об’єкта і засобу отримання знань та досвіду для управління функціонуванням і розвитком об’єкта. Запропонована метамодель в загально-теоретичному аспекті є розши-

ренням концепції спостерігача стану на систему з двох нелінійних і нестационарних об'єктів, що дає можливість для переходу від евристичних методів розробки моделей до ефективних формалізованих процедур.

Відмінність від аналогів – відомі тільки концептуальні моделі (Е. Янч), загальнотеоретичні моделі (М. Пешель), невідомі метамоделі класу «цілеспрямована» еволюція системи моделей, побудованої на базі 3D-декомпозиції. *Актуальність* – «орієнтований на моделювання інжиніринг» потребує потоку нових моделей для нових задач. Метамодель – засіб організації цього потоку. *Суть результату* (рис. 4.29) – комплекс математичних засобів і методів для дослідження, прогнозування і планування потоку нових моделей. Моделі – інформаційний продукт класу «знання».

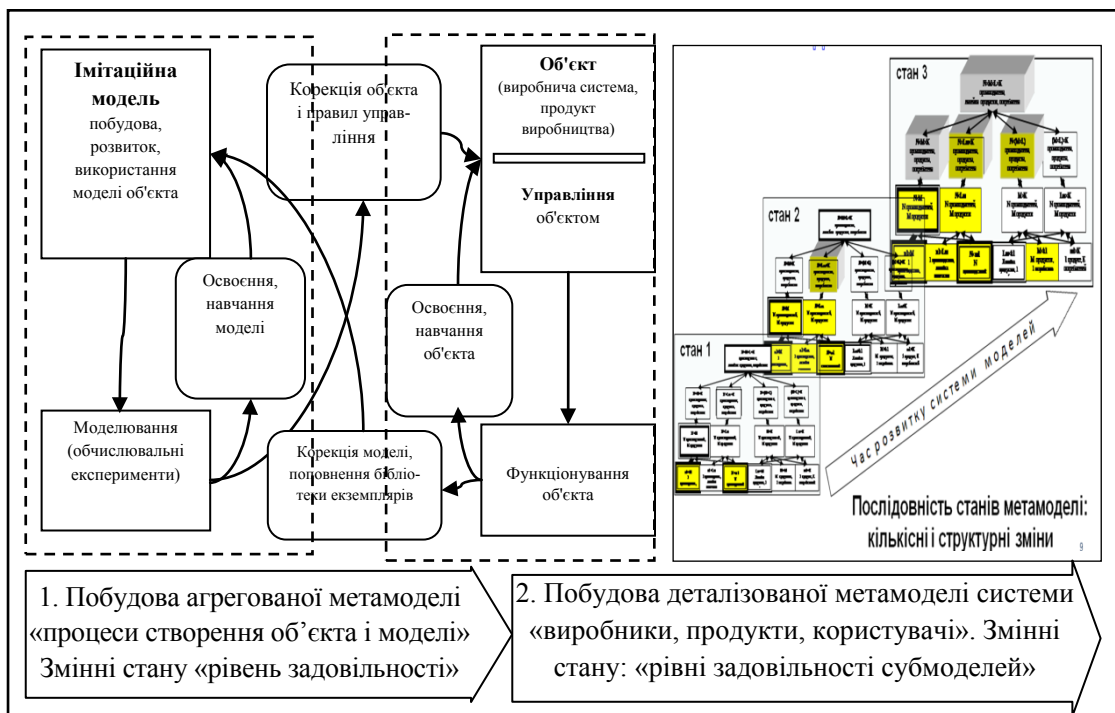


Рисунок 4.29 – Зміст наукового результату

Новий науковий результат. Вперше запропоновано, реалізовано і досліджено систему імітаційних моделей «виробники, продукти, користувачі», де може бути відтворена поведінка (динаміка) кожного елемента кожного з класів «виробники», «продукти виробництва»,

«користувачі», що відрізняється від існуючих аналогів, тим, що систему складають моделі «виробники», «продукти», «користувачі» з різними рівнями агрегування, різними методами локального управління і різними рівнями спрощення. Альтернативні моделі є сумісними за вхідними і вихідними змінними, що дає можливість порівнювати результати моделювання за альтернативними моделями.

Відмінність від аналогів – відомі тільки часткові моделі «виробництво», «ритейл», «постачання», невідома повна імітаційна модель. *Актуальність* – сучасні виробничі системи вертикально інтегровані, в тому числі і користувачі (prosumers – споживач-виробник); має місце дефіцит моделей для досліджень і вбудовування в АСУ в якості предикторів, ідентифікаторів. *Суть результату* (рис. 4.30) – для комплексу нечітких, невизначених задач створено упорядковану, відкриту для змін обчислювально ефективну систему моделей оптимального розвитку.

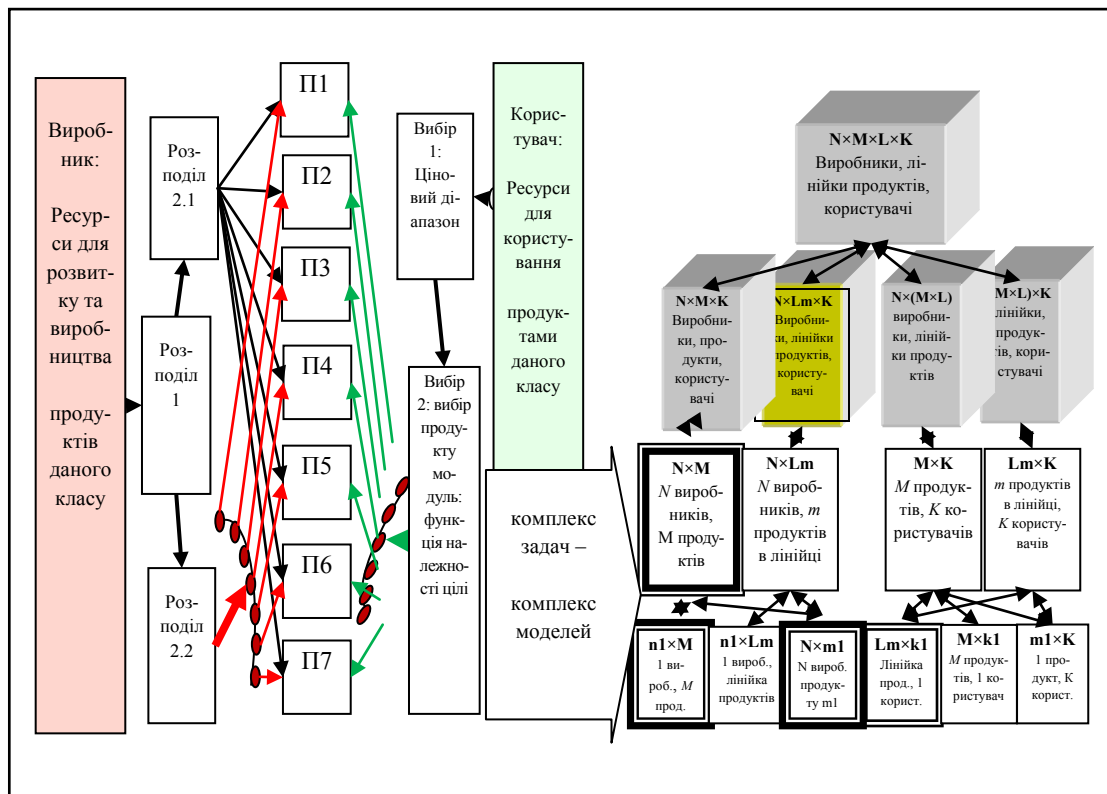


Рисунок 4.30 – Зміст наукового результату

## Висновки до розділу 4

Виконані в розділі дослідження є наступним кроком у вибраному напрямку створення нових математичних моделей процесів розвитку виробничих систем, які ще тільки створюються. Зміст цього кроку – побудова моделей процесу створення моделей процесів розвитку. Перехід на рівень метамodelей ускладнює перевірку коректності і конструктивності теоретичних результатів через інтерпретації загальнотеоретичних висновків. Потрібно побудувати робочу метамodelь на рівні імітації процесів побудови моделі процесу розвитку, а потім побудувати інтерпретацію загальнотеоретичної схеми створення математичної моделі процесу розвитку певної технічної задачі.

Зміст розділу відповідає цій дворівневій інтерпретації теоретичних результатів. Спочатку побудовано і досліджено метамodelь, а потім подано розгорнутий приклад створення системи узагальненої моделі процесу розвитку системи «виробники, продукти, користувачі». Розроблено дві моделі розподіленої системи, які є прикладом зміни стану метамodelі. В першій моделі відтворюється динаміка стану кожного елемента системи – «виробника», «продукту», користувача». В другій моделі множина користувачів замінена (агрегована) частотним розподілом користувачів. Завдяки можливості порівнювати результати моделювання, отримані на цих моделях, підвищується достовірність моделі розподіленої виробничої системи.

Орієнтація на оперативне створення нових моделей для нових актуальних задач приводить до необхідності формалізації, аналізу і оптимізації процесів створення систем моделей – створення моделей процесів розробки – метамodelей. Природно будувати метамodelі на базі раціональних технологій і декомпозиційних структур. Досліджені і обґрунтовані концепції структури моделей розподілених систем на базі структурної, функціональної і редукаційної декомпозицій моделі складної системи. В результаті проведення досліджень введеної системи моделей отримані такі нові наукові результати.

Вперше запропоновано, реалізовано і досліджено концепцію метамodelі – математичної моделі спільного розвитку системи «нова виробнича система та імітаційна модель цієї системи», що відрізняється від існуючих підходів і методів формуванням імітаційної моделі на

базі трирівневої декомпозиції; двостороннім інформаційним обміном «об'єкт–модель»; урахуванням дуальності цільового призначення моделі виробничої системи як відображення суттєвих властивостей об'єкта; як еталона об'єкта і засобу отримання знань та досвіду для управління функціонуванням і розвитком об'єкта. Запропонована мета-модель в загально-теоретичному аспекті є розширенням концепції спостерігача стану на систему з двох нелінійних і нестационарних об'єктів, що дає можливість для переходу від евристичних методів розробки моделей до ефективних формалізованих процедур.

Вперше запропоновано, реалізовано і досліджено систему імітаційних моделей «виробники, продукти, користувачі», де може бути відтворено поведінку кожного елемента кожного з класів «виробники», «продукти виробництва», «користувачі», що відрізняється від існуючих аналогів, тим, що систему складають моделі «виробники», «продукти», «користувачі» з різними рівнями агрегування, різними методами локального управління і різними рівнями спрощення. Альтернативні моделі є сумісними за вхідними і вихідними змінними, що дає можливість порівнювати результати моделювання за альтернативними моделями.

Теоретичні і практичні результати досліджень опубліковані в [33, 34, 42, 43, 49, 57–60, 83, 84, 94, 97, 101, 103, 109–111, 114–116, 119–122, 124, 127–129, 132, 149–152].



## РОЗДІЛ 5

### ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНИХ МОДЕЛЕЙ І МЕТОДІВ

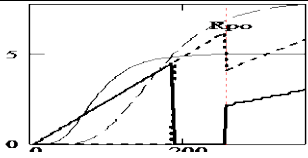
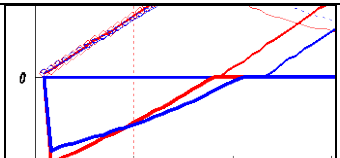
Ціль цього розділу – аналіз напрямків і змісту застосування отриманих нових наукових результатів, а саме математичних моделей, для побудови і розрахунку конкретних інформаційно-управляючих систем для підтримки рішень, проектування, дистанційного навчання. Моделі, що досліджуються в даній роботі, мають широкий спектр інтерпретацій – від великих виробничих і енергетичних систем, до локальних комп’ютерних мереж і систем технологічних агрегатів. В методах і технологіях створення математичних моделей, що є об’єктом дослідження в роботі, роль інтерфейсів не зводиться до функцій ергономіки і дизайну вікон і кнопок. В процесах створення нових моделей для нових задач ефективний інтерфейс є важливим елементом метамоделі – позитивним зворотним зв’язком (рис. 5.1).

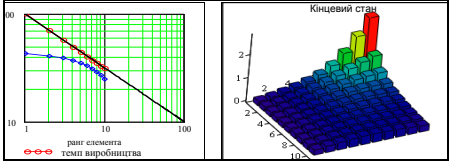
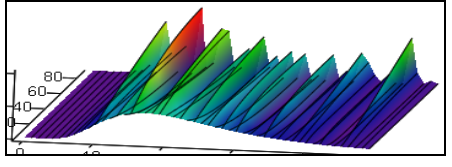
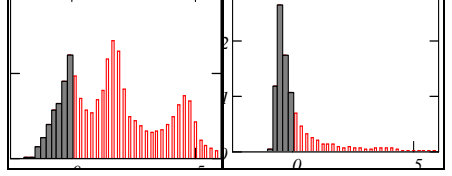


Рисунок 5.1 – Схема процесу створення моделей розвитку

Вже на початку розділу 1 були запропоновані концептуальні схеми процесів генерації знань та метазнань – альтернатив відносно класичної схеми. Схема на рис. 5.2 – підсумок реалізації концепції. В процесах розробки моделей і в процесах моделювання отримано емпіричні дані відносно змісту та інтенсивності зворотних зв'язків зз\_1 (уточнення формулювань задач), зз\_2 (модифікація графових моделей), зз\_3 (модифікація робочих математичних моделей). В розділі 4 запропоновано, розроблено і досліджено метамодель сумісного розвитку виробничої системи та системи її моделей. Процеси розробки і досліджень на цих моделях, подані в розділах 2–4, дали низку конкретних нових результатів, що спричиняли прискорення досліджень, прискорення розробки нових моделей (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Нові властивості процесів розвитку, знайдені при моделюванні

№	Клас моделей	Нова властивість (факт, знання)	Відповідний фрагмент моделювання
1.	Оптимальне агрегування	Розривність вектор-функції оптимального розподілу ресурсу	
2.	Оптимальний розвиток	Розривність оптимальних стратегій розподілу ресурсу	
3.	Оптимальний розвиток	Розривність оптимальних кредитних стратегій	
4.	Оптимальний розвиток	Максимум на функції впливу «ставка кредиту – оптимальний обсяг кредитів»	
5.	Системи «виробники–агрегований продукт»	Підвищення стійкості за рахунок випадкових збурень – природних або штучних	

№	Клас моделей	Нова властивість (факт, знання)	Відповідний фрагмент моделювання
6.	Системи «виробники–продукти»	Умови виникнення гіперболічних розподілів в детермінованих моделях	
7.	Системи «виробники–лінійка продуктів»	Локальна нестійкість «ерозія» лінійки продуктів. Це вимагає складного нелінійного управління	
8.	Системи «виробники, продукти, користувачі»	Нестійкість частотних розподілів – при малих змінах параметрів суттєво змінюється розподіл	

### 5.1 Агреговані моделі: приклади застосування результатів

Інтерфейси для агрегованих моделей утворюють систему, що має два види зв'язків: відображення логіки задач дослідження на моделях і відображення повторного використання програмних ресурсів. Одним із елементів задекларованої в даній роботі раціональної технології створення робочих моделей є максимально можливе використання в нових робочих моделях елементів попередніх розроблених моделей.

Такий підхід традиційно використовувався в створенні матеріальних технічних систем. Наприклад, вартість і терміни створення нового літака чи космічного апарата залежать від коефіцієнта новизни розробки. Важливі для побудови моделей інноваційного розвитку коефіцієнти новизни та освоєння мають багато галузевих версій визначення. Враховуючи розмитість цих параметрів, можна вважати еквівалентними різні версії визначень.

В цьому розділі їх використовуємо для оцінки елементів системи програм та інтерфейсів, що утворюють послідовність станів розвитку метамоделі. Робимо робочі вирази, для визначення цих коефіцієнтів, оснований на запропонованому в розділі 1 підході до функціональної декомпозиції технічної системи, де кожний елемент оцінюється за за-

лежностями для процесів функціонування «приріст вартості = > приріст ефекту» та «вартість відмови = > втрати ефективності». Тепер розширюємо підхід оцінки ролі елемента певної інформаційної системи – системи робочих моделей в процесі її розвитку – зміни коефіцієнта новизни і зміни коефіцієнта освоєння в результаті модифікації робочої моделі – змін у робочій моделі, змін у сервісних програмних модулях та інтерфейсах.

Коефіцієнт новизни розробки матеріального чи інформаційного продукту можна подати як відношення «об'єму» нових елементів до існуючих елементів. «Об'єм» елементів інтерпретується як вага, кількість годин на створення, робочі витрати на виробництво елемента.

$$\alpha_{nov} := \frac{\sum_{i=1}^{Nn} svn_i}{\sum_{j=1}^{Np} svp_j}; \quad 0 \leq \alpha_{nov} \leq 1, \quad (5.1)$$

де  $Nn$  – кількість нових елементів;  $Np$  – кількість існуючих елементів в складі виробу;  $svn$  – оцінка виробничих витрат на новий елемент;  $svp_j$  – виробничі витрати існуючого елемента. Інтерпретація граничного значення:  $\alpha_{nov} = 1$  – новий продукт, як об'єкт виробництва не має нових елементів, але відрізняється кольором – і таким чином є «новим» для користувача. Коефіцієнт освоєння матеріального чи інформаційного продукту

$$\alpha_{osv} = \frac{Sv(2K)}{Sv_K} = \frac{\sum_{i=K+1}^{2K} sv_i}{\sum_{i=1}^K sv_i}; \quad 0 \leq \alpha_{osv} \leq 1, \quad (5.2)$$

де  $K$  – накопичена кількість випущених виробів;  $Np$  – кількість елементів виробу;  $sv$  – робочі витрати на елемент при накопиченому випуску  $K$ ;  $Sv_K$  – сумарні витрати на випуск  $K$  виробів;  $Sv(2k)$  – сумарні витрати при подвоєнні випуску.

На рис. 5.2 та 5.3 подано фрагменти інтерфейсів. Проблеми типових виробничих об'єднань – численний і різноманітний асортимент продукції – наприклад: маслофільтри, бойлери, млини, мінітрактори та машини для чищення часнику. Потреби у подібній продукції звичайно нестабільні, недовгі. В верхній частині рис. 5.2 подано приклад оптимального агрегування, в нижній частині – приклад аналізу впливу невизначеностей. Переваги розробленої програмної системи – повна «прозорість» – зміни в ФВ елементів просто відображуються в оптимальному розподілі ресурсів або навантаженні.

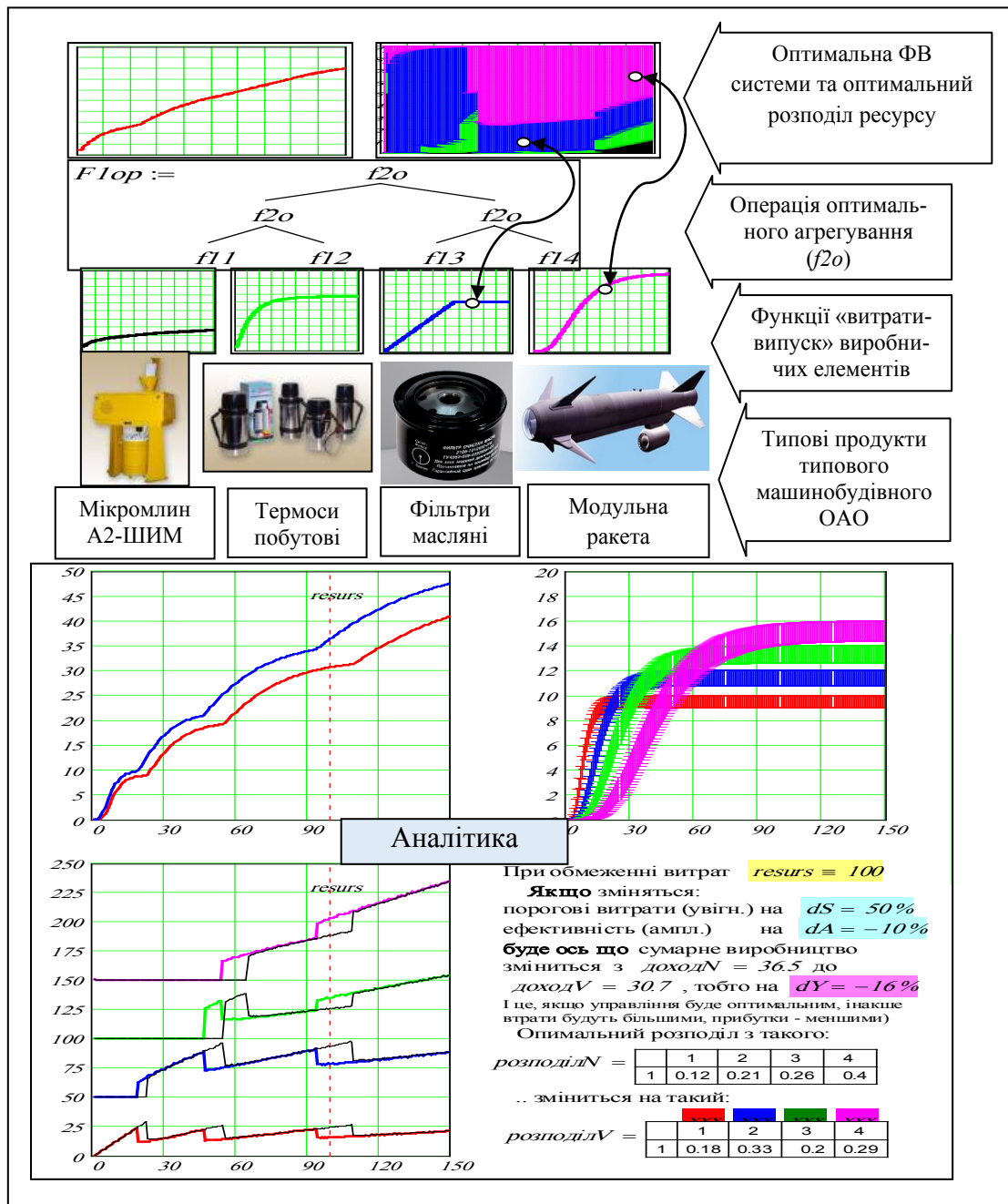


Рисунок 5.2 – Оперативне оптимальне управління виробництвом

На рис. 5.3 подано приклад актуальної дворівневої оптимізації і використання її для мінімізації витрат при заданому рівні навантаження.

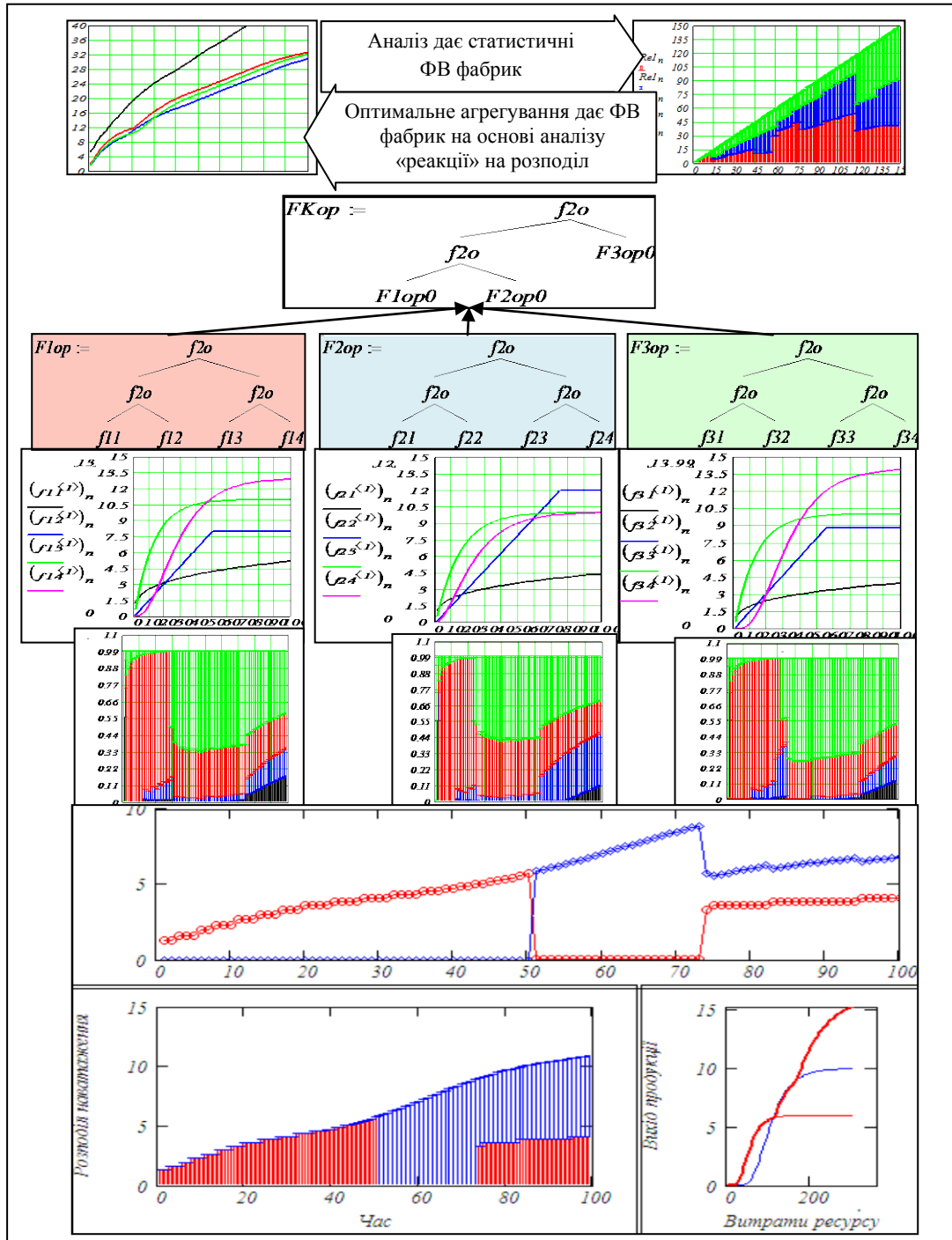


Рисунок 5.3 – Оптимальне оперативне управління дворівневою виробничою системою

На рис. 5.4 подано фрагменти розв'язання задачі про оптимальний розвиток мережі зв'язку. Проблеми – короткі життєві цикли проектів. Об'єкт запровадження – методика розв'язання багатовимірної задачі розвитку для системи з довільними, в тому числі – ступінчастими, ФР.

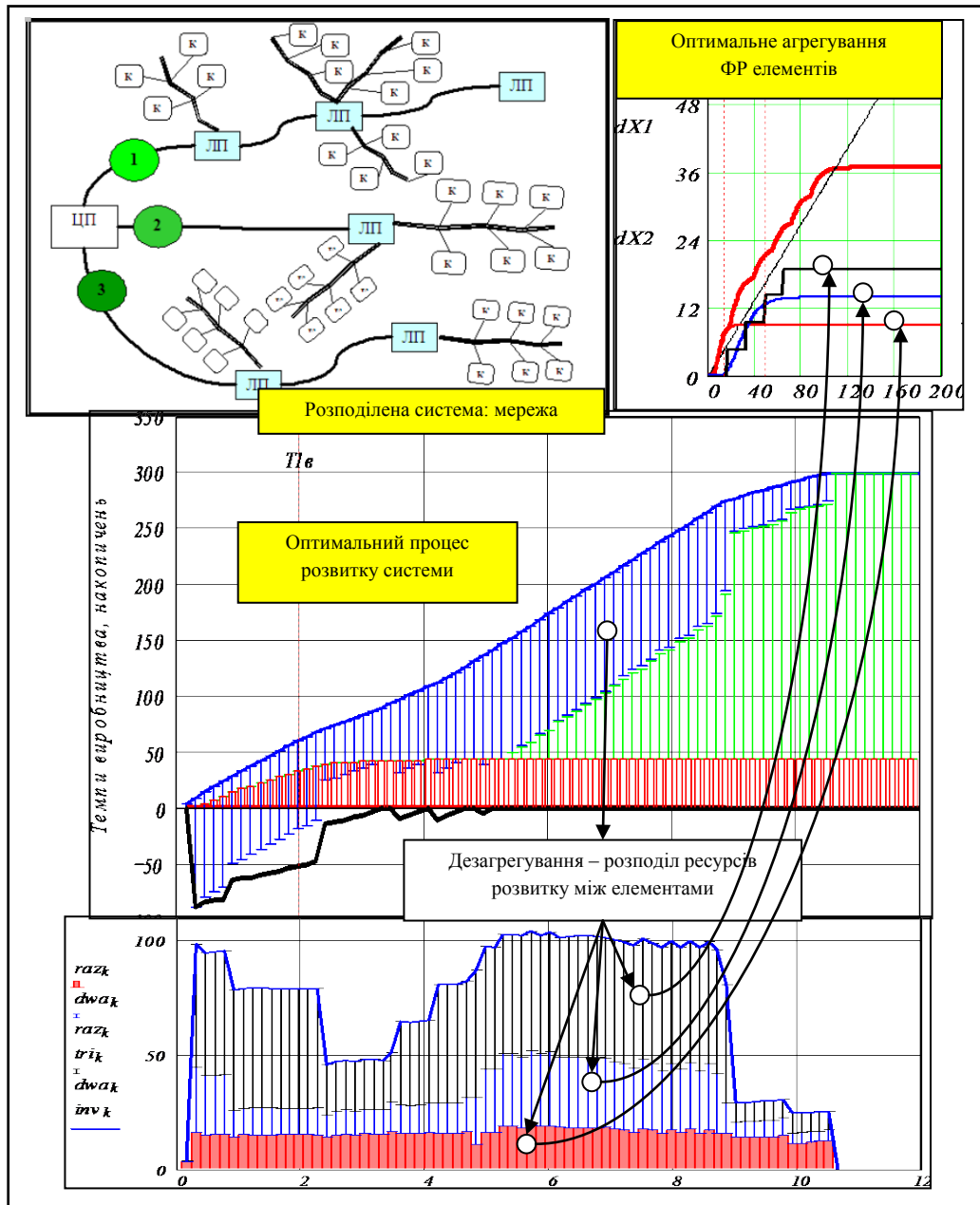


Рисунок 5.4 – Інтерфейс для задачі оптимального розвитку мережевої системи

Розроблено комплект програмного забезпечення та методика аналізу і планування процесів розвитку. Реалізовані всі стандартні методи аналізу впливів і невизначеностей. На рис. 5.5 подано приклад для

«що буде якщо» аналізу задачі оптимального розвитку – запровадженний практичний результат.

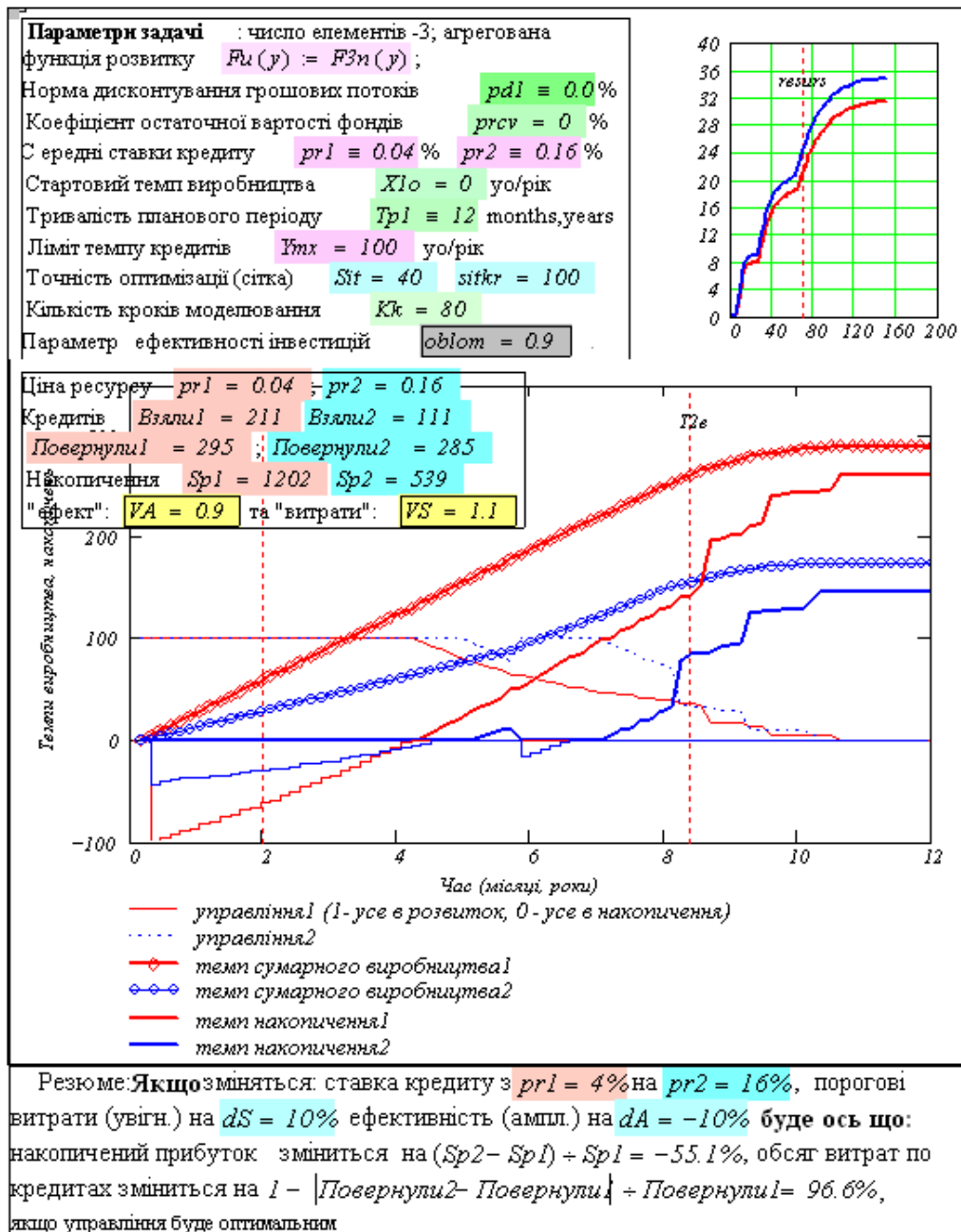


Рисунок 5.5 – Приклад результатів що буде якщо аналізу

Особливість розробленого програмного забезпечення – застосування алгебризованих моделей динаміки розвитку. Це зокрема дозволяє просто отримувати функції впливу будь-якого параметра моделі на показники функціонування системи. На рис. 5.6 подано приклад розрахунку функцій впливу.



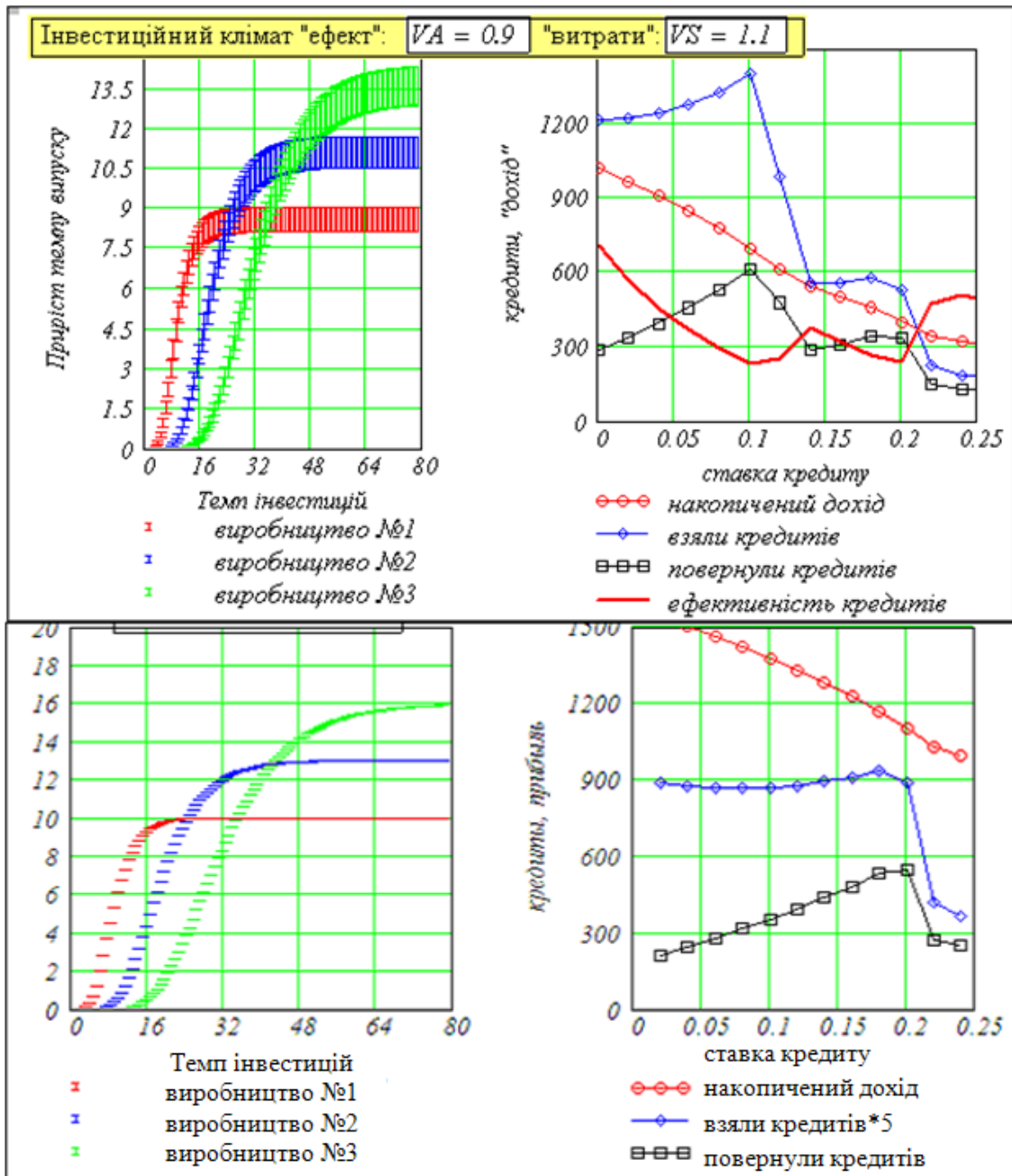


Рисунок 5.6 – Приклад аналізу функцій впливу

Наступний крок в практичному використанні результатів – побудова інформаційних блоків, де комплексно і поетапно подаються результати обчислювальних експериментів. На рис. 5.7 подано розгорнутий аналіз функцій впливу. Кожній точці функції впливу відповідає певний оптимальний процес розвитку. Для користувача важливо бачити, які саме процеси відповідають критичним точкам на функціях впливу – екстремумам, розривам.

Можемо бачити складний, негладкий, антиінтуїтивний характер функцій впливу. В розробці, на відміну від класичних методів аналізу чутливості, не використовуються похідні. Розроблені моделі і методи потребують відповідних засобів подання результатів моделювання і організації досліджень на моделях. На рис. 5.7 подано інформаційний блок, де зібрано в логічну систему десятки «живих графіків», числових даних, повідомлень, що цілісно сприймається користувачем-професіоналом і так підвищують якість і швидкість пошуку та прийняття рішень.

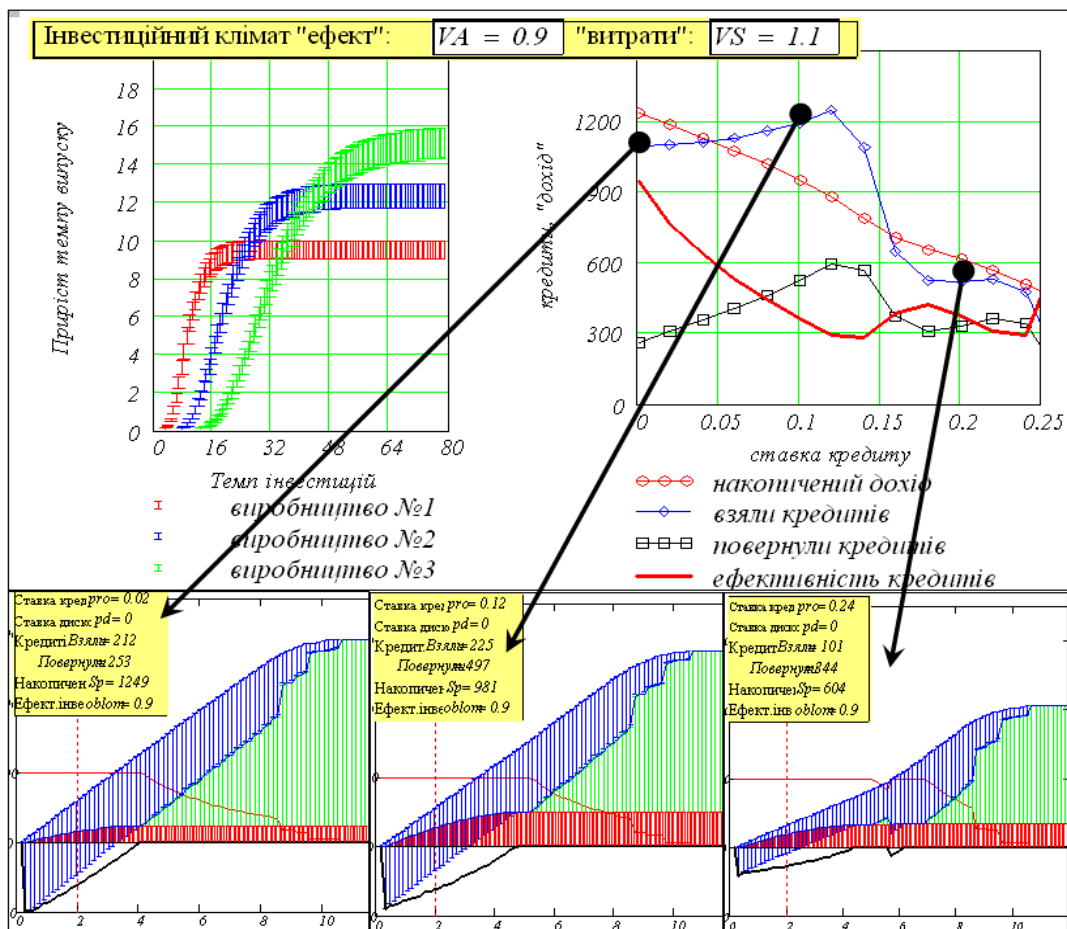


Рисунок 5.7 – Приклад деталізованого аналізу функцій впливу

На рис. 5.8 подано приклад розрахунку системи з чотирьох ідентичних котлоагрегатів, що відрізняються за ефективністю на 5 %. Потенційна економія складе 3–10 % в залежності від рівня малого горіння і характеристик (трендів, випадкових коливань) навантаження котельної.

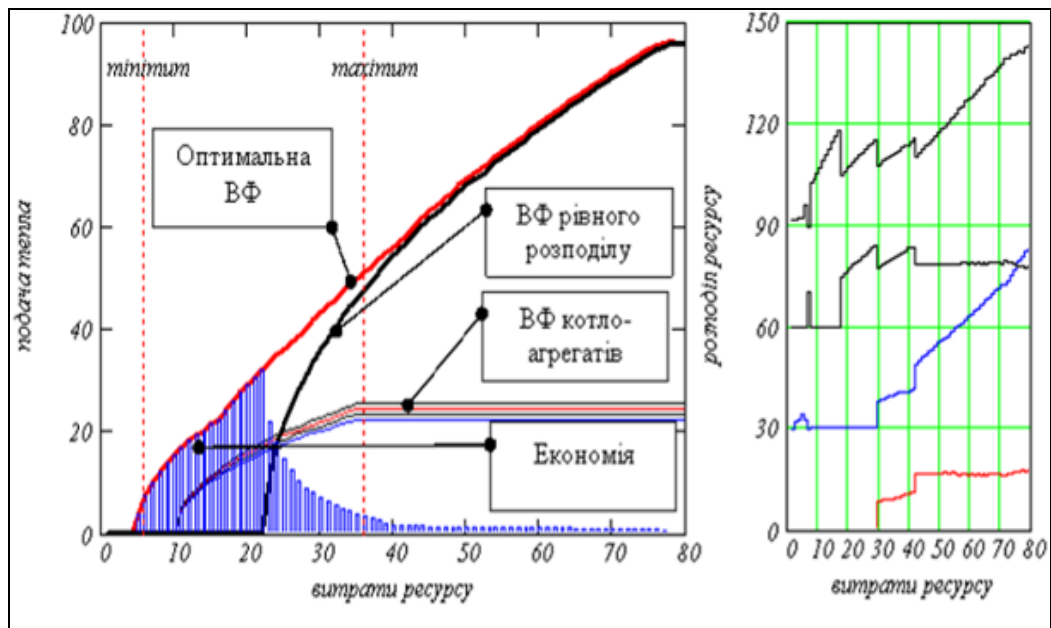


Рисунок 5.8 – Аналіз оптимального розподілу навантаження для системи з чотирьох котлоагрегатів

## 5.2 Моделі адаптивних систем: приклади застосування

Як і в проектуванні матеріальних об'єктів процес проектування повинен включати моделі різного рівня коректності і обґрунтованості. Аналогією може бути практика автомобільної індустрії: крім нових моделей автомашин для запровадження в серійне виробництво на наступний рік, існують машини – концепти для відпрацювання інноваційних рішень. Головна особливість концептів – вони функціонують і дають реальну інформацію для подальшої розробки.

Моделі «концепти» не є неповноцінними з точки зору адекватності і практичної корисності, це просто рання фаза створення інноваційних систем та їх моделей. На рис. 5.9 подано інформаційний блок для дослідження процесів в адаптивній САУ з настроюванням за логічними правилами для критичного випадку початкової нестійкості. Подано настроювання САУ імпульсами і шумом. Адаптивна САУ працездатна. Особливості системи – перехідні процеси в контурі адаптації мають однакову тривалість з перехідними процесами в основному контурі. В нижній частині рис. 5.9 подано два набори перехідних процесів.

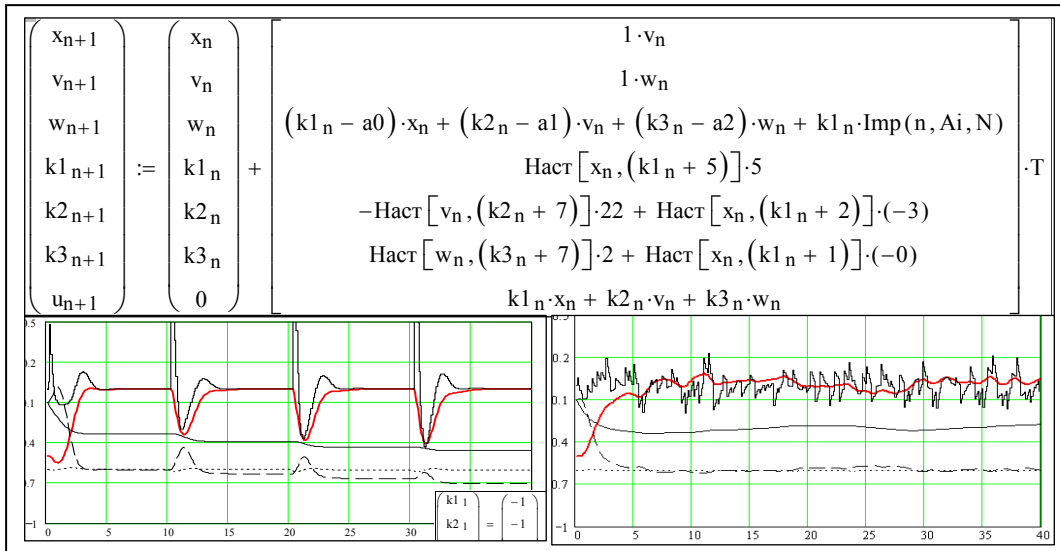


Рисунок 5.9 – Моделювання «швидкої» адаптивної САУ. Приклад

Знайдені на цій моделі розв’язання використані в поданих далі моделях [35, 43, 45, 76, 78, 90, 91, 112, 117, 123, 126], що мають наукову новизну і знайшли практичне запровадження (рис. 5.10). Біореакторні системи – перспективний напрямок для практики і наукових досліджень.



Рисунок 5.10 – Приклади біореакторних систем

### 5.3 Імітаційні моделі систем: аналіз результатів моделювання

Розробка і дослідження моделей систем «виробники, продукти, користувачі» велась одночасно як теоретичне дослідження і розробка підсистем підтримки рішень для широкого кола користувачів. Були розроблені нові інформаційні структури для подання результатів моделювання таких розподілених систем з елементами трьох класів.

Центральні ідеї побудови інформаційних структур: подання процесу функціонування і розвитку елемента «на фоні» активного оточення; використання поряд з розподілами ймовірностей рангових розподілів, рангової статистики і рангової динаміки.

Для елементів розподілених систем важливим компонентом стану є не тільки темп узагальненого виробництва, але і ранг елемента – його позиції відносно оточення інших елементів. Розроблено програми для обчислення рангової динаміки.

Виникла також проблема подання сумісно перехідних процесів в системі в цілому і в кожному елементі. Особливо інформативними для реального прогнозування виявились тривимірні графіки еволюції розподілів. Відповідно до розроблених моделей розподілених систем класів  $N \times 1$ ,  $1 \times M$ ,  $N \times M$ ,  $N \times M \times K$  ( $N$  виробників,  $M$  продуктів,  $K$  користувачів).

Проблема імітаційних моделей – високі розмірності. Моделювання виконувалось для систем порядку до  $100 \times 1000 \times 1000$ , тому необхідно було створити інтерфейс для введення характеристик і виведення процесів для кожного елемента.

На рис. 5.11 подано базовий модуль для моделей класу « $N \times M$ ». Зміст інтерфейсу – введення даних і процеси розвитку для двох вибраних користувачем елементів.

На рис. 5.12 подано другу частину модуля для аналізу моделей класу «виробники, продукти». Реалізовано такий обчислювальний експеримент: моделюється функціонування системи виробників в ситуації падіння потреб, на фоні такого процесу просліджуються дії двох виробників, один з яких використовує пропорційне – детерміноване управління, другий – ризикове управління з концентрацією ресурсів на очікувано кращому виробі.



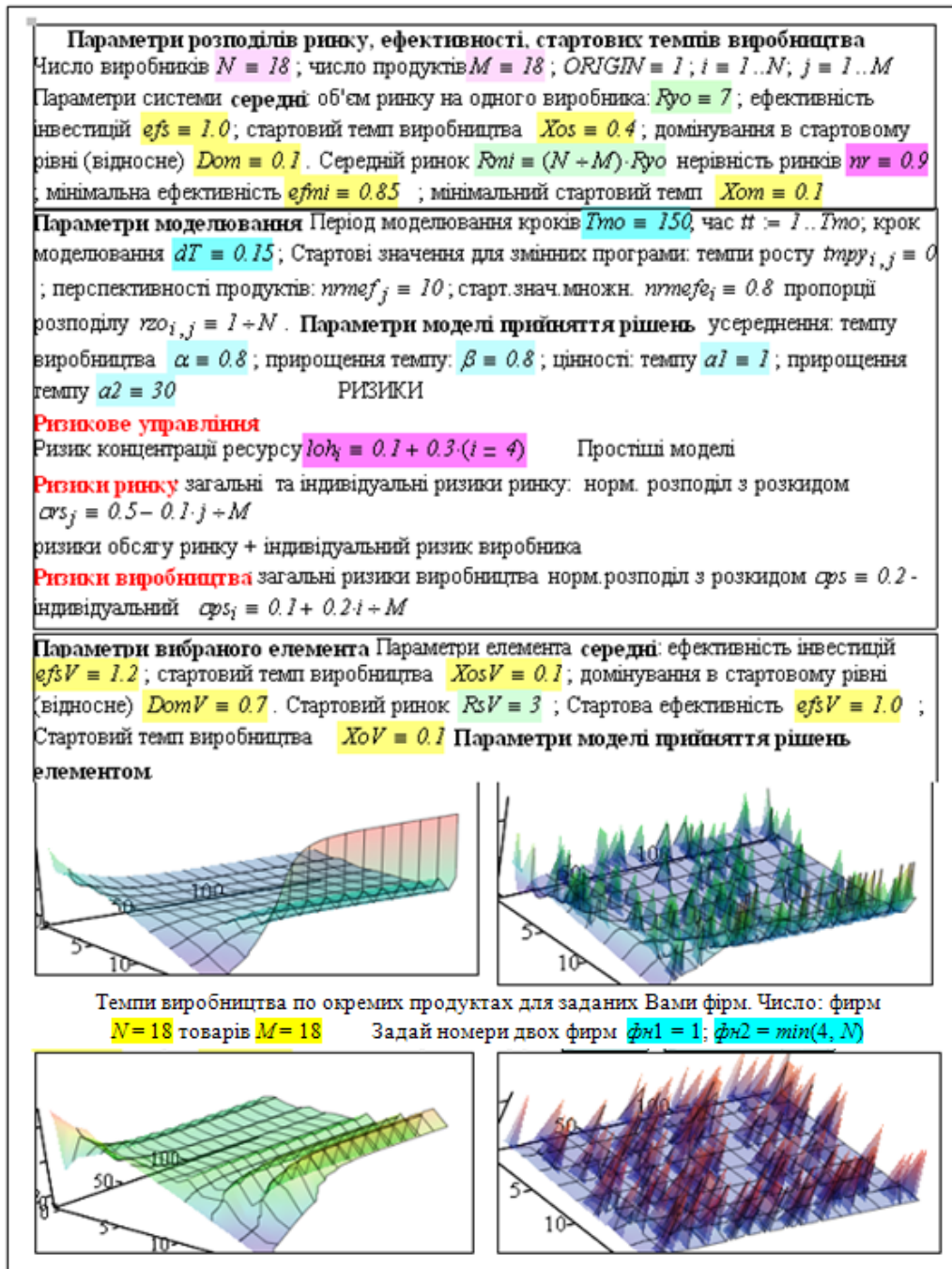


Рисунок 5.11 – Модуль аналізу процесів у вибраних елементах системи «виробники, продукти». Частина 1

В верхній частині рис. 5.12 подано графіки динаміки випуску для кожного з продуктів, ранжованих за перспективністю. Бачимо, що «неризиковий» виробник поступово зменшує виробництво неефективних продуктів і збільшує виробництво ефективних. «Ризиковий» виробник значну частину ресурсів вкладає в кращий продукт і виграє. В нижній частині рис. 5.12 подано динаміку сумарного виробництва для

всіх виробників цього сегмента виробництва. Лівий графік – несортований, правий – сортований. Поперечні зрізи на ранжованому графіку – поточні рангові розподіли системи виробників сегменту. Це тільки одна реалізація складного випадкового процесу.

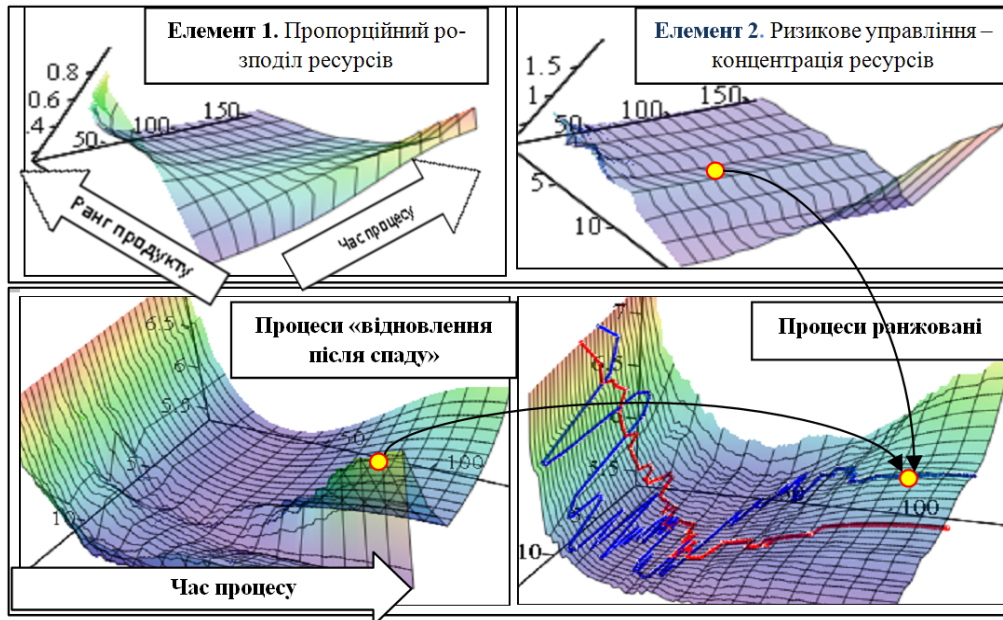


Рисунок 5.12 – Модуль аналізу двох вибраних виробників «на фоні» системи « $N \times M$ ». Частина 2

На рис. 5.13 подано частину модуля «ризик аналіз», побудована на вибірці з 2000 реалізацій процесу. У верхній частині – залежність середнього темпу виробництва в кінці періоду моделювання і дисперсії нормованої ефективності елемента і частотні розподіли кінцевого темпу виробництва для трьох вибраних елементів; середня частина інтерфейсу – вхідні дані; 3Д графік – залежність розподілу ймовірностей кінцевого темпу випуску від ефективності елемента. Сценарій дослідження – оцінка статистики ризикового управління «на фоні» елементів з пропорційним управлінням.

На рис. 5.14 подано інформаційний блок «аналіз процесів в  $MNK$ -системі. Блок складається з чотирьох комплексних графіків: тривимірний графік функцій належності вибору на лінійці продуктів споживачів ранжованих за ресурсними обмеженнями («доходами», «бюджетами»), на який накладені просторові криві, що «пояснюють» та ідентифікують основний графік; тривимірний графік перехідних процесів для кожного продукту лінійки; звичайні графіки – «зрізи» попереднього тривимірного графіка для цінкових позицій лінійки та моментів часу.

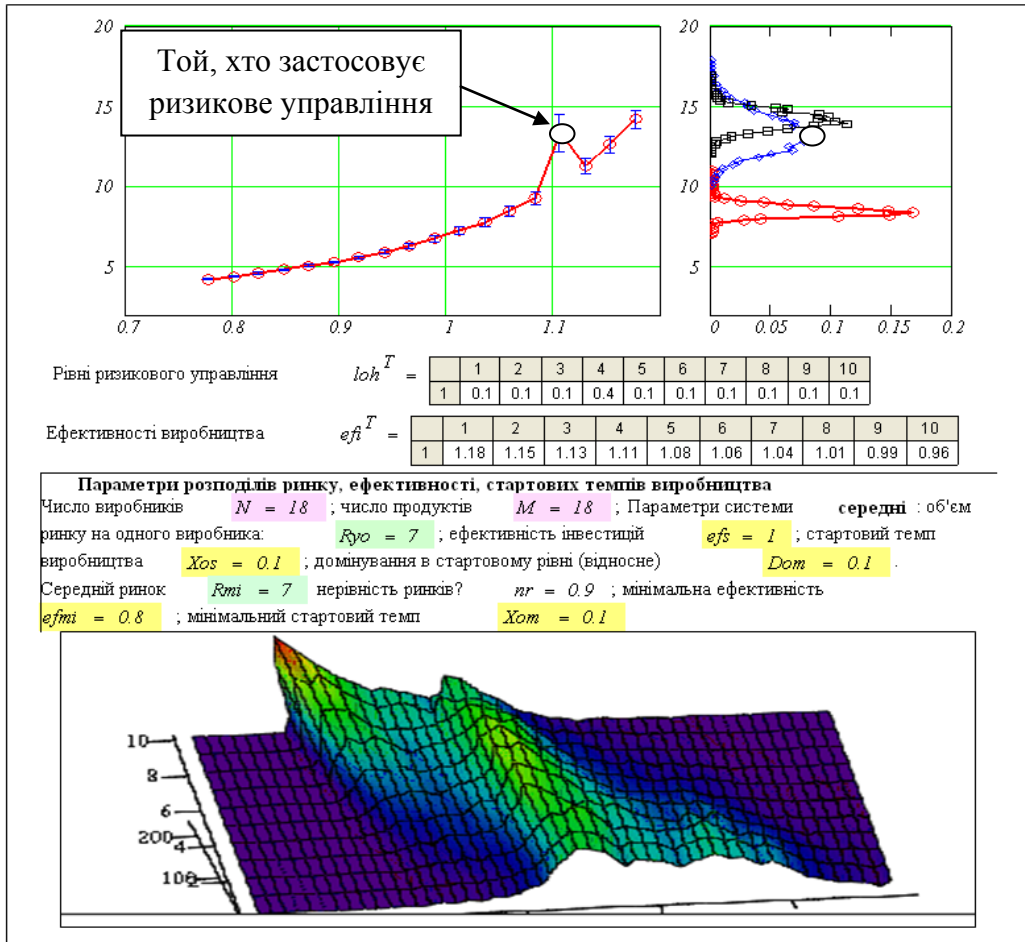


Рисунок 5.13 – Модуль аналізу частотних розподілів темпу виробництва для елементів системи «виробники, продукти». Частина 3

Звернемо увагу на те, що верхній графік на рис. 5.14 – це тільки стан системи в певний момент часу функціонування підсистеми «користувачі». *Об'єктом новизни і невід'ємною складовою даної роботи є не тільки моделі, але і форми подання результатів та відповідні алгоритми і програми.* Особливість розглянутих інтерфейсів – подання в комплексі числової та графічної інформації, систем звичайних і просторових графіків, можливість змінювати ракурси графіків, що дозволяє вести ефективні пошукові дослідження. Користувач може формувати сценарії досліджень, порівнювати випадкові, або параметричні реалізації процесу розвитку розподіленої системи, поданого в альтернативних формах. Графіки на рис. 5.11, 5.14 підкреслюють нові науково-практичні результати, отримані за допомогою розробленої моделі і розроблених під цю модель інформаційних структур.



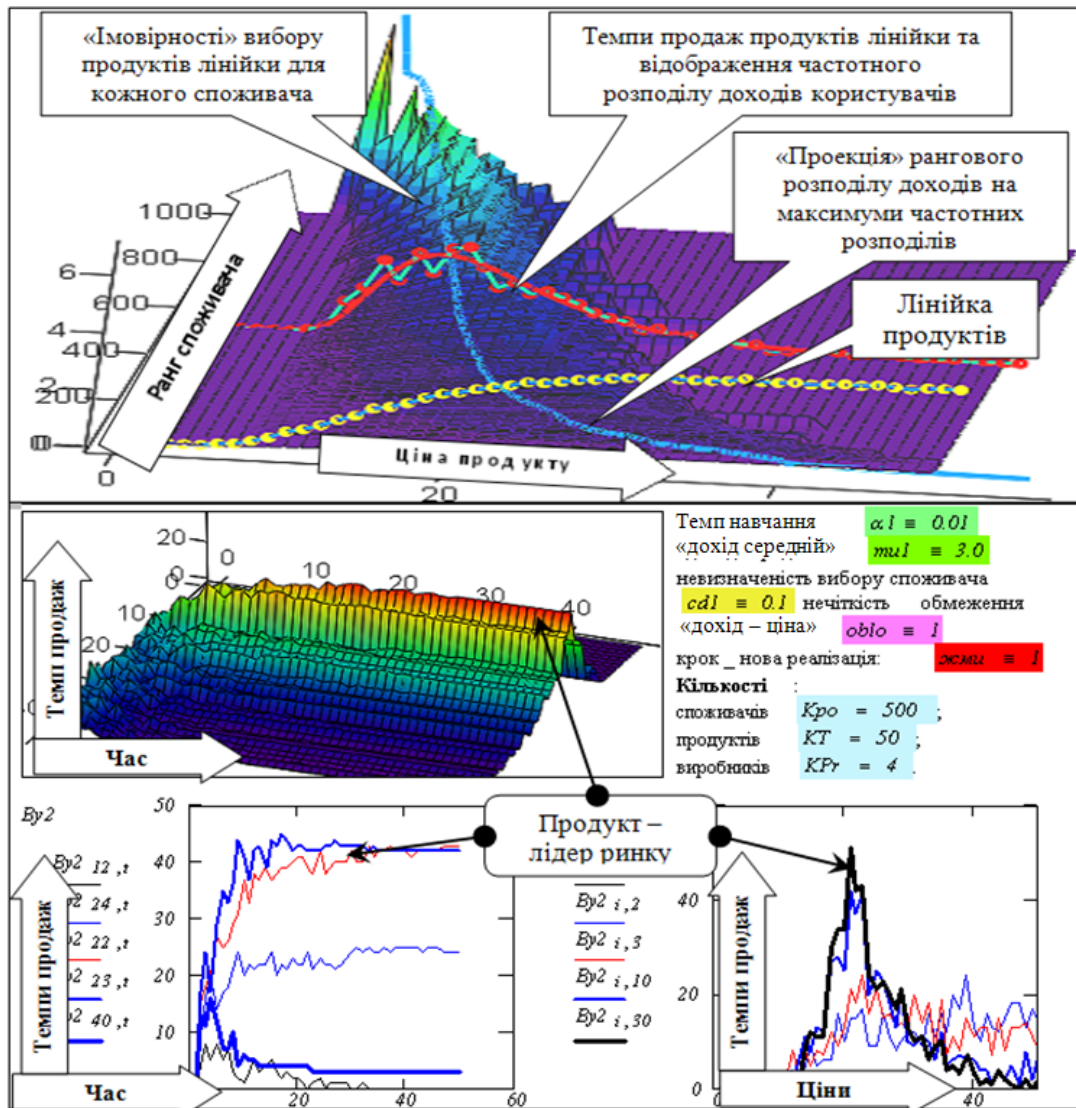


Рисунок 5.14 – Інформаційний блок «аналіз процесів в системі «виробники, продукти, користувачі»

#### 5.4 Розробка мультимедійних посібників, орієнтованих на моделювання і створення моделей

Результати даної роботи систематично запроваджувались в навчальний процес. На базі нових наукових результатів формувалися теми бакалаврських робіт, дипломних проектів і магістерських дисертацій, потім результати розробок переходили в посібники, практикуми. Видано шість посібників В цих посібниках використано методологію створення математичних моделей. Практичний досвід використання цих посібників дозволив зробити певні теоретичні узагальнення від-

носно ефективної структури і функцій узгодженого з вимогами сучасності навчального посібника, зокрема мобільності тематики і стабільності загальнотеоретичних положень. Інновації закладаються в освіті.

Сьогодні неважко будь-який паперовий посібник чи підручник набрати в текстовому редакторі, зробити гіперпосилання, включити аудіо та відео і, нарешті виставити в Інтернеті як засіб дистанційного навчання. Однак це не буде електронна книга, що відповідає можливостям і вимогам сучасності.

Поставлено за мету – на основі аналізу і узагальнення світового і власного досвіду розробки і використання електронних книг виділити раціональну структуру для мультимедійного посібника; відібрати нетривіальні задачі і нові методи розв'язання цих задач; розробити модулі мультимедійних посібників, що є втіленням запропонованої раціональної структури посібника і функцій навчання.

Роботи в області створення електронних книг, мультимедійних посібників почались одночасно з появою перших серійних обчислювальних машин. Кількість тільки оригінальних публікацій в цій області в світі вимірюється тисячами. В останні роки проводився систематичний пошук в Інтернеті аналогів для наших розробок в області оптимізації і моделювання процесів розвитку. Відомі на рівні довідкової інформації численні модульні дистанційні курси американських університетів (мінімальна ціна дистанційного курсу MBA \$ 17.000), однак вони не є загальнодоступними.

Прямих аналогів не знайдено. Однією з причин цього може бути те, що подібні системно-аналітичні дослідження ведуться в рамках корпоративних структур і не виходять за межі цих структур. В світі існує «модельний бізнес» – створення математичних моделей для прогнозування і планування. Тематика посібників – моделювання і оптимізація технічних систем. Матеріал вивчається за допомогою моделювання і конструювання моделей. На обкладинки винесено нові моделі і результати моделювання (рис. 5.15). В посібниках подані крім класичних нові моделі в новій орієнтованій на сучасні мультимедійні можливості формі, подібній тому, що подано на рис. 5.9–5.14. Нові моделі використовуються як теми курсових і дипломних робіт, а потім після такої апробації входять до посібника.

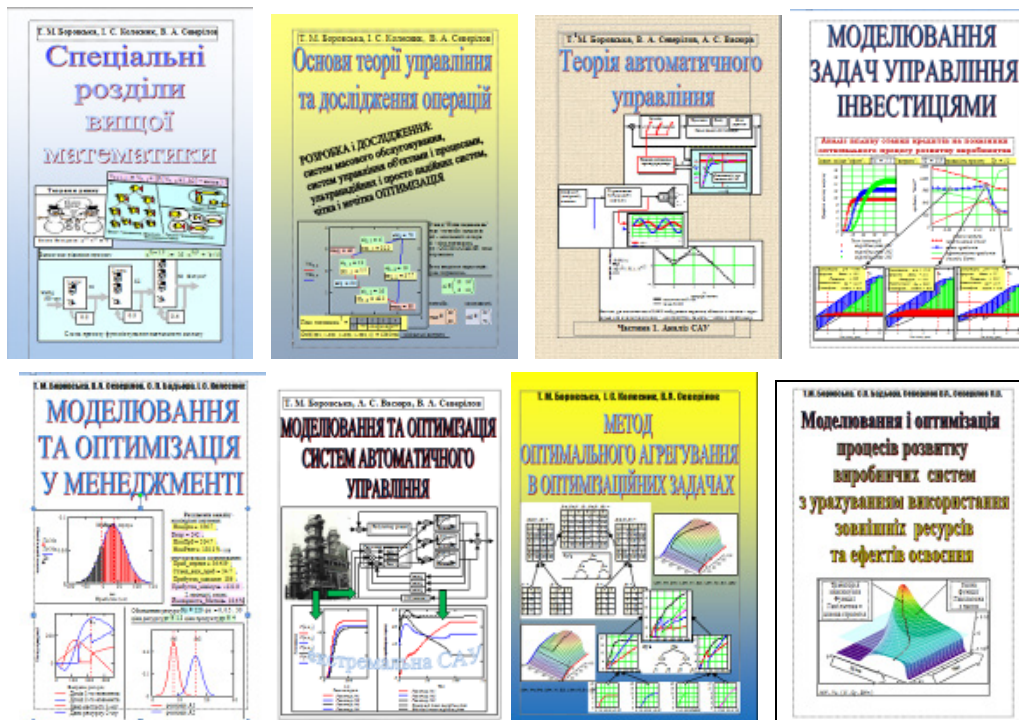


Рисунок 5.15 – Монографії і посібники, орієнтовані на моделювання

Класичні моделі були результатом випадкових відкриттів висококваліфікованими вченими, або десятків років праці науковців. Звідки черпати раціональні технології створення математичних моделей (за кінцевий час при кінцевих витратах) для заданого процесу чи об'єкта? Виявляється, що тут, зокрема, можна застосувати методи і технології створення програм, мікропроцесорів, літальних апаратів і, взагалі, методи прикладного системного аналізу і загальної теорії систем. Головне тут – розуміння якісних змін в області інтелектуальної діяльності, яку слід назвати «конструювання математичних моделей».

Накопичення нових моделей і методів дає локальний (для певного вузького кола розробників) ефект зростаючої продуктивності – тому, хто зробив дві робочі моделі набагато легше створити третю, а тринадцята модель буде синтезуватись в діалозі з «експертною системою». Такі ефекти завжди виникають в успішних науково-дослідних і проектних організаціях.

Аналіз процесів розвитку організацій дозволяє позбавитись від зайвого оптимізму відносно запропонованого підходу до навчання орієнтованого на моделювання, оскільки без виконання низки умов спроба перебудови змісту і методів освоєння певних дисциплін на базі напрацьованих моделей і методів буде провальною.

В зв'язку з потребами сучасного виробництва, з часом, на перший план на майбутньому конкурентному ринку послуг вищої освіти вийдуть показники кількості і якості робочих математичних моделей, що використовуються для навчання і набуття віртуального практичного досвіду.

### 5.5 Робочі моделі оптимального однокрокового і багатокрокового розподілу ресурсів

**Задача оптимального розподілу навантаження.** Природна інтерпретація задачі – розподіл навантаження в теплоенергосистемі. Звичайно навантаження в таких системах має випадкові коливання і детерміновані складові – лінійні і періодичні тренди (звичайно – добові). Для прикладу взято систему з двох елементів і графік навантаження з періодичними коливаннями та випадковими короточасними коливаннями. Система управління повинна для кожного заданого рівня навантаження знаходити оптимальний за критерієм сумарних витрат розподіл між елементами. На рис. 5.16–5.19 подано результати розрахунку розподілу і оптимальних виробничих функцій системи для випадків випуклих і невивуклих ВФ елементів та різних функцій навантаження.

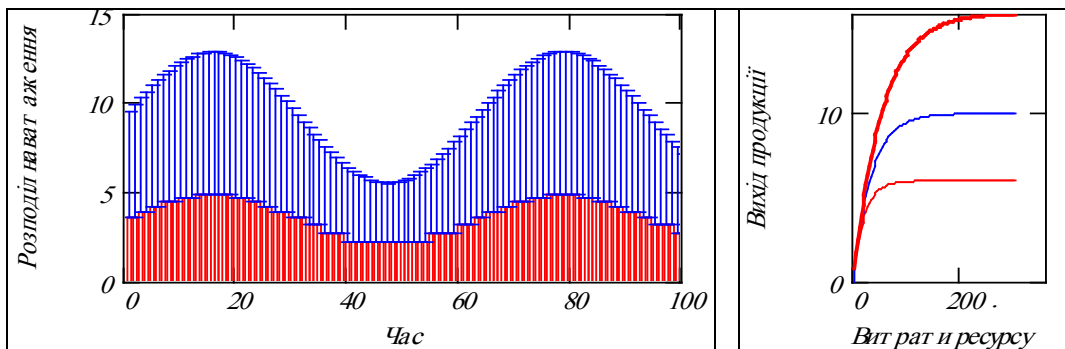


Рисунок 5.16 – Оптимальний розподіл навантаження для випуклих ВФ

Бачимо, що у випадку невивуклих ВФ на певних інтервалах часу навантаження певних елементів стає нульовим. Але найгіршим є те, що така зміна в розподілі навантаження повинна бути раптовою. Уявимо собі регіональну виробничу систему з декількох заводів з оптимальним управлінням при коливаннях попиту. «Виключити» або «включити» завод набагато складніше, ніж котлоагрегати чи хімічні реактори. Тоб-

то оптимальні управління розподілом ресурсів в розподілених системах з невіпуклими узагальненими виробничими функціями не тільки складно обчислювати, але і набагато складніше реалізувати.

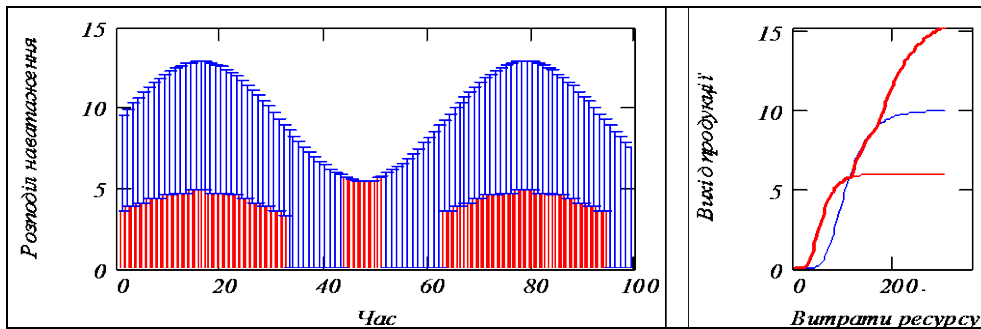


Рисунок 5.17 – Оптимальний розподіл навантаження для невіпуклих ВФ

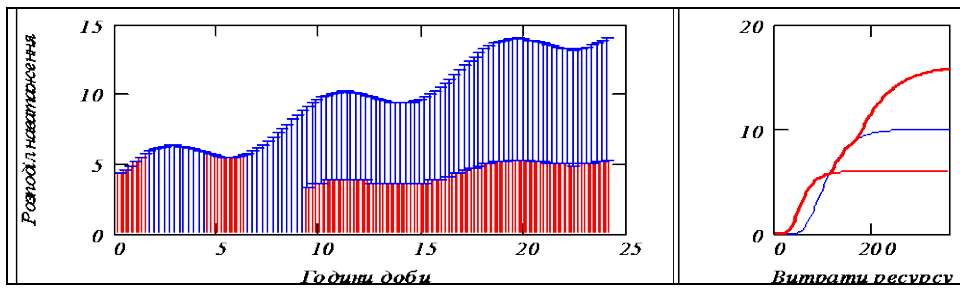


Рисунок 5.18 – Оптимальний розподіл навантаження для невіпуклих ВФ і навантаження з лінійним і періодичними трендами

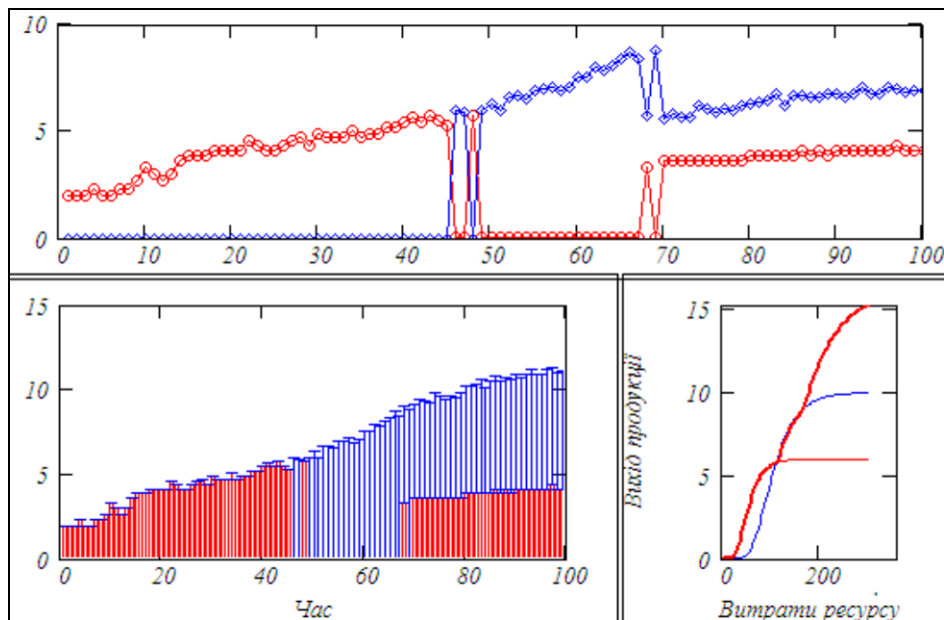
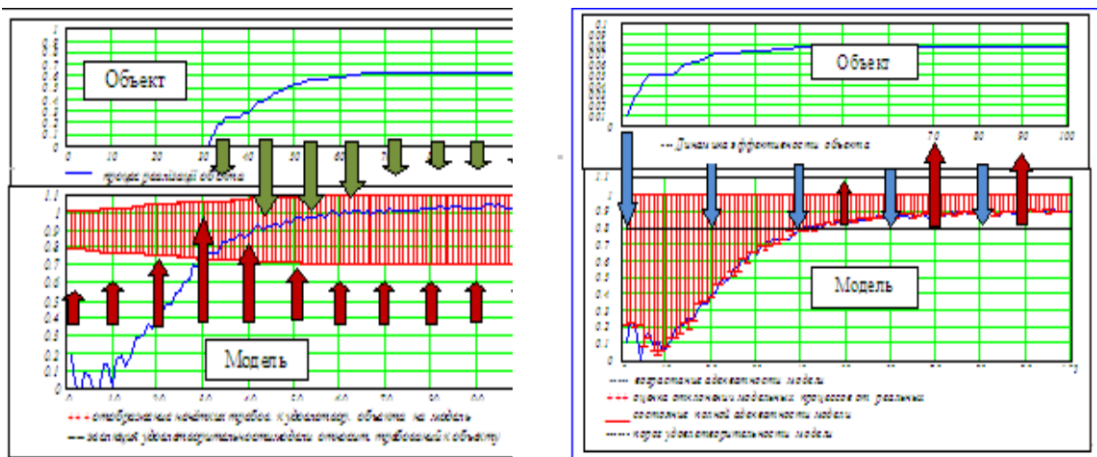


Рисунок 5.19 – Оптимальний розподіл навантаження для невіпуклих ВФ з лінійним та періодичними трендами і випадковою складовою

## 5.6 Технологія створення базової версії метамоделі

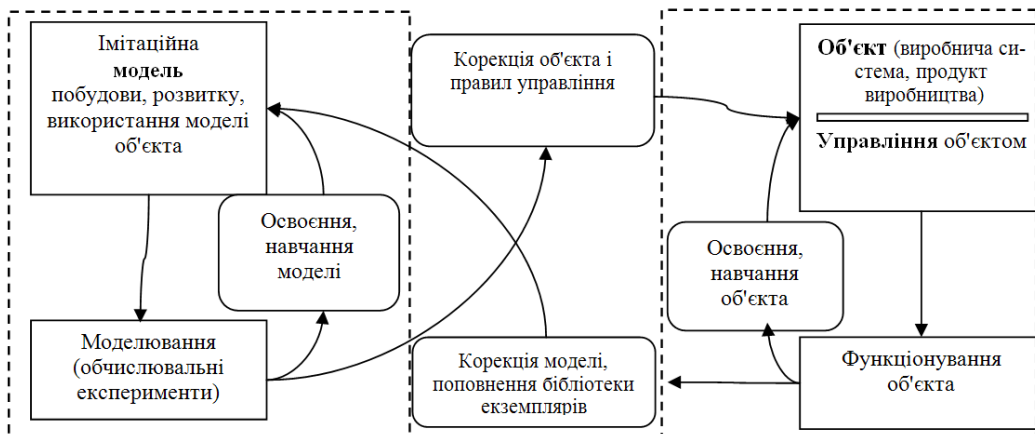
Метамодель – модель процесу сумісного розвитку об'єкта та моделі об'єкта. Далі подано приклад побудови нової моделі – без прототипів. Від словесних описів, до робочих моделей «процеси» і «статистика – розподіли імовірностей». Цей підрозділ – «протокол конструювання моделі», розбитий на кроки розробки.

### Крок 1. Трансляція лінгвістичної моделі процесів в графічну форму



На схемах вертикальні стрілки – інтенсивність обміну. Ліворуч – ситуація «спочатку модель», праворуч – «спочатку об'єкт».

### Крок 2. Побудова структури зв'язків системи «модель–об'єкт»





### Крок 3. Побудова бібліотеки детермінованих нелінійних функцій зв'язків елементів моделей

Цей крок не подається – функції виробництва, розвитку, попиту розглянуті в розділах 1–4.

### Крок 4. Побудова детермінованої та дискретної моделі розвитку системи «модель–об'єкт»

Вводимо позначення для правих частин рівнянь:

$$Fmod(x1, x2, fmm, fpm, VPm) = (fmm(x1(t))) \cdot (1 - x1(t)) \cdot Inm(t) \cdot fpm(x2(t)); \quad (5.3)$$

$$Fprs(x1, x2, fpp, fmp, Vpp) = fpp(x2(t)) \cdot (1 - x2(t)) \cdot Inp(t) \cdot fmp(x1(t)); \quad (5.4)$$

де  $fmm$ ,  $fpm$ ,  $fpp$ ,  $fmp$  – функції зворотних і перехресних зв'язків в системі;  $VPm$ ,  $Vpp$  – вектори параметрів моделі для систем, що розвиваються: «спочатку модель – потім об'єкт». Така структура функцій (5.3) і (5.4) обумовлена специфікою метамоделі розвитку – недоліком статистичних даних, істотною нелінійністю і нестационарністю зв'язків в системі процесів розробки нових продуктів і створення нових виробництв. Ще один чинник – можливі структурні відмінності функцій  $fmm$ ,  $fpm$ ,  $fpp$ ,  $fmp$  для різних продуктів і технологій виробництва. Врахувати ці чинники дозволяють два рівні параметрів функцій – числові параметри і функції різних структурних класів.

Запишемо різниці рівняння

$$x1_{k+1} = x1_k + Fmod(x1_k, x2_k, fmm, fpm, VPm) \cdot \Delta T,$$

$$x2_{k+1} = x2_k + Fprs(x1_k, x2_k, fpp, fmp, Vpp) \cdot \Delta T. \quad (5.5)$$

Подання реалій створення і розвитку нових виробничих систем у вигляді коефіцієнтів новизни і освоєння дозволило зблизити парадигми «спочатку модель, потім об'єкт» і «спочатку об'єкт, потім модель». Суть зближення – технічний прогрес часто виконується малими за приростом новизни кроками: модель існуючого класу об'єктів коректується, проводиться моделювання, накопичення знань на віртуальній реальності, потім створюється нова або модифікується існуюча виробнича система. Тепер уже модель коректується за новою системою. Стандартний шлях створення нових виробничих систем – проектування, випуск проектної документації, заборона роботи без останньої.

## Крок 5 Моделювання детермінованої системи

Задаємо тестові параметри

$$Td := 100; k := 1..Td; \Delta T := 0.1; x1_1 := 0.1; x2_1 := 0.01.$$

Конкретизуємо і тестуємо функції зв'язків

$$fmm0(x) := 12; fpm0(x) := 0.8 \cdot \text{rnd}(x); fpp0(x) := 6 \cdot \sqrt{x}; fmp0(x) := 0.5 \cdot \sqrt{x}.$$

$$VPm := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; VPP := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; VPm := 0;$$

темп витрат на розробку моделі:  $up(kk) := 0.5$ ;

темп витрат на створення виробничої системи:

$$um(kk) := \frac{1}{kk}; up(kk) := \sqrt{kk \cdot 0.01}.$$

$$Fmod(x1k, x2k, fmm, fpm, um, kk) := (fmm(x1k)) \cdot (1 - x1k) \cdot um(kk) \cdot fpm(x2k);$$

$$Fprs(x1k, x2k, fpp, fmp, up, kk) := fpp(x2k) \cdot (1 - x2k) \cdot up(kk) \cdot fmp(x1k).$$

Записуємо робочі рівняння системи

$$\begin{pmatrix} x1_{k+1} \\ x2_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x1_k \\ x2_k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} Fmod(x1_k, x2_k, fmm0, fpm0, um, k) \\ Fprs(x1_k, x2_k, fpp0, fmp0, up, k) \cdot (k > 40) \end{bmatrix} \cdot \Delta T.$$

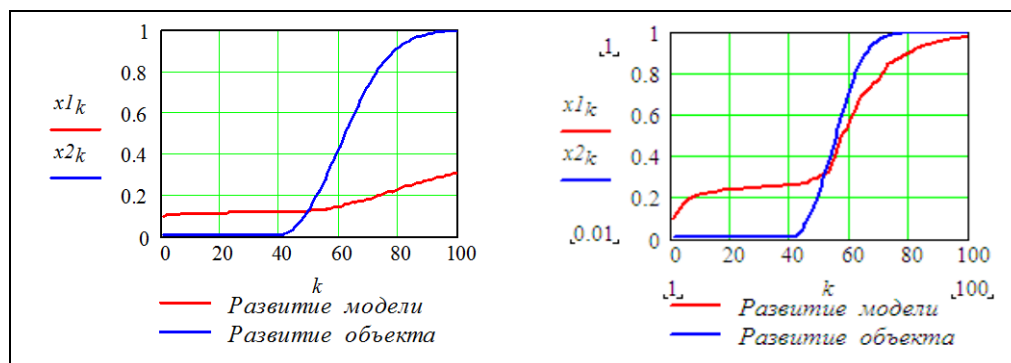
Запис в загальному вигляді: стан  $(x1_k, x2_k)$ , оператор

$$Fmmod = \begin{pmatrix} Fmod(x1_k, x2_k, fmm0, fpm0, um, k) \\ Fprs(x1_k, x2_k, fpp0, fmp0, up, k) \end{pmatrix}.$$

Метамодель системи «модель–об'єкт» – пара:

$$[(x1_k, x2_k), Fmmod].$$

Виводимо графіки двох процесів з різними темпами розвитку.





## Крок 6. Розробка базового модуля «довільна нечітка функція»

Задача: деяка величина  $X$  є випадковою або нечіткою. Вважаються заданими розподіли ймовірності  $dpr(X)$  або нечіткості.  $dfz(X)$ . Задана деяка функція  $Y = fp(X)$ . Інтерпретація цих функцій – всілякі виробничо-технологічні залежності типу «витрати ресурсів–випуск», витрати палива на кілометр, експлуатаційні витрати на заданий випуск продукції, залежність якості продукції від об'єму випуску. Ці залежності важко вимірювати, ідентифікувати, вони природним чином є нечіткими і стохастичними. З іншого боку, ці характеристики вкрай важливі для управління виробничими системами. Додатковий, специфічний чинник – ці характеристики конфіденційні незалежно від того, вищі або нижчі вони від середнього галузевого рівня. Дуже неважко уявити таку ситуацію: деяка виробнича організація бажає достовірно знати свої позиції в деякому сегменті виробництва. Таку інформацію можна отримати на основі розрізнених статистичних даних і наших моделей.

Сьогодні статистика впевнено відстає від технічного прогресу для інноваційних і високотехнологічних виробництв. Отриманням цих функцій повинні займатися технологи, конструктори. Функції  $fp(X)$  визначені в обмеженій області  $0 \leq X \leq X_{max}$ .  $Y_{min} \leq Y \leq Y_{max}$ . Розподіли ймовірності  $dpr(X)$  або розподіли нечіткості  $df(X)$  вважаємо параметрично залежними від  $X, Y$ :

$$dpr(X) \Rightarrow dpr(X, Vpp(X, Y)); dfz(X) \Rightarrow dfz(X, Vpf(X, Y)),$$

де  $Vpp(X, Y), Vpf(X, Y)$  – параметри розподілу.

Запишемо формальний вираз для нечіткої функціональної залежності  $Y = fp(X) \Rightarrow fpf(X, Y)$ , де  $X$  – значення вхідної змінної,  $Y$  – значення розмитої вихідної змінної,  $fpf$  – функція ймовірності (приладдя), що зазвичай нормується:

– для імовірнісної невизначеності для всіх  $X_{min} \leq x \leq X_{max}$

$$\int_{Y_{min}}^{Y_{max}} fpf(x, y) dy = 1.$$

– для нечіткої невизначеності для всіх  $X_{min} \leq x \leq X_{max}$  і  $\max(fpf(x, y)) = 1$ .

Зручніше представити розмиту функцію як розподіл ймовірності змінним середнім і розкидом, залежними від  $X$ .

**Приклад 1.** Побудова розмитої функції класу «обмежена, що монотонно зростає».

6.1. Задаємо детерміновану функцію зв'язку

$$F(x, vpF) := F4(x, vpF_1, vpF_2, vpF_3); \quad pF(x, vpF) := \frac{d}{dx} F(x, vpF).$$

6.2. Задаємо розподіл ймовірностей

$$fpr(y, \mu, \sigma) := dnorm(y, \mu, \sigma).$$

6.3. Задаємо залежності параметрів розподілу від вхідної змінної  $X$

$$f\mu(x, vpF) := F(x, vpF); \quad f\sigma(x, vpF, kz) := kz_1 \cdot (pF(x, vpF) + kz_2).$$

6.4. Збираємо розмиту функцію

$$Ffz(x, y, vpF, kz) := fpr(y, f\mu(x, vpF), f\sigma(x, vpF, kz)).$$

6.5. Реалізація значення нечіткої функції

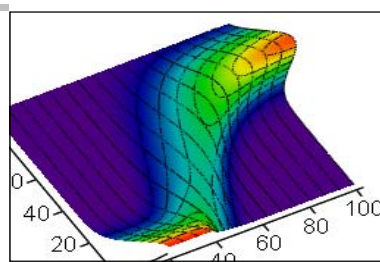
$$Yy(x, vpF, kz) := \begin{cases} qq \leftarrow rnorm[1, F(x, vpF), kz_1 \cdot (pF(x, vpF) + kz_2)] \\ kk \leftarrow \max(qq, 0) \end{cases}.$$

Задаємо значення параметрів і тестуємо розмиту функцію. Робимо дискретизовану версію функції

$$y := 1..100; \quad Nk := 100; \quad i := 1..Nk; \quad j := 1..Nk; \quad dx := 3; \quad dy := 1;$$

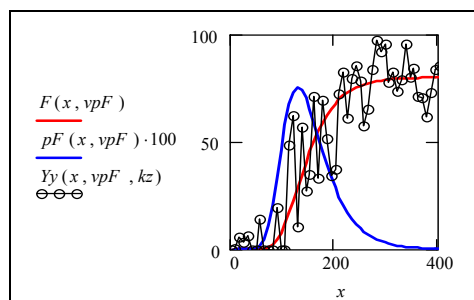
$$kz := \begin{pmatrix} 20 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \quad vpF := \begin{pmatrix} 8 \\ 0.025 \\ 25 \end{pmatrix}; \quad ffz_{i,j} := Ffz(i \cdot dx, j \cdot dy, vpF, kz).$$

Нижче подано графіками всі наведені вище вирази.

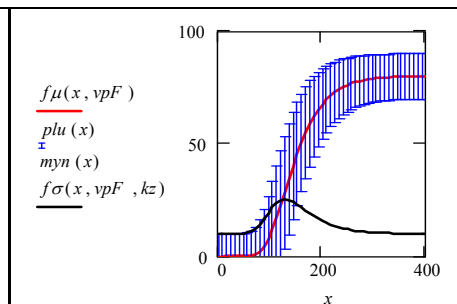
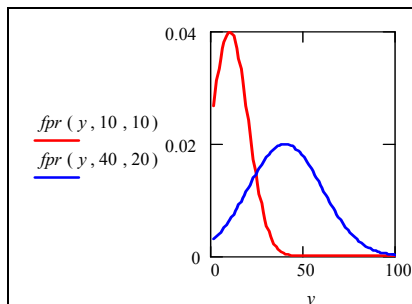


$ffz$

$$myn(x) := f\mu(x, vpF) - f\sigma(x, vpF, kz)$$



$$plu(x) := f\mu(x, vpF) + f\sigma(x, vpF, kz)$$



**Приклад 2.** Побудова розмитої функції класу «обмежена функція з одним екстремумом на інтервалі визначення».

1. Задаємо детерміновану функцію зв'язку

$$Fm(x, vpF) := vpF_1 \cdot dchisq(0.1x, vpF_2) + 10.$$

2. Задаємо розподіл ймовірностей

$$fpr(y, \mu, \sigma) := dnorm(y, \mu, \sigma).$$

3. Задаємо залежності параметрів розподілу від вхідної змінної  $X$

$$f\mu(x, vpF) := Fm(x, vpF); f\sigma(x, vpF, kz) := kz_1 \cdot (Fm(x, vpF) + kz_2).$$

4. Збираємо розмиту функцію

$$Ffz(x, y, vpF, kz) := fpr(y, f\mu(x, vpF), f\sigma(x, vpF, kz)).$$

5. Реалізація значення нечіткої функції

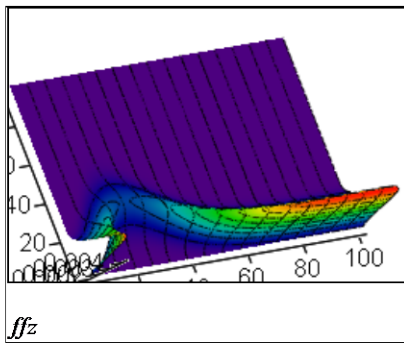
$$Ym(x, vpF, kz) := \begin{cases} qq \leftarrow rnorm[1, Fm(x, vpF), kz_1 \cdot (Fm(x, vpF) + kz_2)] \\ kk \leftarrow \max(qq, 0) \end{cases}$$

Задаємо значення параметрів і тестуємо розмиту функцію. Робимо дискретизовану версію функції  $y := 1..100$ ;  $Nk := 100$ ;  $i := 1..Nk$ ;

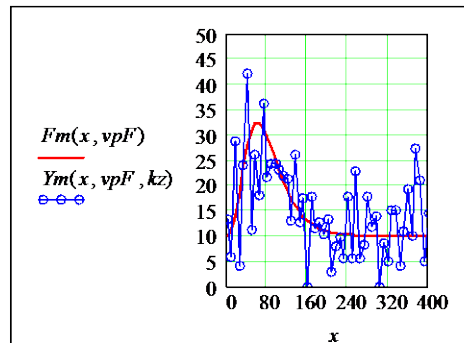
$$j := 1..Nk; dx := 3; dy := 1; kz := \begin{pmatrix} 0.3 \\ 10 \end{pmatrix}; vpF := \begin{pmatrix} 200 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$ffz_{i,j} := Ffz(i \cdot dx, j \cdot dy, vpF, kz) \cdot (\max(0, Ffz(i \cdot dx, j \cdot dy, vpF, kz))).$$

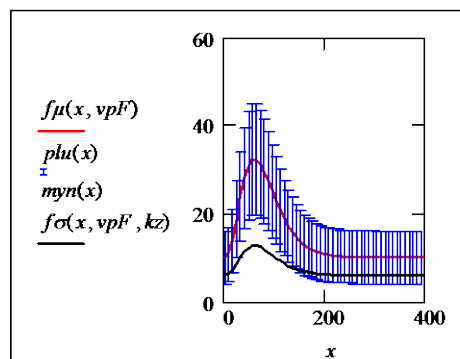
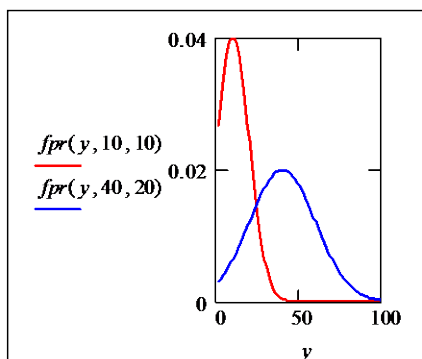
Нижче подано графіками всі подані вище вирази.



$$myn(x) := f\mu(x, vpF) - f\sigma(x, vpF, kz)$$



$$plu(x) := f\mu(x, vpF) + f\sigma(x, vpF, kz)$$



## Крок 7. Моделювання нечіткої системи

Ми побудували чітку модель динаміки системи, що розвивається, «імітаційна модель, об'єкт моделювання», побудували моделі імовірнісних (нечітких) нелінійних зв'язків.

Задаємо тестові параметри

$$Td := 100 ; k := 1.. Td ; \Delta T := 0.1 ; x10 := 0.1 ; x20 := 0.01.$$

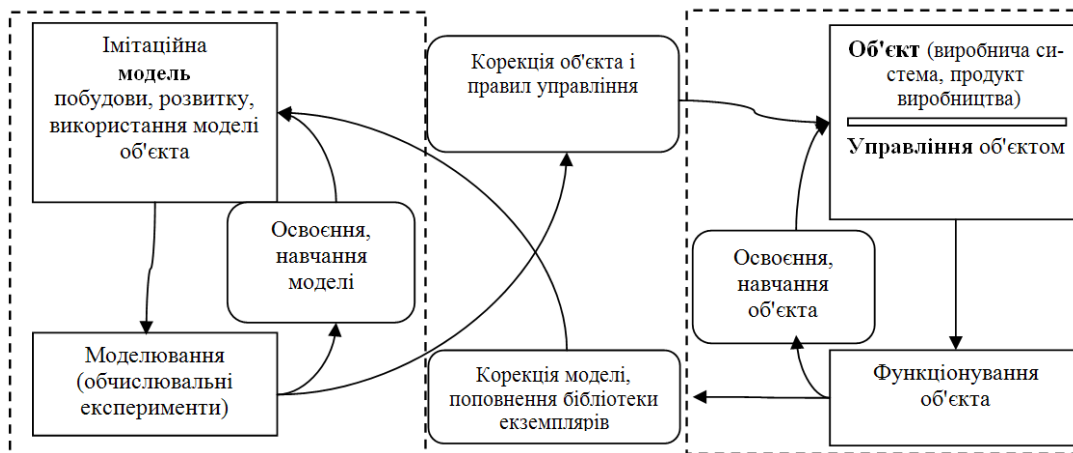
Конкретизуємо і тестуємо функції зв'язків

$$fmm0(x) := 12; fpm0(x) := 0.8 \cdot rnd(x); fpp0(x) := 6 \cdot \sqrt{x}; fmp0(x) := 0.5 \cdot \sqrt{x}.$$

$$VPm := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; VPr := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; VPm := 0.$$

Задаємо темп витрат на розробку моделі  $up(kk) := 1$ , темп витрат на створення виробничої системи.

Реалізуємо блоки (схема, крок 2) моделі



Задаємо чіткі і нечіткі функції зв'язків згідно з алгоритмом конструювання нечітких моделей, опис яких наведений вище:  $fmm$ ,  $fpm$ ,  $fpp$ ,  $fmp$ . Зафарбовані вирази – контроль процесу розробки.

1.1 Детермінована функція зворотного зв'язку моделі

$$fmm(x, vpF) := vpF_1 \cdot dchisq(0.1x, vpF_2) + 10 .$$

1.2 Розподіл ймовірності (нечіткості)

$$fpr(y, \mu, \sigma) := dnorm(y, \mu, \sigma)$$

1.3 Залежності параметрів розподілу від вхідної змінної  $X$

$$f\mu(x, vpF) := fmm(x, vpF); f\sigma(x, vpF, kz) := kz_1 \cdot (fmm(x, vpF) + kz_2).$$

#### 1.4 Розмита функція

#### 1.5 Реалізація значення нечіткої функції

$$Y_{mm}(x, vpF, kz) := \begin{cases} qq \leftarrow rnorm[1, fmm(x, vpF), kz_1 \cdot (fmm(x, vpF) + kz_2)]_1 \\ kk \leftarrow \max(qq, 0) \end{cases} ;$$
$$kz_1 := \begin{pmatrix} 0.3 \\ 10 \end{pmatrix}; vpF_1 := \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; kz_2 := \begin{pmatrix} 20 \\ 0.5 \end{pmatrix}; vpF_2 := \begin{pmatrix} 8 \\ 0.025 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

#### 2.1 Детермінована функція впливу об'єкта на модель

$$fpm(x, vpF) := F4(x, vpF_1, vpF_2, vpF_3); pfp_m(x, vpF) := \frac{d}{dx} fpm(x, vpF).$$

#### 2.2 Розподіл ймовірності (нечіткості)

$$fpr(y, \mu, \sigma) := dnorm(y, \mu, \sigma).$$

#### 2.3 Залежності параметрів розподілу від вхідної змінної $X$

$$f\mu(x, vpF) := fpm(x, vpF); f\sigma(x, vpF, kz) := kz_1 \cdot (pfp_m(x, vpF) + kz_2).$$

#### 2.4 Розмита функція.

#### 2.5 Реалізація значення нечіткої функції

$$Y_{pm}(x, vpF, kz) := \begin{cases} qq \leftarrow rnorm[1, fpm(x, vpF), kz_1 \cdot (pfp_m(x, vpF) + kz_2)]_1 \\ kk \leftarrow \max(qq, 0) \end{cases}$$

#### 3.1 Детермінована функція зворотного зв'язку об'єкта

$$fpp(x, vpF) := vpF_1 \cdot dchisq(0.1x, vpF_2) + 14;$$

#### 3.2 Розподіл ймовірностей

$$fpr(y, \mu, \sigma) := dnorm(y, \mu, \sigma).$$

#### 3.3 Залежності параметрів розподілу від вхідної змінної $X$

$$f\mu(x, vpF) := fpp(x, vpF); f\sigma(x, vpF, kz) := kz_1 \cdot (fpp(x, vpF) + kz_2).$$

#### 3.4 Розмита функція.

#### 3.5 Реалізація значення нечіткої функції

$$Y_{pp}(x, vpF, kz) := \begin{cases} qq \leftarrow rnorm[1, fpp(x, vpF), kz_1 \cdot (fpp(x, vpF) + kz_2)]_1 \\ kk \leftarrow \max(qq, 0) \end{cases} .$$

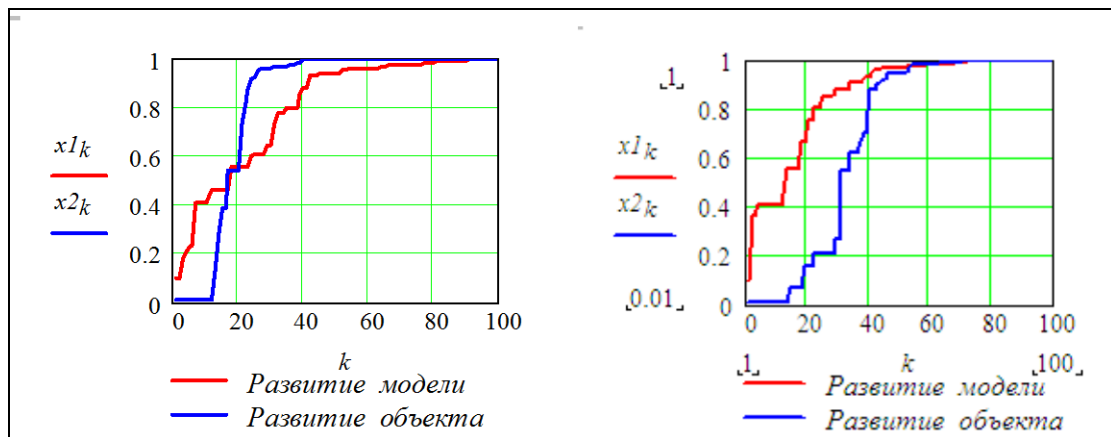
### Крок 8. Розробка програми для нечіткої метамоделі

З розроблених моделей динаміки розвитку об'єкта і його моделі збираємо програму, підставляємо тестове управління процесами. Синтез оптимального управління розвитком – друга частина розробки.

```

ModRaz :=
  x11 ← x10
  x21 ← x20
  for k ∈ 1..Td
    {
      x1_{k+1} ← x1_k + Fmodp(x1_k, x2_k, kz1, kz2, vpF1, vpF2, um) ΔT
      x2_{k+1} ← x2_k + Fprsp(x1_k, x2_k, kz3, kz4, vpF3, vpF4, up) · (k > 10) · ΔT
    }
  vyx ← (
    x1
    x2
  )
  
```

Результати моделювання – дві реалізації випадкового процесу.



### Крок 9. Розробка модуля статистики для процесу розвитку системи «модель–об'єкт»

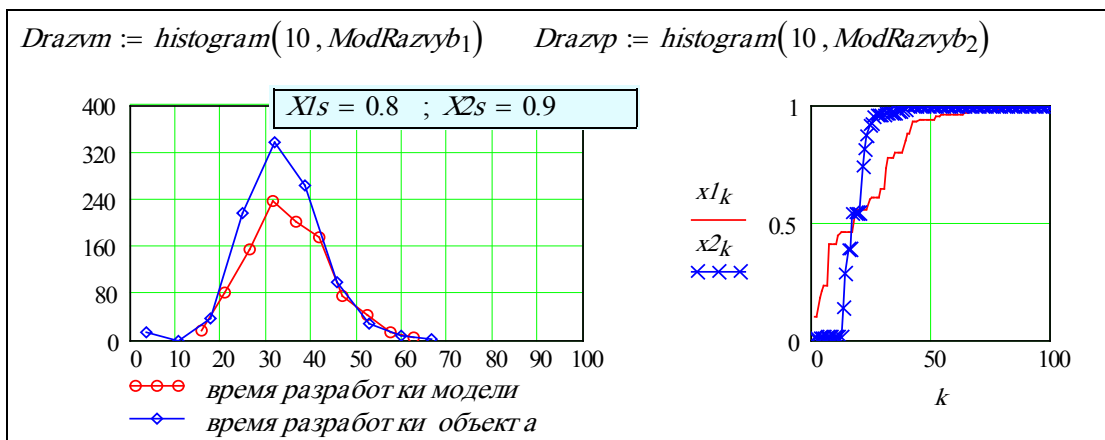
Процеси розвитку системи «модель – об'єкт» в рамках розробленої моделі є складні для аналітичних методів процеси галуження. Для керівників і аналітиків просто необхідна кількісна інформація для розуміння і оцінки ризиків розвитку. Ця інформація формально відсутня для інноваційних продуктів і виробництв, за визначенням. Ми враховуємо, що будь-які інноваційні розробки використовують свій і зовнішній досвід і статистику попередніх розробок. Таким чином в інноваційних розробках можливо зібрати неповну статистику від різних непрямих аналогів. Наведемо приклад програми:

```

ModRazvyb :=
  x11 ← x10
  x21 ← x20
  X1sat ← X1s
  X2sat ← X2s
  Kvyb ← 1000
  for i ∈ 1..Kvyb
    for k ∈ 1..Td
      x1k+1 ← x1k + Fmodp(x1k, x2k, kz1, kz2, vpF1, vpF2, um) ΔT
      x2k+1 ← x2k + Fprsp(x1k, x2k, kz3, kz4, vpF3, vpF4, up) · (k > 10) · ΔT
      Tmsatk ← (X1sat - 0.1 < x1k < X1sat + 0.1) · k
      Tpsatk ← (X2sat - 0.1 < x2k < X2sat + 0.05) · k
      Vybmj ← max(Tmsat)
      Vybpj ← max(Tpsat)
    vyx ← ( Vybm
            Vybp )

```

Модель інноваційного об'єкта, побудована на базі породжувальних механізмів, а не статистичних даних, може стати джерелом віртуальної статистики. Комплексне використання віртуальної і реальної статистики дозволяє підвищити якість прогнозування і управління за рахунок взаємоконтролю і взаємодоповнення реальних і віртуальних статистичних даних. Модифікуємо програму *ModRaz*. Для практики корисні статистичні характеристики таких показників, як час початку випуску нової продукції, рівень задовільності моделі в середині планового періоду. Останній показник важливий для прийняття рішення про початок створення нового продукту. Приклад результатів моделювання. Розмір вибірки – 1000.



**Крок 10 – Трудовитратна робота по «прикріпленню»** (калька з англійської, що точніше передає суть операції «ідентифікація моделі за неповних і недостовірних статистичних даних реальної реальності»).

### **5.7 Аналіз адекватності розроблених моделей**

Математичне моделювання встановлює зв'язки між значеннями різних змінних, визначених в процесі вимірювань. Математичне моделювання, базуючись на вимірюваннях, в свою чергу, є фундаментом для методів прийняття рішень і управління. Математичні моделі розділяють на індикаторні (що зв'язують індикаторні змінні) і латентні (що зв'язують латентні змінні). Індикаторно-латентні моделі відносять до вимірювань – метричних моделей, а не до математичного моделювання. Тобто, слід чітко розділяти математичні моделі і моделі-апроксимації: якщо певна залежність знайдена емпірично, як функція, що «найкращим чином» наближує емпіричні дані – це апроксимація, що відноситься до рівня вимірювання; якщо та ж залежність знайдена з теоретичних міркувань, ширших ніж зв'язок між цими змінними, то це вже математична модель і така модель відноситься до рівня математичного моделювання. Ця математична модель повинна не тільки підвести «теоретичну базу» під дану емпіричну залежність, але і пояснити певні інші емпіричні залежності [275].

Багато уваги приділяється проблемі в роботах Форрестера. Замість середньоквадратичної помилки Форрестер пропонує розгорнуту процедуру оцінки адекватності моделі. Модель повинна відтворювати властивості реального об'єкта: стійкість, коливальність, катастрофічні режими. Впевненість в придатності моделі як експериментального інструмента для вивчення результатів змін у виробничій системі базується тільки на впевненості окремих компонентів – функціональних моделях і на тому, що в сукупності вони відображають релевантні для користувача сторони поведінки системи, що моделюється.

Форрестер визначив специфіку моделей технічної системи, яка тільки проектується [272]. Головною задачею порівняння моделі і майбутньої реальної системи є виявлення можливостей відображення поведінки реальної системи, підтвердження адекватності головних структурних елементів моделі. Впевненість в коректності основних



структурних компонентів реальної системи повинна бути для всіх компонентів системи, що створюються чи модифікуються.

Після цього може бути сформульовано твердження, що загальні характеристики, отримані на новій моделі, є достовірними і повністю відповідають напрямку роботи по зміні реальної системи.



Рисунок 5.20 – Схема процедур встановлення адекватності моделі розвитку

Наведемо цитату: «Ця числова модель не є результатом статистичного аналізу даних з часових рядів, якими звичайно користуються. Йдеться про таку модель, котра є відображенням структури системи. Тому модель добра в такій же мірі, як і пропозиції, що лежать в її ос-

нові. Інші моделі недобрі тому, що не враховують нелінійності, зворотні зв'язки, або через дефіцит знань та сприйнятливості їх творців» [272]. Схема на рис. 5.20 – це формалізація і узагальнення з робіт зі створення моделей.

Моделі, що розроблені в даній роботі відносяться до класу нелінійних стохастичних динамічних систем з розривними функціями управління. Тому, на відміну від моделей-апроксимацій, процедура встановлення адекватності розпадається в послідовність певних процедур, кожна з яких містить певні проблеми. Саме ці проблеми розглядаються в роботах Р. Беллмана з прийняття рішень в умовах невизначеності. Пункти перевірки адекватності є поєднання логічних «І»: якщо модель неадекватна за результатами перевірки на певному пункті, вона неадекватна взагалі.

**Перший пункт перевірки – адекватність функціональних субмоделей.** В даній роботі функціональні субмоделі – функції виробництва, розвитку, освоєння взяті з визнаних джерел [213, 214, 272, 276, 277, 281]. В основі виробничих функцій лежить комплекс законів фізичного характеру: термодинаміки, гідро- і газодинаміки, хімії, обробки металів. Достовірність цих функцій на рівні достовірності законів фізики. За своїм топологічним характером узагальнені виробничі функції не відрізняються від дросельних характеристик двигунів внутрішнього згорання, характеристик електронних підсилювачів, теплообмінників. Для складних виробів виробнича функція визначається мережевими операційними схемами збирання виробів. В теорії виробничих функцій розрізняють «швидкі» і «повільні» виробничі функції. При необхідності швидко змінювати темп виробництва змінюють в певних межах подачу ресурсів і параметри технологічного процесу, збільшують інтенсивність роботи, час роботи. Повільні виробничі функції відображують процеси нарощування чи згортання виробничих потужностей. На першому рівні в моделях розвитку закладені достовірні, структурно адекватні моделі технологічних елементів і систем. Так виконано першу необхідну умову адекватності моделі розвитку.

**Другий пункт перевірки – адекватність моделі системи до параметричного класу «узагальнена виробнича система».** Суть процедури, згідно з Форрестером – збирання великих масивів наявної кі-

лькісної і описової інформації відносно систем також технологічного класу, наприклад хімічних реакторів – стиролу, бензину, біореакторів, металообробних комплексів, прокатних станів, технологічних ліній виробництва цукру, кераміки. Синтез такої розсіяної інформації дає можливість надійно визначити загальні топологічні властивості окремих класів нелінійних динамічних систем – стійкість, зокрема, раптова втрата стійкості, коливальні режими, автоколювання, розривність оптимальних управлінь, залежність усталеного стану від початкових умов. Не слід вважати ці властивості інтерпретацією емпіричних даних, названі характеристики є об'єктами «якісної теорії динамічних систем». Використані і розроблені моделі розвитку не можуть бути якісно неадекватними при виконанні умови адекватності функціональних субмоделей. Порівняльний аналіз показав, що параметричним настроюванням можна відтворити частотні і рангові розподіли для певних змінних стану системи. Найбільш важливим пунктом в якісній адекватності моделей є відтворювання розривних характеристик розподілених технологічних систем. Наведемо приклади: оптимальний розподіл навантаження елементів при довільних змінах сумарного навантаження. Раптові зміни оптимальних управлінь – комплексна важлива і «одвічна» проблема, в [173] з цього приводу сказано: класична форма динамічних моделей базується на використанні систем лінійних диференціальних рівнянь. Такі моделі незручні, тому що системи, які розвиваються описуються диференціальними рівняннями з негладкими, розривними і стохастичними правими частинами. Крім того, класичні форми подання динаміки малоприсади для опису реальних виробничих систем. Сенс розвитку є саме в пошуку і створенні можливостей використання виробничих потужностей з більш ефективними технологіями. Беллман за рахунок витончених аналітичних конструкцій зводив цю проблему до отримання рівняння для визначення моменту «переключення» управління. В роботі [173] для цього створюється новий клас інтегральних рівнянь, окремий випадок яких інтеграл згортки для визначення реакції лінійної динамічної системи на довільний вхідний сигнал. Складність цих двох підходів зростає швидше, ніж розмірність задачі. Тому аналітичні моделі обмежуються системами 2–3-го порядку.

У використаних і розроблених моделях відтворення розривних управлінь є побічним, вторинним результатом. З точки зору адекватного відображення головної властивості процесів розвитку розроблені моделі не мають обмежень по розмірності багатопродуктової системи і виду нелінійностей. Тобто розроблена модель радикально краща моделей-аналогів. Суть такого покращення не в створенні нових аналітичних методів, а в раціональній декомпозиції та відмові від аналітичних і пошукових методів на нижньому рівні. В методі оптимального агрегування на нижньому рівні екстремум функції однієї змінної знаходиться методом прямого перебору, а в розв'язанні варіаційної задачі максимум функції Гамільтона (однієї змінної в еквівалентній оптимально агрегованій моделі) теж знаходиться методом прямого перебору. Метод прямого перебору не має обмежень по виду функції.

Схема на рис. 5.20 є узагальненням з аналізу адекватності моделей систем, що розвиваються, і також елементом методологічної новизни: додано блок «інші системи даного параметричного класу». Без цього пункту будуть «науково незаконними» моделі ще неіснуючих реальних систем. Моделі-аналоги утворюють тимчасовий еталон для встановлення адекватності моделі реально створюваної системи. Таким чином і за другим пунктом розроблена модель є адекватною в своєму параметричному класі.

**Третій пункт перевірки – адекватність за середньоквадратичним критерієм.** На цьому кроці приходимо до стандартної наукової процедури – визначення міри розходження між двома функціями «емпірична залежність» та «модельна залежність». Формально ця процедура відповідає (див. рис. 5.20) перевірці адекватності для моделі-апроксимації (характеристики електродвигуна, гідроприводу, тиристора, тріода), де все потрібне задане чітко і однозначно. Однак, для моделей процесів розвитку в цьому пункті виникають специфічні проблеми.

*Проблема 1.* Відсутність еталонної реальної системи – абсолютна (реальна система ще не створена) і відносна (дані по поведінку реальної системи недоступні, неповні, зашумлені). При наявності емпіричних даних ці дані, майже завжди, є реалізаціями випадкових процесів (в розробленій моделі це відображено в ймовірнісній функції освоєння). Виникають дві альтернативи вирішення проблеми: ввести нечітку міру адекватності для двох «розпливчастих» функцій; за ета-

лон взяти статистичне середнє (нелінійну регресію), для чого треба мати достатню вибірку.

*Проблема 2.* Створення моделі-апроксимації. Суть моделювання складних динамічних систем в тому, що ми отримуємо параметризовану модель класу. Тут є дуже близька аналогія з об'єктним програмуванням і те, що потрібно для виконання канонічної процедури перевірки адекватності, – це отримання «екземпляра класу». Тобто вирішення проблеми – параметрична ідентифікація моделі, побудованої на базі породжувальних механізмів. Треба знайти такий набір параметрів, що дає мінімальну помилку апроксимації емпіричних даних. У випадку, коли модель повинна бути моделлю-предиктором для конкретної технологічної системи, і повинна *відслідковувати зміни* в об'єкті моделювання. В термінах адаптивних систем управління це процес настроювання. Тепер сформулюємо послідовність операцій для третього, останнього кроку встановлення адекватності моделі емпіричним даним:

- формування еталонних емпіричних даних – усереднення, урахування випадкових і систематичних помилок вимірювання, робастне оцінювання – аналіз даних на наявність великих формальних помилок, фільтрація;

- параметрична ідентифікація емпіричних даних відносно параметризованої моделі класу процесів розвитку – аналогом процедури може бути типова процедура «перевірки статистичних гіпотез» – ідентифікації емпіричних частотних розподілів (гістограм) певним «теоретичним розподілом»;

- отримання міри розходження, звичайно інтегральної квадратичної помилки і прийняття рішення: модель «адекватна», «неадекватна» в залежності від значення певного критерію. Для ідентифікації частотних розподілів використовуються критерії Пірсона, Колмогорова та ін. Для методів перевірки адекватності моделей розвитку технологічних систем відсутні не тільки результати, але і постановки.

Модель процесу розвитку не створюється «з нуля», одномоментно, а в процесі розвитку цієї моделі. Тому процедура контролю адекватності розподіляється за етапами розвитку моделі, вбудовується в процес побудови і модифікації моделі як обов'язкова процедура контролю програмних та алгебраїчних помилок і оцінка якості моделі за термінологією Форрестера. Отримано задовільне вирішення пробле-

ми. Окреслені задачі для наступних досліджень в цьому напрямку. Перевірку адекватності переносимо в наступний розділ, де об'єднуємо з прикладами застосування розробленої системи для задач організації, де виконується запровадження результатів досліджень.

**Числові оцінки адекватності моделей.** Порівняємо на прикладах міжрівневі і специфічні властивості моделей і об'єктів моделювання. Розглянемо моделі електродвигунів, транзисторів, гідроприводів і паралельно – моделі збиральних конвеєрів, парових котлів, хімічних реакторів, виробничих систем і систем виробників.

Спільне у цих двох груп моделей – невичерпна складність електричних, термодинамічних, хімічних процесів. Суттєва відмінність – масштаби і можливості натурних експериментів та коректних вимірювань змінних стану, збурень, управлінь і параметрів. В цьому плані виключається можливість змістовного порівняння певних числових характеристик об'єкта і моделі.

*Невизначеності.* Для першої групи об'єктів можна виключити більшість збурень, для об'єктів другої групи можливості експериментів обмеженні, статистичні дані не відповідають вимогам теорії ймовірності. Невизначеності в таких системах є природною властивістю системи.

*Еволюція.* Характерна властивість систем другої групи – нестационарність, яка має такі інтерпретації: старіння, наприклад – «отруєння» каталізатора в реакторах, нагар і накип в котлоагрегатах, навчання і освоєння у високотехнологічних інноваційних системах. Для трьох рівнів перевірки адекватності (див. рис. 5.20) отримані такі діапазони адекватності моделей:

- рівень 1, моделі функцій виробництва, розвитку, освоєння – 3–5 %;
- рівень 2, моделі процесів розвитку, оптимальні стратегії – 5–10 %;
- рівень 3, моделі систем виробників, рангові розподіли для продуктів, виробників – 5–15 %.

При переході до рівнів 2 і 3 маємо справу з нечіткими, стохастичними та нестационарними об'єктами, для яких застосування критеріїв довіри не є адекватним. Цю ситуацію Дж. Форрестер назвав «хибні кореляції».

## Висновки до розділу 5

В розділі виконано розробку і дослідження останньої ланки процесу побудови і використання математичних моделей – систем інтерфейсів відповідних моделей. Розглянуто зміст запроваджень результатів досліджень в організаціях і підприємствах. Матеріали розділу відповідають напрямку «інформаційні технології в дослідженнях на віртуальній реальності». В доступній літературі з цих напрямків даються загальні правила побудови інтерфейсів та проведення обчислювальних експериментів і абстрактні схеми без прив'язки до нетривіальних прикладів саме інноваційного розвитку. Не знайдено прямих аналогів моделей даної роботи. Виконано узагальнення інтерфейсів за областями призначення: засоби і технології проведення досліджень на моделях; засоби і технології використання моделей в навчальному процесі.

Вибрано структуру інтерфейсів і згідно з цією структурою виконано розробки інтерфейсів для моделей, розглянутих в розділах 2, 3, 4:

- інтерфейси і результати моделювання агрегованих моделей;
- інтерфейси і результати моделювання відмовостійких систем;
- інтерфейси і результати моделювання – імітаційні моделі виробничих систем.

Інноваційний характер розвитку технічних систем вимагає відповідних змін в змісті і структурах навчального процесу в системі вищої освіти. Нові моделі і методи вводились в навчальний процес за схемою: теми дипломних і курсових проектів, методичне забезпечення практичних і лабораторних занять, підготовка посібників – паперових, електронних, дистанційних. Результати досліджень відображені в [33, 34, 36–38, 47, 48, 50, 61–65, 67, 79, 80, 82, 88, 91–93, 127, 129, 131, 132].

## ВИСНОВКИ

В результаті проведених досліджень зроблено суттєвий внесок в розв'язання актуальної науково-практичної проблеми відсутності методологічної основи для побудови цілісного підходу до моделювання процесів функціонування та розвитку розподілених виробничих систем, що зумовлює недостатню ефективність функціонування і розвитку таких систем, шляхом створення ефективних математичних моделей та імітаційного моделювання процесів розвитку розподілених виробничих систем. За результатами досліджень можна зробити такі висновки:

1. Виконано конструктивний (на базі комп'ютерного моделювання прототипів) аналіз стану існуючих методів створення та структур математичних моделей процесів розвитку сучасних виробничих систем, на базі якого вибрано структури виробничих систем як об'єктів управління, структури системи моделей об'єкта і декомпозиційні структури однокрокових і багатокрокових задач оптимального управління функціонуванням і розвитком виробничої системи, що дозволило сформулювати мету дослідження.

2. Вперше розроблено методологію побудови еквівалентних оптимальних елементів для паралельних, послідовних і кільцевих структур виробничих систем на базі методу оптимального агрегування, що відрізняється від існуючих методів агрегування отриманням оптимальної характеристики «вхід–вихід», а від існуючих методів оптимізації розподілу ресурсів – декомпозицією багатовимірної задачі оптимізації в послідовність одновимірних задач. Це в підсумку робить метод нечутливим до виду функцій виробництва, і малочутливим до розмірності виробничої системи, що дозволяє будувати ефективні моделі для оптимізації процесів функціонування і розвитку оптимально агрегованих виробничих систем.

3. Одержав подальший розвиток метод Беллмана отримання наближень у просторі стратегій управління для розв'язання варіаційної задачі розвитку, що відрізняється від існуючого методу тим, що варіаційна задача розвитку виробничої системи розв'язується не методом динамічного програмування, а за принципом максимуму Понтрягіна з використанням дискретизованого гамільтоніану й уступки у максимальному значенні функціонала якості. Це дозволяє отримувати наближення оптимальної стратегії, що дають значення інтегрального критерію, яке відрізняється від оптимального щонайбільше на 3 %.

4. Вперше розроблено декомпозиційну структуру і відповідний метод моделювання і оптимізації процесу розвитку виробничої системи, що відрізняється від існуючих методів тим, що розв'язання варіаційної



задачі розвитку розбивається на дві послідовні задачі: задачу заміни виробничої системи оптимальним за критерієм сумарного виробництва еквівалентним елементом та – варіаційну задачу розвитку для еквівалентного оптимального елемента (одновимірного об'єкта), де управління на кожному кроці процесу це розподіл ресурсу виробничої системи між накопиченням і розвитком, що дає максимум функції Гамільтона, згідно з методом принципу максимуму. Це дає можливість отримувати розв'язання варіаційної задачі розвитку для розподілених виробничих систем з функціями розвитку класу «обмежені, нестрого монотонні і нестрого позитивні», а також суттєве зменшення обчислювальних витрат для розподілених виробничих систем великої розмірності.

5. Вперше запропоновано і реалізовано узагальнену структуру і метод локального управління окремим виробником в активному оточенні інших виробників певного сегменту виробництва, що відрізняється від існуючих методів декомпозицією процесу управління на такі кроки: визначення пропорції розподілу ресурсу виробничої системи між частками на ризикове і детерміноване управління; розподілу цих часток між виробництвами окремих продуктів. Запропонований метод локального управління є узагальненням – змішаною стратегією на базі відомих детермінованих та імовірнісних методів, що дає можливість адаптації локального управління станом сегмента виробництва до невизначеностей стану виробництва, потреб, появи нових технологій; можливість імітації управління окремим виробником сегменту за рахунок доступної статистики і побудови імітаційної моделі системи виробників для реалізації нового підходу «один на фоні всіх» до оцінки ризиків певного виробника з урахуванням імітації дій інших виробників.

6. Отримав подальший розвиток метод реалізації оптимального розподілу навантаження у виробничих системах з елементами, що працюють паралельно, в умовах високої невизначеності за допомогою екстремальної адаптивної системи, що відрізняється від існуючих методів оптимального адаптивного управління використанням послідовно працюючих регуляторів стабілізації навантаження виробничої системи і мінімізації витрат виробництва, де перший регулятор крім стабілізації навантаження генерує тестові дані для другого регулятора, що перерозподіляє навантаження для мінімізації витрат виробництва. Запропонований метод дає можливість забезпечити задовільну роботу виробничої системи при нелінійностях функцій виробництва елементів з класу нестрого монотонних і нестрого позитивних функцій.

7. Вперше запропоновано і реалізовано концепцію побудови системи моделей виробничої системи на базі трирівневої декомпозиції – структурної, функціональної, редуційної, що відрізняється від існуючих підходів і методів декомпозиції моделей виробничих систем

тим, що кожний елемент системи моделей є результатом застосування трьох відповідних операцій декомпозиції моделі різних структурних класів, з різними рівнями редукції (спрощення). Паралельне використання альтернативних моделей в регуляторах, ідентифікаторах, предикторах подібно неідентичному резервуванню в технічних системах підвищує ефективність і надійність. Запропонована декомпозиційна структура дозволяє формалізувати процес побудови моделей виробничих систем, що тільки створюються.

8. Вперше запропоновано, реалізовано і досліджено концепцію метамоделі (математичної моделі спільного розвитку системи) – «нова виробнича система та імітаційна модель цієї системи», що відрізняється від існуючих підходів і методів формуванням імітаційної моделі на базі трирівневої декомпозиції двостороннім інформаційним обміном «об'єкт–модель»; урахуванням дуальності цільового призначення моделі виробничої системи, як відображення суттєвих властивостей об'єкта, як еталона об'єкта і засобу отримання знань та досвіду для управління функціонуванням і розвитком об'єкта. Запропонована метамоделі в загальнотеоретичному аспекті є розширенням концепції спостерігача стану на систему з двох нелінійних і нестационарних об'єктів, що дає можливість для переходу від евристичних методів розробки моделей до ефективних формалізованих процедур.

9. Вперше запропоновано, реалізовано і досліджено систему імітаційних моделей «виробники, продукти, користувачі», де може бути відтворена поведінка (динаміка) кожного елемента кожного з класів «виробники», «продукти виробництва», «користувачі», що відрізняється від існуючих аналогів, тим, що систему складають моделі «виробники», «продукти», «користувачі» з різними рівнями агрегування, різними методами локального управління і різними рівнями спрощення. Альтернативні моделі є сумісними за вхідними і вихідними змінними, що дає можливість порівнювати результати моделювання за альтернативними моделями.

10. Практична цінність результатів роботи полягає у тому, що на основі розроблених концепцій, теоретичних засад, математичних моделей і методів створено нові методи і алгоритми. Створені на базі теоретичних результатів алгоритми і програми моделювання оптимальних процесів розвитку дозволяють підвищити ефективність автоматизованих систем управління розподіленими виробничими системами; усі розроблені моделі реалізовано як комплекс програм для досліджень актуальних практичних задач прогнозування, планування і вбудовування в автоматизовані системи, що у підсумку дозволяє отримувати оптимальні стратегії розвитку та досліджувати їх чутливість до варіацій параметрів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аакер Д. А. Бизнес-стратегия: от изучения рыночной среды до выработки беспроигрышных стратегий / Д. А. Аакер. – М.: Эксмо, 2007. – 464 с.
2. Аверин Г. В. Системодинамика: [монография] / Г. В. Аверин – Донецк: Донбасс, 2014. – 403 с.
3. Акерлофф Г. А. Рынок «лимонов»: неопределенность качества и рыночный механизм / Г. А. Акерлофф // THESIS: теория и история экономических и социальных институтов и систем. – М.: Эксмо, 1994. – № 5. – С. 91–104.
4. Аккоф Р. О целеустремленных системах / Р. Аккоф, Ф. Эмери. – М.: Сов.Радио, 1974. – 272 с.
5. Акофф Р. Идеализированное проектирование. Как предотвратить завтрашний кризис сегодня. Создание будущего организации / Р. Акофф, Д. Магидсон, Г. Эддисон. – М.:Баланс Бизнес Букс, 2007. – 320 с.
6. Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. – М.: Высшая школа, 2006. – 584 с.
7. Андрейчиков А. В. Интеллектуальные информационные системы / А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 424 с.
8. Арнольд В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
9. Баадер В. Биогаз: Теория и практика/ В. Баадер, Е. Доне, М. Бренндерфер. – М.: Колос, 1982. – 148 с.
10. Бадьора С. П. Декомпозиційні методи моделювання розвитку розподілених технологічних систем: дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02 / Бадьора С. П. – Вінниця, 2007. – 220 с.
11. Бадьора С. П. Задачі стратегічного управління в розподілених системах / С. П. Бадьора, В. А. Северілов, П. І. Салюк // XIII Міжнародна НТК «Автоматика–2006»: збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2006. – С. 201.
12. Бадьора С. П. Інтеграція навчання, наукових досліджень і практики на прикладі узагальнень задачі Марковіца / С. П. Бадьора,

І. С. Колесник // Міжнародна науково-техн. конф. «Інтернет-освіта-наука» : тези доповідей. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2002. – Т. 2. – С. 275–279.

13. Бадьора С. П. Моделі інноваційного розвитку розподілених систем. Параметрична оптимізація цінових стратегій / С. П. Бадьора, В. А. Северілов, М. В. Васильська // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – № 3. – С. 47–52.

14. Бадьора С. П. Оптимальне управління інтегрованою системою «виробництво–постачання». Задача згладжування / С. П. Бадьора // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2006. – № 1(5). – С. 58–62.

15. Бадьора С. П. Оптимальне управління інтегрованою системою «виробництво–постачання». Задача згладжування / С. П. Бадьора // VIII Міжнародна НТК «КУСС–2005»: збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2005. – С. 211.

16. Бадьора С. П. Організація графічної інформації в задачах нелінійного програмування / С. П. Бадьора, Т. В. Січко // МНТК «Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології» : тези доповідей. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – С. 192.

17. Бадьора С. П. Розподілена система управління запасами і виробництвом в умовах невизначеності / С. П. Бадьора, О. В. Гайдучок, П. В. Северілов // IV міжнародна конференція «Інтернет–освіта–наука» (ІОН–2004) : матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2004. – Т. 2. – С. 424–427.

18. Бадьора С. П. Система моделей класу «N-виробників, M-продуктів» / С. П. Бадьора, М. В. Васильська // VIII Міжнародна НТК «КУСС–2005» : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2005. – С. 212.

19. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

20. Бакаев А. А. Имитационные модели в экономике / А. А. Бакаев, Н. И. Костина, Н. В. Яровицкий. – К.: Наук. думка, 1978. – 304 с.

21. Баканов М. И. Теория экономического анализа / М. И. Баканов, А. Д. Шеремет. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 285 с.

22. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

23. Батенко А. П. Управление конечным состоянием движущихся объектов / А. П. Батенко. – М.: Советское радио, 1977. – 277 с.
24. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. – М.: Наука, 1969. – 131 с.
25. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М.: Издат. иностр. литер., 1962. – 233 с.
26. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией / Р. Беллман. – М.: Наука, 1964. – 317 с.
27. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Е. А. Берзин. – М.: Сов. радио, 1974. – 304 с.
28. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / Е. А. Берзин. – М.: Радио и связь, 1983. – 215 с.
29. Бланк И. А. Инвестиционный менеджмент / И. А. Бланк. – К.: Итем ЛТД, Юнайтед Лондон Трейд Лимитед, 1995. – 448 с.
30. Бобрышев Д. Н. Управление конфигурацией технических систем / Д. Н. Бобрышев, В. Э. Рексин. – М.: Советское радио, 1978. – 184 с.
31. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М.: Наука, 1966. – 308 с.
32. Боровская Т. Н. Декомпозиция задач в информационно-измерительных системах и выбор методов их решения: дис. ... канд. техн. наук. : 05.11.16/ Т. Н. Боровская. – Винница, 1985. – 229 с.
33. Боровська Т. М. Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах: монографія / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2009. – 229 с.
34. Боровська Т. М. Моделювання і оптимізація процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння: монографія / [Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов, П. В. Северілов]; за заг. ред. Т. М. Боровської. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 255 с.
35. Боровська Т. М. Моделювання та оптимізація систем автоматичного управління: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Т. М. Боровська, А. С. Васюра, В. А. Северілов. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 132 с.

36. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – 242 с.
37. Боровська Т. М. Спеціальні розділи вищої математики: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – 182 с.
38. Боровська Т. М. Теорія автоматичного управління. Частина 1. Аналіз САУ: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, А. С. Васюра. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – 97 с.
39. Боровська Т. М. Моделювання та оптимізація у менеджменті: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І. С. Колесник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2009. – 145 с.
40. Боровська Т. М. Моделювання задач управління інвестиціями: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І. С. Колесник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 178 с.
41. Боровська Т. М. Детермінована модель для прогнозування розвитку розподілених систем / С. П. Бадьора, Т. М. Боровська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 2. – С. 41–54.
42. Боровська Т. М. Імовірнісна модель для прогнозування розвитку розподілених систем / С. П. Бадьора, Т. М. Боровська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 1. – С. 45–61.
43. Боровська Т. М. Адаптивна система для оптимального розподілу навантаження між хімічними реакторами / Т. М. Боровська, А. С. Васюра, І. С. Колесник // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2005. – № 6. – С. 41–46.
44. Боровська Т. М. Аналіз навчального процесу в умовах МРС: обробка даних та моделі навчання. / Т. М. Боровська, В. А. Северілов // Нові технології. – 1991. – № 1–2. – С. 22–26, 59–64.
45. Боровская Т. Н. Анализ отказоустойчивости структур информационно-измерительных систем / Т. Н. Боровская, Е. Н. Мельник // Проектирование промышленных систем повышенной живучести: сб. науч. тр. – К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1986. – С. 42–49.

46. Боровська Т. М. Використання декомпозиційних структур для синтезу регуляторів / Т. М. Боровська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2000. – № 1. – С. 5–14.

47. Боровская Т. Н. Многошаговые процессы принятия решений при монотонно убывающих функциях полезности и стоимости измерительной информации / Т. Н. Боровская, Н. А. Нехаевская // Социотехнико-экономические системы: оптимальность, устойчивость, живучесть: сб. науч. тр. – К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1989. – С. 30–38.

48. Боровська Т. М. Моделі обміну ресурсами в системах з асиметричною інформаційною структурою / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 2. – С. 76–81.

49. Боровська Т. М. Моделювання багатопродуктових виробничих систем / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов, І. С. Колесник // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 1. – С. 48–54.

50. Боровська Т. М. Моделювання банківської системи / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов, П. В. Северілов // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2004. – № 1. – С. 53–61.

51. Боровська Т. М. Моделювання розвитку підприємства «на фоні» підприємств і споживачів сегменту ринку/ Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 1. – С. 21–27.

52. Боровська Т. М. Моделювання і оптимізація систем виробництва біогазу [Електронний ресурс] / Т. М. Боровська, П. В. Северілов // Наукові праці ВНТУ. – 2009. – № 2. – Режим доступу до журналу : <http://www.nbuu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009-2/2009-2.html>.

53. Боровська Т. М. Нечітка оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі з неопуклими виробничими функціями елементів / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 5. – С. 36–41.

54. Боровська Т. М. Одержання та обробка оцінок в модульно-рейтинговій системі організації навчання / Т. М. Боровська,

В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 1997. – № 3. – С. 96–104.

55. Боровська Т. М. Оптимальна система управління запасами при невизначеності попиту / Т. М. Боровська, А. С. Васюра, П. В. Северілов // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2006. – № 1. – С. 113–118.

56. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком багатопродуктової системи на базі методу агрегування / Т. М. Боровська, І. С. Колесник // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – № 3 – С. 113–119.

57. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Кредитні стратегії / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 6. – С. 173–180.

58. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Цінові стратегії / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 6. – С. 143–150.

59. Боровська Т. М. Оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі на базі агрегування виробничих функцій / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. – № 1 – С. 12–18.

60. Боровська Т. М. Оптимізація стратегій розвитку розподілених виробничих систем на базі агрегування виробничих функцій / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2005. – № 5. – С. 88–94.

61. Боровська Т. М. Проблеми розробки адаптивних САУ для масових об'єктів / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, А. С. Васюра // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 1999. – № 5. – С. 13–20.

62. Боровська Т. М. Розробка моделей узагальнених систем «виробники–продукти–споживачі» [Електронний ресурс] / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов, І. І. Михайлова // Наукові праці ВНТУ. – 2010. – № 1. – Режим доступу до журн.:<http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2010-1/2010-1.html>.

63. Боровская Т. Н. Синтез структур реконфигурируемых САУ / Т. Н. Боровская // Декомпозиционные методы проектирования систем:



сб. науч. тр. – К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1988. – С. 13–20.

64. Боровська Т. М. Система для моделювання довільних ринків / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, Т. В. Січко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. – № 6. – С. 72–77.

65. Боровська Т. М. Створення метамodelей складних систем на базі методу структурно-функціонально-редукційної декомпозиції / Т. М. Боровська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 111–119.

66. Боровська Т. М. Структура і функції сучасного мультимедійного посібника. Орієнтація на моделювання / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2008. – № 3. – С. 62–69.

67. Боровська Т. М. Моделі і методи для аналізу і оптимізації інвестиційних проектів / І. С. Колесник, Т. М. Боровська, В. А. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 4. – С. 56–61.

68. Боровская Т. Н. Использование метода параллельных разработок в подсистемах САПР и АСНИ / В. А. Северилов, Т. Н. Боровская, В. К. Горбань // Теория автоматизированного проектирования. – Харьков : ХАИ, 1986. – С. 59–65.

69. Боровська Т. М. Принципи побудови модульних мехатронних систем / В. А. Северілов, Т. М. Боровська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2000. – № 3. – С. 22–28.

70. Боровская Т. М. Эволюционная технология разработки экспертных систем автоматизации производства прикладных программ / В. А. Северилов, Т. Н. Боровская, Е. Н. Мельник // Теория автоматизированного проектирования. – Харьков: ХАИ, 1987. – С. 13–17.

71. Боровська Т. М. Методологічні основи створення математичних моделей розвитку розподілених виробничих систем : дис. ... доктора техн. наук : 01.05.02 / Т. М. Боровська. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 395 с.

72. Боровская Т. Н. Детская экономика. Моделирование и оптимизация производственных систем / Т. Н. Боровская, В. А. Северилов, И. С. Колесник // Компьютеры+Программы. – 2002. – № 2. – С. 43–47.

73. Боровская Т. Н. Что будет, если? Имитационное моделирование в Mathcad / Т. Н. Боровская, В. А. Северилов, П. В. Северилов // Компьютеры+ Программы. – 2000. – № 12. – С. 24–28.

74. Боровська Т. М. Декомпозиційні методи аналізу і синтезу управління в розподілених системах / С. П. Бадьора, Т. М. Боровська // XIII Міжнародна НТК «Автоматика–2006»: збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2006. – С. 221.

75. Боровська Т. М. Мультимедійний комплекс для самостійного освоєння розділу «Модельовання та прогнозування розвитку розподілених систем виробників» / С. П. Бадьора, В. А. Северилов, Т. М. Боровська, Н. П. Стужук // МНМК «Дистанційні технології навчання та їх засоби»: матеріали конференції. – Вінниця: ВМУРоЛ «Україна», 2004. – Вип. 1. – С. 106–110.

76. Боровська Т. М. Адаптивна система для оптимального розподілу навантаження між хімічними реакторами / Т. М. Боровська, А. С. Васюра, І. С. Колесник // Контроль і управління в складних системах: міжнар. наук.-техн. конф: тези допов. – Вінниця: Універсум–Вінниця, 2005. – С. 274.

77. Боровская Т. Н. Декомпозиционные методы конструирования рабочих моделей процессов инновационного развития. / Т. Н. Боровская // Збірник матеріалів VI міжнародної конференції «Інтернет–Освіта–Наука–2008», ІОН–2008. Том 1. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – С. 227–232.

78. Боровська Т. М. Декомпозиційний підхід до конструювання моделей розвитку систем виробників галузі / Т. М. Боровська, П. В. Северилов, Л. І. Семенюк // II міжнародна НПК «Економіка підприємства: теорія та практика. Розвиток підприємств»: матеріали конференції, 13–14 березня 2008 р. – К.: КНЕУ, 2008. – С. 372–375.

79. Боровська Т. М. Декомпозиційний підхід до прямої оцінки ризиків ринку / Т. М. Боровська, І. С. Колесник // V Міжнародна НПК «Економічна безпека сучасного підприємства»: матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – С. 80–86.

80. Borovska T. Expert system for forecasting development socio-technical and economic systems / T. Borovska, M. Vasilskaya, V. Severilov // Internet–Education–Science: Forth International Conf. Vinnytsia, September 28 – October 16, 2004. – Baku (Azerbaijan), –

Vinnitsia (Ukraine), – Veliko Turnovo (Bulgaria), 2004. – V. 2. – P. 517–521.

81. Боровська Т. М. Електронна книга «Моделювання у менеджменті». Технології навчання, орієнтовані на моделювання / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, Н. І. Черняк // МНК «Інтернет–освіта–наука – 2002» : тези доповідей. – Вінниця: Універсум–Вінниця. – 2002. – Т. 2. – С. 285–288.

82. Боровська Т. М. Електронна книга «Управління проектами». Технології навчання, орієнтовані на моделювання / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, Т. В. Січко // МНК «Інтернет–освіта–наука – 2002» : тези доповідей. – Вінниця: Універсум–Вінниця, 2002. – Т. 2. – С. 289–293.

83. Боровская Т. Н. Конструирование имитационных моделей систем «производители–продукты–потребители» / Т. Н. Боровская, И. С. Колесник, В. А. Северилов // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008», ІОН–2008 : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Т. 1. – С. 266–271.

84. Боровская Т. Н. Комплекс электронных книг по моделированию и оптимизации, анализу рисков и прогнозированию. Новые модели для новых задач / Т. Н. Боровская, И. С. Колесник, В. А. Северилов // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008», ІОН–2008 : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Т. 1. – С. 272–277.

85. Боровська Т. М. Моделі для аналізу і оптимізації вертикально інтегрованих систем / Т. М. Боровська, П. В. Северілов // V Міжнародна НПК «Економічна безпека сучасного підприємства» : матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – С. 104–111.

86. Боровская Т. Н. Моделирование бизнес–единицы «на фоне» системы бизнес–единиц сегмента рынка / Т. Н. Боровская, В. А. Северилов // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008», ІОН–2008 : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Т. 1. – С. 233–239.

87. Боровська Т. М. Моделювання системи «виробники–ринки–споживачі» при довільних виробничих функціях / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора // Контроль та управління в складних системах – 2003: міжнар. наук.-техн. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2003. – С. 205.

88. Боровська Т. М. Моделювання системи «виробники–ринки–споживачі» при довільних виробничих функціях / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора // VII Міжнародна НТК «КУСС–2003» : матеріали НТК. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2003. – С. 173–178.

89. Боровська Т. М. Моделювання і оптимізація систем виробництва біогазу [Електронний ресурс] / Т. М. Боровська, П. В. Северілов // КУСС–2008 : матеріали IX міжнародної конференції. – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Режим доступу до журн.: [http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2008/ukr/abstracts\\_UA.html](http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2008/ukr/abstracts_UA.html).

90. Боровська Т. М. Навчальний комплекс для моделювання оптимальних, адаптивних і відмовостійких САУ / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, А. С. Васюра // Контроль і управління в складних системах: міжнар. наук.-техн. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2003. – С. 219.

91. Боровська Т. М. Навчальний комплекс для моделювання оптимальних, адаптивних і відмовостійких САУ / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, А. С. Васюра // Контроль і управління в складних системах : матеріали VII міжнародної науково-технічної конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2003. – С. 220–223.

92. Borovska T. New information technologies of a system building of decisions supporting. Modelling of the markets with asymmetric information structure / T. Borovska, P. Severilov, V. Krasilenko // Internet–Education–Science: Forth International Conf. Vinnytsia, September 28–October 16, 2004. – Baku (Azerbaijan), – Vinnytsia (Ukraine), – Veliko Turnovo (Bulgaria). – 2004. – V. 2. – P. 525–529.

93. Боровська Т. М. Оптимальна система управління запасами при невизначеності попиту / Т. М. Боровська, А. С. Васюра, В. А. Северілов, П. В. Северілов // Контроль і управління в складних системах: міжнар. наук.-техн. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2005. – С. 273.

94. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком багатопродуктової системи на базі методу агрегування / Т. М. Боровська, І. С. Колесник // Контроль і управління в складних системах: міжнар. наук.-техн. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2005. – С. 271.

95. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Кредитні стратегії / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // Контроль і управління в складних системах: міжнар. наук.-техн. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2003. – С. 203.

96. Боровська Т. М. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Цінові стратегії / Т. М. Боровська, С. П. Бадьора, В. А. Северілов // Контроль і управління в складних системах: міжнар. наук.-техн. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2003. – С. 204.

97. Боровська Т. М. Орієнтація на обчислювальний експеримент – зміна парадигми вищої освіти / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, І. В. Рибіна // НМК «Проблеми підручника вищої школи»: матеріали НМК. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2001. – Т. 2. – С. 214–218.

98. Боровська Т. М. Рациональна структура модуля електронної книги на прикладі посібника з теорії автоматичного управління / Т. М. Боровська, Н. І. Черняк // НМК «Проблеми підручника вищої школи»: матеріали НМК. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2001. – Т. 2. – С. 177–180.

99. Боровська Т. М. Розробка моделей узагальнених систем «виробники–продукти–споживачі» [Електронний ресурс] / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // КУСС–2008 : матер. ІХ міжн. конф. – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, – 2008. – Режим доступу: [http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2008/ukr/abstracts\\_UA.html](http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2008/ukr/abstracts_UA.html).

100. Боровська Т. М. Система для моделювання і оптимізації малих формальних груп / Т. М. Боровська, І. В. Рибіна // VI Міжнародна НТК «КУСС–2001» : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2001. – С. 202–206.

101. Боровська Т. М. Створення метамodelей складних систем на базі методу структурно-функціонально-редукційної декомпозиції [Електронний ресурс] / Т. М. Боровська // КУСС–2008 : матер. ІХ міжн. конф. – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2008. – Режим доступу: [http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2008/ukr/abstracts\\_UA.html](http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2008/ukr/abstracts_UA.html).

102. Боровська Т. М. Структура і технології розробки електронних книг, орієнтованих на дистанційну освіту / Т. М. Боровська, В. Г. Красиленко, І. С. Колесник // Матеріали МНМК дистанційні тех-

нології навчання та їх засоби. – Вінниця: ВМУРоЛ «Україна», 2004. – Вип. 1. – С. 111–115.

103. Боровська Т. М. Технології розробки імітаційних моделей класу « $n$  виробників,  $m$  продуктів,  $k$  споживачів» / Т. М. Боровська, П. В. Северілов // НПК «Наука і навчальний процес. Дослідження нових інформаційних технологій»: матеріали конференції. – Вінниця: ВСЕІ Університету «Україна», 2008. – С. 119–121.

104. Боровська Т. М. Узагальнення задачі нелінійного програмування – метод оптимального агрегування. / Т. М. Боровська, І. С. Колесник // НПК «Наука і навчальний процес. Дослідження нових інформаційних технологій»: матеріали конференції. – Вінниця: ВМУРоЛ «Україна», 2006. – С. 40–41.

105. Боровська Т. М. Узагальнена модель інноваційного розвитку виробничих систем. Кредитні стратегії / Т. М. Боровська, І. С. Колесник // НПК «Наука і навчальний процес. Дослідження нових інформаційних технологій»: матеріали конференції. – Вінниця: ВМУРоЛ «Україна», 2006. – С. 42–43.

106. Боровська Т. М. Управління кінцевим станом в умовах невизначеностей / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. М. Рябіщук // XIII Міжнародна НТК «Автоматика–2006»: збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2006. – С. 291.

107. Borovska T. Management of projects for development of new manufactures. Program complex for remote education / I. Kolesnik, T. Borovska, V. Severilov // Internet–Education–Science: Forth International Conf. Vinnytsia, September 28 – October 16, 2004. – Baku (Azerbaijan), – Vinnytsia (Ukraine), – Veliko Turnovo (Bulgaria), 2004. – V. 1. – P. 259–263.

108. Боровська Т. М. Орієнтація на моделювання – нова парадигма вищої освіти та професійної діяльності / В. Г. Красиленко, Т. М. Боровська, В. А. Северілов // МНМК дистанційні технології навчання та їх засоби : матеріали МНМК.– Вінниця: ВМУРоЛ «Україна», 2004. – Вип. 1. – С. 131–135.

109. Боровская Т. Н. Технологии конструирования моделей МНК–класса / Т. Н. Боровская, Е. П. Хомын // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія: міжнародна науково-практична конференція: тези допов. – Вінниця: ВНТУ. – 2010. – С. 323–324.

110. Боровская Т. Н. Нечеткие модели распределенного объекта «линейка продуктов» / Т. Н. Боровская, Е. П. Хомын // Міжнародна наукова конференція «Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту», ISDMCI'2010 : матеріали конференції ; м. Євпаторія, Україна, 17–21 травня 2010 р.– Херсон: ХНТУ, 2010. – Т. 1. – С. 286–287.

111. Боровская Т. Н. Конструирование моделей развивающихся систем / Т. Н. Боровская // Materialy VI miedzynarodowej naukowí–praktycznej konferencji «Stosowane naukowe opracowania – 2010», Praha (Ceska). – 27.07 – 05.08.2010. – Przemysl: Nauka i studia, 2010. – V. 8. – Str. 7–12.

112. Боровская Т. Н. Декомпозиционный подход к анализу эффективности и живучести технических систем / Т. Н. Боровская // Materialy VI miedzynarodowej naukowí–praktycznej konferencji «Dynamika naukowych badan – 2010», Przemysl (Polska).– 07.07 – 15.07.2010. – Przemysl: Nauka i studia, 2010. – Volume 10. – Str. 17–22.

113. Боровська Т. М. Конструирование имитационной модели для системы мобильной связи / М. В. Васильская, Т. Н. Боровская, В. А. Северилов // Матеріали за VI міжнародна научна практична конференція «Динаміката на сьвременната наука – 2010», София (България). – 07.07 – 15.07.2010. – София : Бял ГРАД–БГ, 2010. – Т. 9. – С. 49–53.

114. Боровская Т. Н. Разработка имитационной модели для прогнозирования состояния линейки продуктов / Т. Н. Боровская, П. В. Северилов, Е. П. Хомын // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика–2010» : тези допов. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – С. 97–99.

115. Боровская Т. Н. Нечеткие модели распределенного объекта «линейка продуктов» / Т. Н. Боровская, Е. П. Хомын // Автоматика – 2010: 17 міжнародна конференція з автоматичного управління: тези допов. – Харків: ХНУРЕ. – 2010. – С. 99–100.

116. Боровська Т. М. Технологія аналізу ризиків розвитку виробничих систем на базі імітаційних моделей / Т. М. Боровська, Г. Ю. Дерман // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика–2010» : тези допов. – Харків: ХНУРЕ. – 2010. – С. 100–101.

117. Боровська Т. М. Оптимальное управление системами биореакторов / П. В. Северилов, Т. Н. Боровская, К. И. Гула // 17-та міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика–2010» : тези допов.– Харків: ХНУРЕ. – 2010. – С. 156–157.

118. Боровская Т. Н. Интегрированная модель для анализа эффективности и живучести технических систем / Т. Н. Боровская, Е. П. Хомин, П. В. Северилов // Сьома міжнародна конференція «ІОН–2010» : збірник матеріалів доповідей, м. Вінниця, 28 вересня–3 жовтня 2010 р. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – Т. 1(11). – С. 311–315.

119. Боровская Т. Н. Проблемы конструирования моделей развивающихся систем / Т. Н. Боровская, В. М. Кичак, М. В. Васильская // Сьома міжнародна конференція «ІОН–2010» : збірник матеріалів доповідей, м. Вінниця, 28 вересня–3 жовтня 2010 року. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – Т. 1(11). – С. 316–321.

120. Боровська Т. М. Оптимальное управление развитием производственной системы при наличии неопределенностей / Г. Ю. Дерман, Т. Н. Боровская, В. А. Северилов // Сьома міжнародна конференція «ІОН–2010» : збірник матеріалів доповідей, м. Вінниця, 28 вересня–3 жовтня 2010 року. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – Т. 1(11). – С. 322–327.

121. Боровська Т. М. Оптимізація управління розподілим об'єктом «лінійка продуктів» [Електронний ресурс] / Е. П. Хомин, Т. М. Боровська, С. П. Бадьора // КУСС–2010 : матеріали X міжнародної конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2010. – Режим доступу до журн.: [http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2010/ukr/abstracts\\_UA.html](http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2010/ukr/abstracts_UA.html).

122. Боровська Т. М. Оптимізація управління інноваційним розвитком при невизначеностях [Електронний ресурс]: матеріали X міжнародної конференції КУСС–2010 / Т. М. Боровська, Г. Ю. Дерман // КУСС–2010 : матеріали X міжнародної конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2010. – Режим доступу до журн.: [http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2010/ukr/abstracts\\_UA.html](http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2010/ukr/abstracts_UA.html).

123. Боровська Т. М. Розробка моделі системи біореакторів як об'єкту управління [Електронний ресурс] / П. В. Северилов, Т. М. Боровська // КУСС–2010 : матеріали X міжнародної конференції.



– Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2010. – Режим доступу до журн.: [http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2010/ukr/abstracts\\_UA.html](http://www.vstu.vinnica.ua/mccs2010/ukr/abstracts_UA.html).

124. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 36815. Комп'ютерна програма «Прогнозування стану лінійки продуктів» / Т. М. Боровська, Е. П. Хомин ; Міністерство освіти і науки України, Державний департамент інтелектуальної власності. – № 37073; заявл. 07.12.2010; опубл. 07.02.2011.

125. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 36816. Комп'ютерна програма «Аналіз невизначеностей в процесах розвитку з використанням зовнішніх ресурсів» / Т. М. Боровська, Г. Ю. Дерман ; Міністерство освіти і науки України, Державний департамент інтелектуальної власності. – № 37074; заявл. 07.12.2010; опубл. 07.02.2011.

126. Боровська Т. М. Моделі ефективності і живучості технічних систем / Т. М. Боровська, Е. П. Хомин, П. В. Северілов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 1. – С. 89–95.

127. Боровська Т. М. Оптимізація управління інноваційним розвитком при невизначеностях / Т. М. Боровська, Г. Ю. Дерман // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 3. – С. 141–147.

128. Боровська Т. М. Прогнозування розвитку складних систем на базі імітаційних моделей [Електронний ресурс] / Т. М. Боровська, В. М. Кичак, М. В. Васильська // Наукові праці ВНТУ. – 2011. – № 2. – Режим доступу до журн.: <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011-2/2011-2.html>.

129. Боровська Т. М. Оптимізація управління розподіленим об'єктом «лінійка продуктів» [Електронний ресурс] / Е. П. Хомин, Т. М. Боровська, С. П. Бадьора // Наукові праці ВНТУ. – 2011. – № 3. – Режим доступу до журн.: <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011-3/2011-3.html>.

130. Боровська Т. М. Розробка системи оптимального управління розвитком за наявності невизначеностей [Електронний ресурс] / Г. Ю. Дерман, Т. М. Боровська, В. А. Северілов // Наукові праці ВНТУ. – 2011. – № 1. – Режим доступу до журн.: <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011-1/2011-1.html>.

131. Боровська Т. М. Узагальнення методу оптимального агрегування виробничих систем з довільними структурами [Електронний ресурс] /

Г. Ю. Дерман, Т. М. Боровська, П. В. Северілов// Наукові праці ВНТУ. – 2011. – № 4. – Режим доступу до журн.: <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011-4/2011-4.html>.

132. Borovska T. N. Constructing of innovative development models / T. N. Borovska // «Научният потенциал на света – 2011» : матеріали за VII міжнародна научна практична конференція, 17–25.09.2011. – София: Бял ГРАД–БГ, 2011. – Т. 9. – С. 46–50.

133. Боровська Т. М. Методологія оптимального агрегування для розподілених технологічних систем / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // XIX міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика/Automatics – 2012» : матеріали конференції, м. Київ, 26–28 вересня 2012 р. – К. : НУХТ, 2012. – С. 69.

134. Боровська Т. М. Аналіз альтернативних моделей розвитку в умовах невизначеностей / Т. М. Боровська, В. М. Дубовой // XI міжнародна конференція «Контроль і управління в складних системах (КУСС–2012)» : тези доповідей, м. Вінниця, 9–11 жовтня 2012 року. – Вінниця: ВНТУ. – 2012. – С. 230.

135. Боровська Т. М. Моделі ризиків для оптимально агрегованих виробничих систем / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, П. В. Северілов // XI міжнародна конференція «Контроль і управління в складних системах (КУСС–2012)» : тези доповідей, м. Вінниця, 9–11 жовтня 2012 р. – Вінниця: ВНТУ. – 2012. – С. 10–11.

136. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 51040. Комп'ютерна програма «Формування стохастичних функцій виробництва» / Боровська Т. М., Маліночка А. О., Северілов П. В., Северілов В. А. ; Державна служба інтелектуальної власності України. – № 51425; заявл. 01.07.2013; опубл. 30.08.2013.

137. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 51039. Комп'ютерна програма «Імітаційна модель згортки розподілів ймовірностей» / Боровська Т. М., Маліночка А. О., Северілов П. В., Колесник І. С. ; Державна служба інтелектуальної власності України. – № 51424; заявл. 01.07.2013; опубл. 30.08.2013.

138. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 5142. Комп'ютерна програма «Оптимізація розподілу ресурсів у виробничій системі з ресурсним зворотним зв'язком» / Боровська Т. М., Дмитрик Ю. М., Северілов П. В., Северілов В. А. ;

Державна служба інтелектуальної власності України. – № 51429; заявл. 01.07.2013; опубл. 30.08.2013.

139. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 5141. Комп'ютерна програма «Аналіз ефективності екологічної модернізації виробничих систем» / Боровська Т. М., Дмитрик Ю. М., Северілов П. В., Хомин Е. П. // Державна служба інтелектуальної власності України. – № 51428; заявл. 01.07.2013; опубл. 30.08.2013.

140. Боровская Т. Н. Информационные технологии конструирования моделей оптимального управления производством / Т. Н. Боровская, И. В. Шульган, Е. П. Хомен // IV міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія» : тези доповідей, м. Вінниця, Україна, 28–30 травня 2014 р. – Вінниця: ВНТУ. – 2014. – С. 66–69.

141. Боровська Т. М. Інформаційні технології конструювання моделей оптимального управління розвитком виробничих систем / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов // IV міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія» : тези доповідей, м. Вінниця, Україна, 28–30 травня 2014 року. – Вінниця: ВНТУ. – 2014. – С. 70–73.

142. Боровская Т. Н. Разработка оператора оптимального агрегирования для систем со стохастическими функциями производства / Т. Н. Боровская, И. С. Колесник, П. В. Северилов, А. А. Малиночка // Современный научный вестник (Россия). – 2014. – № 27 (223). – С. 5–11.

143. Боровська Т. М. Оптимальне агрегування систем зі стохастичними функціями виробництва / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, П. В. Северілов, А. О. Маліночка // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Теплоенергетика. Інженерія докiлля. Автоматизація. – 2014. – № 792. – С. 41–52. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/VNULPT\\_2014\\_792\\_10.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/VNULPT_2014_792_10.pdf).

144. Боровська Т. М. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 54937. Комп'ютерна програма «Розробка і дослідження бінарних операторів інтегрованих систем» / Т. М. Боровська, І. В. Шульган ; Державна служба інтелектуальної власності України. – № 55376; заявл. 01.02.2014; опубл. 06.03.2014.

145. Боровська Т. М. Альтернативні моделі оптимального розвитку виробничих систем в умовах невизначеності / Т. М. Боровська, П. В. Северілов, Є. П. Хомин // Системні дослідження та інформаційні технології (Інститут прикладного системного аналізу НАН України та Міносвіти і науки України). – 2014. – № 4. – С. 121–136.

146. Borovska T. N. Modeling and optimization of agrarian systems with waste recycling in bioreactors / P. V. Severilov, T. N. Borovska, Yu. N. Dmytryk, E. P. Khomyn // Nauka i studia (Poland). – 2014. – № 16 (126). – P. 42–50.

147. Боровская Т. Н. Оптимальное агрегирование интегрированных систем «производство-развитие» / Т. Н. Боровская, И. С. Колесник, В. А. Северилов, И. В. Шульган // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2014. – № 2.(30). – С. 18–28.

148. Боровська, Т. Н. Оптимальне агрегування виробничих систем з параметричними зв'язками / Т. Н. Боровська // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2014. – Т. 4, № 11(70). – С. 9–19.

149. Боровська Т. М. Моделі оптимального інноваційного розвитку виробничих систем / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов, П. В. Северілов // Східно-Європейський журнал передових технологій: Математичне та інформаційне забезпечення комп'ютерно-інтегрованих систем управління. – 2014. – Т. 5, № 2(71). – С. 42–50.

150. Боровская Т. Н. Оптимальное агрегирование структур производственных систем с параметрическими связями / Т. Н. Боровская, И. В. Шульган, Ю. Н. Дмитрик // XII міжнародна конференція «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014)» : тези доповідей, м. Вінниця, Україна, 14–16 жовтня 2014 р. – Вінниця: ВНТУ. – 2014. – С. 182.

151. Боровская Т. Н. Оптимальное агрегирование систем обслуживания с стохастическими объектами и средствами обслуживания / И. С. Колесник, Т. Н. Боровская, А. А. Малиночка // Тези доповідей XII міжнародної конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014)», м. Вінниця, Україна, 14–16 жовтня 2014 року. – Вінниця: ВНТУ. – 2014. – С. 183.

152. Боровская Т. Н. Система моделей устойчивого развития социо-технико-экологических систем / В. А. Северилов, Т. Н. Боровская, И. С. Колесник, П. В. Северилов // XII міжнародна

конференція «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014)» : тези доповідей, м. Вінниця, Україна, 14–16 жовтня 2014 р. – Вінниця: ВНТУ. – 2014. – С. 185.

153. Боровская Т. Н. Разработка математической модели для оптимизации процессов импортозамещения в региональных структурах / Т. Н. Боровская, А. Б. Сидорук, А. В. Боровский // XII міжнародна конференція «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014)» : тези доповідей, м. Вінниця, Україна, 14–16 жовтня 2014 р. – Вінниця: ВНТУ. – 2014. – С. 187.

154. Боровская Т. Н. Анализ чувствительности производственных функций оптимально агрегированных систем / Т. Н. Боровская, Ю. Н. Лазарев // Вестник Самарского муниципального института управления (Россия). – 2014. – № 4 (31). – С. 26–37.

155. Borovska T. Optimization of agricultural enterprises based on the methodology of optimal aggregation / T. Borovska, I. Shulgan // Proceedings of the X International Scientific and Technical Conference «Computer science and information technologies» CSIT'2015, Lviv, Ukraine, 14–17 September 2015. – Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2015. – P. 206–209. – <http://ieeexplore.ieee.org/search/searchresult.jsp?newsearch=true&queryText=csit-2015>.

156. Боровська Т. М. Рішення задач управління виробничими системами на базі алгебри оптимального агрегування / Т. М. Боровська // Матеріали XXII міжнародної конференції з автоматичного управління «Автоматика 2015», м. Одеса, Україна, 10–11 вересня 2015 р. – Одеса: ТЕС. – 2015. – С. 59–60.

157. Бурков В. Н. Введение в теорию активных систем / В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. – М.: ИПУ РАН, 1996. – 125 с.

158. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

159. Васильська М. В. Дворівнева модель вибору споживачів на лінійці продуктів / М. В. Васильська, В. А. Северілов, Є. П. Хомин // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 35–40.

160. Васильська М. В. Дослідження адаптивних регуляторів на базі нечіткої логіки і нейронних мереж / М. В. Васильська, В. А. Северілов // XIII Міжнародна НТК «Автоматика–2006» : матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця. – 2006. – С. 441–444.

161. Васильская М. В. Конструирование моделей «обучения» потребителей / М. В. Васильская, П. В. Северилов // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008» ІОН–2008 : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Т. 1. – С. 246–250.

162. Васильская М. В. Конструирование моделей распределенного спроса на продукты и услуги / М. В. Васильская, Е. П. Хомин // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008» ІОН–2008 : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Т. 1. – С. 257–261.

163. Вен В. Л. Агрегирование динамической модели межотраслевого баланса / В. Л. Вен // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11, № 6. – С. 1608–1613.

164. Вен В. Л. Некоторые вопросы агрегирования линейных моделей / В. Л. Вен, А. И. Эрлих // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 5. – С. 3–8.

165. Вітлінський В. В. Економічний ризик: ігрові моделі: навч. посіб. / В. В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.

166. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: навч. посібник / В. В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.

167. Воеводин В. В. Параллельные вычисления / В. В. Воеводин – СПб.: БХВ–Петербург, 2002. – 609 с.

168. Волгин Л. И. Алгебраические логики: взаимоотношения, законы и свойства. / Л. И. Волгин. – М. : Новые технологии, 2003. – 24 с.

169. Воронов А. А. Теория автоматического управления. Ч. 1, 2. / А. А. Воронов. – М. : Энергия, 1986, 1987.

170. Геловани В. А. Агрегирование линейных управляемых динамических систем / В. А. Геловани, Ю. Ф. Пронозин // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 12. – С. 78–87, № 3. – С. 61–70.

171. Гергель В. П. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем / В. П. Гергель, Р. Г. Стронгин. – Нижний Новгород: Нижегородский гос.унив. им. Н. И. Лобачевского, 2001. – 122 с.

172. Глушков В. М. Кибернетика. Вопросы теории и практики. / Глушков В. М. – М.: Наука, 1986. – 477 с.

173. Глушков В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – К.: Техника, 1975. – 390 с.

174. Горбань А. В. Модели, моделирование и проектирование систем: учеб. пособ. / А. В. Горбань. – Харьков : ХАИ, 1978. – 115 с.

175. Горбань А. В. Рациональная технология системного производства проектных образов: структура баз знаний перспективных САПР / А. В. Горбань // Теория автоматизированного проектирования. – Харьков: ХАИ, 1986. – С. 35–45.

176. Данилов В. Я. Вимірювання рівня рідини в нафтових свердловинах акустичним методом. Сучасний стан, проблеми, засоби / В. Я. Данилов, І. Я. Науменко, В. І. Кизима // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2005. – № 4. – С. 9–16.

177. Демчишин М. В. Графоаналітичний метод пошуку сідлової точки в ігрових задачах інформаційної безпеки / М. В. Демчишин, Є. Г. Левченко, Д. І. Рабчун // Системні дослідження та інформаційні технології (Інститут прикладного системного аналізу НАН України та Міносвіти і науки України). – 2014. – № 3. – С. 86–98.

178. Дибб С. Практическое руководство по сегментированию рынка / С. Дибб, Л. Симкин. – Москва–Харьков: Питер, 2001. – 231 с.

179. Дубіненко С. Б. Штучні соціальні системи: моделювання процесів розвитку інформаційних мереж / С. Б. Дубіненко, С. П. Бадьора, Л. В. Стадник // IV міжнародна конференція «Інтернет–освіта–наука» (ІОН–2004) : матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2004. – Т. 2. – С. 530–534.

180. Дубовой В. М. Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами: монографія / В. М. Дубовой, О. О. Ковалюк. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – 185 с.

181. Дубовой В. М. Контроль та керування в мережах теплопостачання: монографія / В. М. Дубовой, В. В. Кабачій, Ю. М. Паночіцин. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2005. – 190 с.

182. Дубовой В. М. Прийняття рішень в управлінні розгалуженими технологічними процесами: монографія / В. М. Дубовой, Г. Ю. Дерман, І. В. Пилипенко, М. М. Байас. – Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2014. – 216 с.

183. Дубров Я. А. Системное моделирование и оптимизация в экономике. / Я. А. Дубров. – К.: Наук. думка, 1976. – 254 с.
184. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. / Ю. Г. Евтушенко. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
185. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. / Ю. М. Ермольев. – М. : Наука, 1976. – 240 с.
186. Згуровський М. З. Системна стратегія технологічного передбачення в інноваційній діяльності / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – № 3. – С. 7–24.
187. Згуровский М. З. Стратегия инновационного развития региона на основе синтеза методологий предвидения и когнитивного моделирования / М. З. Згуровский, В. А. Панкратов // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2014. – № 2. – С. 7–17.
188. Иванов Р. Л. Конструирование моделей распределенного спроса на кредиты / Р. Л. Иванов, П. В. Северилов // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008», ІОН–2008 : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – Т. 1. – С. 262–265.
189. Изерман Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман. – М.: Мир, 1984. – 233 с.
190. Имитационное моделирование производственных систем / под общ. ред. А. А. Вавилова. – М. : Машиностроение; – Берлин : Техника, 1983. – 416 с.
191. Исследование операций. Том 1. Методологические основы и математические методы / под ред. Дж. Моудера. – М. : Мир, 1981. – 712 с.
192. Кветний Р. Н. Методи та засоби передавання інформації у проблемно-орієнтованих розподілених комп'ютерних системах: монографія / Р. Н. Кветний, А. Я. Кулик. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2010. – 362 с.
193. Кветний Р. Н. Моделювання та оцінка параметрів якості зв'язку в телекомунікаційних мережах: монографія / Р. Н. Кветний, В. Г. Лисогор, В. П. Посвятенко, Ю. А. Скидан. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2009. – 132 с.



194. Келле Д. Е. Модели стоимости в ракетно-космической технике / Д. Е. Келле // Вопросы ракетной техники. – М. : Мир, 1972. – № 12. – С. 3–63.

195. Кемени Дж. Кибернетическое моделирование. / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М.: Советское радио, 1972. – 223 с.

196. Кендел М. Временные ряды / М. Кендел – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.

197. Клейнер Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 567 с.

198. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Мир, 1979. – 432 с.

199. Клиланд Д. Системный анализ и менеджмент проектов / Д. Клиланд, В. Кинг. – М.: Советское радио, 1974. – 482 с.

200. Ковальский В. С. Моделирование коммерческой деятельности предприятия / В. С. Ковальский, А. И. Косарев, В. Н. Кузьменко. – К.: [б. в.], 1995. – 20 с.

201. Козуля Т. В. Інформаційно-методичне забезпечення комплексної оцінки екологічності системних об'єктів / Т. В. Козуля, Н. В. Шаронова, Д. І. Ємельянова, М. М. Козуля // Системні дослідження та інформаційні технології (Інститут прикладного системного аналізу НАН України та Міносвіти і науки України). – 2014. – № 3. – С. 25–34.

202. Колесник І.С. Інтеграція навчання, наукових досліджень і практики на прикладі узагальнень задачі Марковіца / І. С. Колесник, С. П. Бадьора // III міжнародна конференція «Інтернет– освіта–наука» (ІОН–2002) : матеріали конференції.– Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2002.– Т. 2. – С. 275–279.

203. Колесник І. С. Інтернет-орієнтовані технології виробництва інтелектуальної продукції. Структура малих дослідницьких груп / І. С. Колесник, С. П. Бадьора // III міжнародна конференція «Інтернет– освіта–наука» (ІОН–2002) : матеріали конференції.– Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2002.– Т. 2.– С. 285–288.

204. Колесник І. С. Исследование оптимальных кредитных стратегий в процессах развития многопродуктовых систем / И. С. Колесник // VI міжнародна конференція «Інтернет–освіта–

наука–2008» (ІОН–2008): матеріали конференції.– Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008.– Т.1.– С. 251–256.

205. Колесник І. С. Комплекс робочих моделей для моделювання й оптимізації кредитних стратегій [Електронний ресурс] / І. С. Колесник, Р. Л. Іванов, П. В. Северілов // Наукові праці ВНТУ. – 2008. – № 4. – Режим доступу до журн.: <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-4/2008-4.html>.

206. Колесник І. С. Моделювання процесів розподілу ресурсів у децентралізованих системах: дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02 / Колесник І. С. – Вінниця : ВНТУ, 2006. – 208 с.

207. Колесник І. С. Мультимедійний комплекс для самостійного освоєння розділу «Оптимізація інвестиційних проектів. Стратегії розвитку виробничих систем» / І. С. Колесник, В. А. Северілов, І. І. Хільська // МНМК «Дистанційні технології навчання та їх засоби»: матеріали конференції. – Вінниця: ВМУРоЛ «Україна», 2004. – Вип. 1. – С. 100–105.

208. Колесник І. С. Оптимальне управління розподіленням ресурсів в децентралізованих системах / І. С. Колесник, В. А. Северілов // VI міжнародна науково-технічна конференція «Контроль і управління в технічних системах» (КУСС–2001): матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2001. – С. 73–78.

209. Колесник І. С. Оптимальне управління системою котлоагрегатів / І. С. Колесник, С. Л. Хміль // Контроль і управління в технічних системах: міжн. наук. конф.: тези допов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2005. – С. 73.

210. Колесник І. С. Оптимізація портфеля цінних паперів. Мультимедійний комплекс для дистанційної освіти. / І. С. Колесник, В. М. Мирончук // IV міжнародної конференції «Інтернет–освіта–наука» (ІОН–2004) : матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2004.– Т. 2. – С. 254–258.

211. Колесник І. С. Розробка імітаційних моделей для оцінки ризиків ринку/ V Міжнародна НПК «Економічна безпека сучасного підприємства» : матеріали конференції. / І. С. Колесник, П. В. Северілов, В. А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008. – С. 66–71.

212. Колесник І. С. Узагальнені моделі розподілених систем на базі методу оптимального агрегування / І. С. Колесник,

Г. Ю. Дерман // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 2. – С. 41–46.

213. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю. М. Коршунов. – М.: Энергия, 1980. – 475 с.

214. Кофман А. Модели и методы исследования операций / А. Кофман. – М.: Мир, 1966. – 370 с.

215. Краснов М. Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 176 с.

216. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции: базовый курс : учебник для вузов. / Л. Крушвиц. – Москва–Харьков : Питер, 2000. – 389 с.

217. Крушевский А. В. Математическое программирование и моделирование в экономике / А. В. Крушевский, К. И. Швецов. – К.: Высшая школа, 1979. – 454 с.

218. Кубонива М. Математическая экономика на персональном компьютере/ М. Кубонива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ.– М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

219. Кузьмін І. В. Основи теорії інформації та кодування: підручник / І. В. Кузьмін, І. В. Троцишин, А. І. Кузьмін, В. О. Кедрус, В. Р. Любчик; за ред. І. В. Кузьміна. – 3-тє вид., перероб. та доп. – Хмельницький: ХНУ, 2009. – 373 с. – МОН України.

220. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем / Л. С. Лэсдон. – М.: Наука, 1975. – 432 с.

221. Леонтьев В. Теоретические допущения и ненаблюдаемые факты / В. Леонтьев // США: Экономика, идеология, политика. – 1972. – № 9. – С. 15.

222. Ли Т. Г. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация/ Т. Г. Ли, Г. Э. Адамс, У. М. Гейнз. – М.: Советское радио, 1972. – 312 с.

223. Лисогор В. М. Моделі керування технологічними процесами в аварійних ситуаціях: монографія / В. М. Лисогор, Р. В. Селезньова. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1997. – 92 с.

224. Лужецький В. А. Адаптивний метод ущільнення даних одним проходом з рівномірним розбиттям на блоки / В. А. Лужецький, Л. А. Савицька // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2012. – № 2.(24). – С. 26–30.

225. Любчик Л. М. Метод стандартных динамических моделей в задачах синтеза многомерных комбинированных систем с наблюдателями возмущений // Радіоелектронні комп'ютерні системи. – 2007. – № 5. – С. 77–83.

226. Матин А. В. Декомпозиция и агрегирование при решении оптимизационных экономических моделей / А. В. Матин. – М. : Наука, 1985. – 71 с.

227. Махов С. А. Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера [Электронный ресурс] / С. А. Махов. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. – 2005. – Режим доступа: [http://www.keldysh.ru/papers/2005/prer06/prer2005\\_06.html](http://www.keldysh.ru/papers/2005/prer06/prer2005_06.html).

228. Месарович М. Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, И. Такахара. – М. : Мир, 1978. – 312 с.

229. Месарович М. Основания общей теории систем / М. Месарович // Общая теория систем. – М. : Мир, 1966. – С. 15–48.

230. Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, И. Такахара. – М. : Мир, 1973. – 344 с.

231. Мескон М. Основы менеджмента / М. Мескон, М. Альберт, Ф. Хедоури. – М. : Изд-во Академии народного хозяйства, 1994. – 703 с.

232. Миронов А. М. Теория процессов [Электронный ресурс] / А. М. Миронов. – Режим доступа: <http://www.intsys.msu.ru/staff/mironov/processes.pdf>

233. Михалев А. И. Синтез критерия идентификации нелинейных динамических систем на физических принципах / А. И. Михалев, А. И. Гуда, Е. Ю. Новикова // Адаптивные системы автоматического управления. – 2007. – Вып. 11. – С. 136–142.

234. Михалев А. И. Интеллектуальное управление технологическими процессами (ферросплавное производство): монография / Е. В. Бодянский, Е. И. Кучеренко, А. И. Михалев, В. А. Филатов, М. М. Гасик, В. С. Куцин; под ред. А. И. Михалева. – Днепрпетровск: Национальная металлургическая академия Украины, 2013. – 213 с.

235. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1981. – 487 с.

236. Мокін Б. І. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 55–58.

237. Мокін О. Б. Метод параметричної ідентифікації моделі оптимального струму електромобіля / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, О. Д. Фолішняк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 3. – С. 89–92.

238. Мокін В. Б. Метод ідентифікації параметрів моделі інтенсивності руху автомобілів біля супермаркета як центра тяжіння автотранспорту міста / В. Б. Мокін, В. Г. Сторчак, О. В. Гавенко, І. О. Медведєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 1. – С. 124–128.

239. Опойцев В. И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения / В. И. Опойцев. – М. : Наука, 1977. – 346 с.

240. Павловский Ю. Н. Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем и ее приложения / Ю. Н. Павловский // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1984. – № 2. – С. 45–57.

241. Первозванский А. А. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация / А. А. Первозванский, В. Г. Гайцгори. – М. : Наука, 1979. – 344 с.

242. Петренко А. И. Основы построения систем автоматизированного проектирования / А. И. Петренко, О. И. Семенов. – К. : Вища школа, 1984. – 296 с.

243. Петров А. А. Принципы построения моделей / А. А. Петров, П. С. Краснощеков. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 264 с.

244. Петров Б. Н. Информационные аспекты качественной теории динамических систем. / Б. Н. Петров, Г. М. Уланов, И. И. Гольденблат, И. Д. Кочубиевский, Э. М. Хазен, С. В. Ульянов // Техническая кибернетика: итоги науки и техники. – М. : [б. и.], 1976. – Т. 7. – С. 5–201.

245. Петров Э. Г. Управление устойчивым развитием предприятий: монография / Э. Г. Петров, Н. В. Подмогильный, Н. А. Соколова, В. Е. Ходаков. – Херсон: Олди-Плюс. – 2009. – 558 с.

246. Пешель М. Моделирование сигналов и систем / М. Пешель. – М. : Мир, 1981. – 286 с.
247. Повещенко Г. П. Один аспект взаємодії системи з оточенням / Г. П. Повещенко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2014. – № 2. – С. 77–85.
248. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. / Полак Э. – М. : Мир, 1974. – 376 с.
249. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, О. Р. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – 2-е изд. – М. : Высшая школа, 1969. – 384 с.
250. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении / Л. С. Понтрягин. – М. : Едиториал УРСС. – 2004. – 64 с.
251. Попов Э. В. Экспертные системы / Э. В. Попов. – М. : Наука, 1987. – 284 с.
252. Раскин Л. Г. Задача распределения ограниченного ресурса в условиях неопределенности / Л. Г. Раскин, Д. А. Сагайдачный // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – 2002. – Т. 1, № 8. – С. 17–20.
253. Саркисян С. А. Экономическая оценка летательных аппаратов / С. А. Саркисян, Э. С. Минаев. – М. : Машиностроение, 1972. – 177 с.
254. Северилов В. А. Детская экономика. Роль везения и умения в развитии производственных систем / В. А. Северилов // Компьютеры + Программы. – 2002. – № 1. – С. 46–50.
255. Северілов В. А. Конструювання моделей соціо-техніко-економічних систем – нова навчальна дисципліна / В. А. Северілов, С. П. Бадьора, М. В. Васильська // НМК «Дистанційні технології навчання та їх засоби : матеріали конференції. – Вінниця: ВМУРОЛ «Україна», 2004. – Вип. 1. – С. 136–141.
256. Северілов В. А. Проблема моделювання сучасних виробництв і ринків / В. А. Северілов, І. С. Колесник, С. П. Бадьора // НМК «Проблеми підручника вищої школи»: матеріали конференції. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2002. – С. 15.
257. Северілов В. Оптимальне управління розподіленням ресурсів в децентралізованих системах. / В. Северілов, І. Колесник, Н. Черняк // МНК «Контроль і управління в складних системах» : тези доповідей. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2001. – С. 212–216.

258. Северілов В. А. Технологія створення електронних книг на прикладі посібника з спеціальних розділів вищої математики / В. А. Северілов, Т. В. Січко // НМК «Проблеми підручника вищої школи» : тези доповідей.– Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2001. – Т. 2. – С. 137–141.

259. Северілов В. Узагальнення задач оптимального управління розподіленням ресурсів в часі / В. Северілов, Т. Січко, І. Колесник // МНК «Контроль і управління в складних системах» : тези доповідей. – Вінниця: Універсум–Вінниця, 2001. – С. 206–212.

260. Северілов П. В. Моделі оптимального розподілу ресурсів у вертикально інтегрованій системі / П. В. Северілов, К. І. Гула // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 41–46.

261. Северілов П. В. Моделирование и оптимизация вертикально интегрированных систем / П. В. Северілов // VI міжнародна конференція «Інтернет–Освіта–Наука–2008» (ІОН–2008) : збірник матеріалів. – Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2008.– Т. 1.– С. 240–245.

262. Сингх М. Системы: декомпозиция, оптимизация и управление / М. Сингх, А. Титли. – М. : Машиностроение, 1986. – 496 с.

263. Танаев В. С. Декомпозиция и агрегирование в задачах математического программирования / В. С. Танаев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 183 с.

264. Теленик С. Ф. Аналіз підходів до визначення впливу неполадок елементів мережі доступу на якість обслуговування клієнтів / С. Ф. Теленик, О. І. Ролік, М. В. Ясочка, К. О. Голоднов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 3. – С. 69–83.

265. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 258 с.

266. Уайльд Д. Оптимальное проектирование. / Д. Уайльд. – М. : Мир, 1981. – 240 с.

267. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам. / Д. Уотермен. – М. : Мир, 1989. – 390 с.

268. Усов А. В. Моделирование систем : монографія / Г. А. Оборский, А. Ф. Дащенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2013. – 664 с.

269. Управление бизнесом в бурные времена. / под общ. ред. Ч. Альпина. – К. : Бизнес Букс, 2006. – 208 с.
270. Федоренко В. Г. Инвестиційний менеджмент. / В. Г. Федоренко. – К. : МАУП, 1999. – 184 с.
271. Форд Л. Р. Потоки в сетях. / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. – М. : Мир, 1966. – 272 с.
272. Форрестер Дж. Динамика города. / Дж. Форрестер. – М. : Прогресс, 1974. – 276 с.
273. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика) / Дж. Форрестер. – М. : Прогресс, 1971. – 340 с.
274. Хайтун С. Д. Проблемы количественного анализа науки. / С. Д. Хайтун. – М. : Наука, 1989. – 280 с.
275. Цурков В. И. Декомпозиция в задачах большой размерности. / В. И. Цурков. – М. : Наука, 1981. – 352 с.
276. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1968 – 400 с.
277. Цурков В. И. Динамические задачи большой размерности. / В. И. Цурков. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
278. Шелдрейк Дж. Теория менеджмента от тейлоризма до японизации. / Дж. Шелдрейк. – Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск : Питер, 2001, 352 с.
279. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. / Р. Шеннон. – М. : Мир, 1978. – 418 с.
280. Шрейдер Ю. А. Системы и модели. / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 216 с.
281. Экланд И. Элементы математической экономики. / И. Экланд. – М. : Мир, 1983. – 248 с.
282. Экспертные системы. Принципы работы и примеры / А. Брукинг, П. Джонс, Ф. Кокс; под ред. Р. Форсайта. – М. : Радио и связь, 1987. – 224 с.
283. Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : КомКнига, 2006. – 208 с.
284. Яблонский А. И. Стохастические модели научной деятельности / А. И. Яблонский // Системные исследования. – М.: Наука, 1975. – 171 с.



285. Яблонский А. И. Модели и методы математического исследования науки (научно-аналитический обзор) / А. И. Яблонский. – М. : Наука, 1977. – 223 с.

286. Andersson K. Restarting Manufacturing Systems; Restart States and Restartability/ K. Andersson, B. Lennartson, M. Fabian // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109 / TASE. 2009. 2034136. – 2010. – P. 486–499.

287. Arinez J. Quality/Quantity Improvement in an Automotive Paint Shop: A Case Study / J. Arinez, S. Biller, S. M. Meerkov, Zhang Liang // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109 / TASE. 2009. 2033568. – 2009. – P. 755 – 761.

288. Banerjee A. G. Developing a Stochastic Dynamic Programming Framework for Optical Tweezer–Based Automated Particle Transport Operations / A. G. Banerjee, A. Pomerance, W. Losert, S. K. Gupta // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109 / TASE. 2009. 2026056. – 2009. – P. 218–227.

289. Beletskiy Boris A. Modeling of Multicomponent Systems / Boris A. Beletskiy // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 0.1615 / JAutomatInfScien. – 2009. – Vol.43. – P. 72–84.

290. Bellman R. E. Decision–making in a Fuzzy Environment / R. E. Bellman, L. A. Zadeh // Management Sci. – 1970. – Vol. – P.17. – 152.

291. Bemporad A. Model–Predictive Control of Discrete Hybrid Stochastic Automata / A. Bemporad, S. Di Cairano // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109 / TAC. 2010.2084810. – 2009. – P.1307–1321.

292. Biller S. Bottlenecks in Bernoulli Serial Lines With Rework / S. Biller, Li Jingshan, S. P. Marin, S. M. Meerkov, Zhang Liang // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109 / TASE. 2009.2023463. – 2009. – P. 208–217.

293. Black G. Intelligent Component–Based Automation of Baggage Handling Systems With IEC 61499 / G. Black, V. Vyatkin // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE. 2008.2007216. – 2009. – P. 337–351.

294. Chase K. W. Variation Analysis of Tooth Engagement and Loads in Involute Splines / K. W. Chase, C. D. Sorensen, B. J. K. DeCaires //

IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109 / TASE. 2009.2033033. – 2009. – P. 746–754.

295. Fagin, R. Optimal aggregation algorithms for middleware [Text] / R. Fagin, Amnon Lotem, Moni Naor // Journal of Computer and System Sciences 66 (2003) 614–656.

296. Fagin, R. Comparing and Aggregating Rankings with Ties [Text] / R. Fagin, R. Kumar, M. Mahdian, D. Sivakumar, E. Vee // In Proceedings of the 2004 ACM Symposium on Principles of Database Systems (PODS '04), pp 47–58.

297. Felipe, Jesus and Fisher, Franklin M. Aggregation in production functions: what applied economists should know / Blackwell Publishing Ltd 2003, 9600 Garsington Road, Oxford OX4 2DQ, UK and 350 Main Street, Malden, MA 02148, USA. – P 208–262.

298. Huan Chen. A Distortion–Aware Intelligent Context Aggregation Agent for Smart Environments / Chen Huan, Cheng Chih-Chuan // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/MIS.2010.31. – 2009. – P 42–49.

299. Dashkovskiy S. A Small–Gain Condition for Interconnections of ISS Systems With Mixed ISS Characterizations / S. Dashkovskiy, M. Kosmykov, F. R. Wirth // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TAC.2010.2080110. – 2009. – P. 1247–1258.

300. Garashchenko F. G. Adaptive Models of Signal Approximation in Structural–Parametric Classes of Functions / F. G. Garashchenko, O. F. Shvets, O. S. Degtyar // JAutomatInfScien DOI: 10.1615. – 2009. – Vol.43. – P. 11–19.

301. Hoong Chuin Lau. Periodic Resource Reallocation in Two–Echelon Repairable Item Inventory Systems / Chuin Lau Hoong, Pan Jie, Song Huawei // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2010.2040827. – 2010. – P. 474–485.

302. HyungTae Kim. Quick Wafer Alignment Using Feedforward Neural Networks / Kim HyungTae, Lee KangWon, Jeon BongKeon, Song ChangSeop // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2024243. – 2010. – P. 377–382.

303. Iemets O. A. Mathematical Model for Optimization Problem of One Multiprocessing Computer System and Its Solution / O. A. Iemets,

Y. M. Yemets, T. V. Chilikina DOI: 10.1615/JAutomatInfScien. – 2010. – Vol. 43. i1.50 – P. 65–71.

304. Jian Liu. State Space Modeling for 3–D Variation Propagation in Rigid–Body Multistage Assembly Processes / Liu Jian, Jin Jionghua, Shi Jianjun // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2012435. – 2009. – P. 274–290.

305. Jiang J. Z. Regular Positive–Real Functions and Five–Element Network Synthesis for Electrical and Mechanical Networks / J. Z. Jiang, M. C. Smith // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TAC.2010.2077810. – 2009. – P. 1275–1290.

306. Jin Sun. Optimization of Group Elevator Scheduling With Advance Information / Sun Jin, Zhao Qian–Chuan, P. B. Luh // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2024242. – 2009. – P. 352–363.

307. Jing Zhong. Predictive Control Considering Model Uncertainty for Variation Reduction in Multistage Assembly Processes / Zhong Jing, Liu Jian, Shi Jianjun // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2038714. – 2009. – P. 724–735.

308. Jing Zhong. Design of DOE–Based Automatic Process Controller With Consideration of Model and Observation Uncertainties / Zhong Jing, Shi Jianjun, J. C. F. Wu // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2013198. – 2009. – P. 266–273.

309. June–Young Bang. Hierarchical Production Planning for Semiconductor Wafer Fabrication Based on Linear Programming and Discrete–Event Simulation / Bang June–Young, Kim Yeong–Dae // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2021462. – 2009. – P. 326–336.

310. Junwen Wang. Product Sequencing With Respect to Quality in Flexible Manufacturing Systems With Batch Operations / Wang Junwen, Li Jingshan, J. Arinez, S. Biller // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2039133. – 2010. – P. 776–790.

311. Kelly K. New Rules for the New Economy. 10 radical strategies for a connected world / K. Kelly – Penguin books. – 1999. – 180 p.

312. Koba E. V. Estimating the overlapping probability for complex demands in queuing systems / E. V. Koba, O. N. Dyshliuk // Cybernetics

and Systems Analysis – Vol. 46, Number 3, DOI: 10.1007/s10559–010–9226–x. – 2010. – P. 506–511.

313. Kogan K. Supply Chain With Inventory Review and Dependent Demand Distributions: Dynamic Inventory Outsourcing / K. Kogan, S. Lou, C. S. Tapiero, M. Shnaiderman // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2008.2006569. – 2009. – P. 197–207.

314. Krasnoshapka V. A. Influence of Variable Technological Loads on Dynamic Processes in Machine Units / V. A. Krasnoshapka // JAutomatInfScien. – 2011. – Vol. 43. – № 4. – P. 1–10.

315. Kravets P. I. Methods of Hardware and Software Realization of Adaptive Neural Network PID Controller on FPGA–Chip / P. I. Kravets, T. I. Lukina, V. A. Zhrebko, V. N. Shimkovich // JAutomatInfScien. DOI: 10.1615–vol.43. – i4.80 – 2009. – P. 70–77.

316. Kondratiev N. D. The Long Waves in Economic Life [Text] / N. D. Kondratiev, W. F. Stolper // Review of Economic Statistics. – 1935. – № 17(6). – P. 105–115. doi:10.2307/1928486.

317. Kuznets S. Secular movements in production and prices. Their nature and their Bearing upon Cyclical Fluctuations [Text] / S. Kuznets. – Boston: Houghton Mifflin, 1930. – 536 p.

318. Ladanyuk A. P. Control Performance and Stability Indices of Systems with Multiparameter Controllers / A. P. Ladanyuk, D. O. Kronikovskiy // JAutomatInfScien. DOI: 10.1615 – vol.43. – i4.70 – 2009. – P. 61–69.

319. Lennartson B. Sequence Planning for Integrated Product, Process and Automation Design / B. Lennartson, K. Bengtsson, Yuan Chengyin, K. Andersson, M. Fabian, P. Falkman, K. Akesson // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2010.2051664 – 2010. – P. 791–802.

320. Li Ch. Supporting Ad-hoc Ranking Aggregates / Ch. Li, K. Chang, Jh. Ilyas // SIGMOD 2006, June 27-29, 2006, Chicago, Illinois, USA. Copyright 2006 ACM 1-59593-256-9/06/0006/

321. Litvinchev I. Aggregation in Large-Scale Optimization / I. Litvinchev, V. Tsurkov. – Springer Science & Business Media, 2003. – 291 p.

322. Lobel, I. Distributed Subgradient Methods for Convex Optimization Over Random Networks / I. Lobel, A. Ozdaglar // IEEE

Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TAC.2010.2091295 – 2009. – P. 1291–1306.

323. Markowitz H. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments. / H. Markowitz. – N. Y. : John Wiley and Sons, 1959. – 129 p.

324. Martin Antony. Mathematics for economics and finance / Antony Martin, Norman Biggs. – Cambridge : University Press, 1996. – 394 c.

325. Ming–Yi You. Cost–Effective Updated Sequential Predictive Maintenance Policy for Continuously Monitored Degrading Systems / You Ming–Yi, Li Lin, Meng Guang, Ni Jun // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2019964 – 2009. – P. 257–265.

326. Mohapatra, R. and Sen, Bh. Technical, allocative and economic efficiency in sugarcane production: a non-parametric approach / R. Mohapatra and Bh. Sen // International Journal of Advanced Research. – 2013. – V. 1, Issue 6. –P. 366–374.

327. Morrison J. R. Deterministic Flow Lines With Applications / J. R. Morrison // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2027222 – 2009. – P. 228–239.

328. Nai Qi Wu. A Closed–Form Solution for Schedulability and Optimal Scheduling of Dual–Arm Cluster Tools With Wafer Residency Time Constraint Based on Steady Schedule Analysis / Wu Nai Qi, Zhou Meng Chu // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2008.2008633 – 2009. – P. 303–315.

329. Onishchenko S. M. To the Problem of the Nonlinear Systems Stabilizability / S. M. Onishchenko // JAutomatInfScien. DOI: 10.1615 – vol.43.i1.10 – 2009. – P 1–12.

330. Or Y. Stability and Completion of Zeno Equilibria in Lagrangian Hybrid Systems / Y. Or, A. D. Ames // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TAC.2010.2080790 – 2010. – P. 1322 – 1336.

331. Pavone M. Adaptive and Distributed Algorithms for Vehicle Routing in a Stochastic and Dynamic Environment / M. Pavone, E. Frazzoli, F. Bullo // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TAC.2010.2092850 – 2010. – P. 1259–1274.

332. Piciarelli Claudio. Surveillance–Oriented Event Detection in Video Streams / Claudio Piciarelli, Gian Luca Foresti // IEEE Intelligent Systems DOI: 10.1109/ MIS.2010.38 – 2011. – P. 32–41.

333. Prodan R. Bi–Criteria Scheduling of Scientific Grid Workflows for the Grid / R. Prodan, M. Wiecek, S. Podlipnig, T. Fahringer // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2014643 – 2009. – P. 364–376.

334. Qingyu Yang, Yong Chen. Reliability of Coordinate Sensor Systems Under the Risk of Sensor Precision Degradations / Yang Qingyu, Chen Yong // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE. 2009.2018140. –2009. – P. 291–302.

335. Reveliotis S. Correctness Verification of Generalized Algebraic Deadlock Avoidance Policies Through Mathematical Programming / S. Reveliotis, E. Roszkowska, Choi Jin Young // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE. 2009.2022985 –2009. – P. 240–248.

336. Rotshtein A. Identification of a Nonlinear Dependence by a Fuzzy Knowledgebase in the Case of a Fuzzy Training Set / A. Rotshtein, S. Shtovba // Cybernetics and Systems Analysis. – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 176–182.

337. Romanuke V. V. Equally-weighted compositions of Gaussian-noised-data-trained two-layer perceptrons in boosting ensembles for high-accurate discontinuous tracking of wear states regarding statistical data inaccuracies and shifts / V. V. Romanuke // Problems of tribology. – 2015. – № 2. – P. 53–56.

338. Shtovba S. Fuzzy Identification on the Base of Regression Models of Parametric Membership Function / S. Shtovba // Journal of Automation and Information Sciences. – 2006. – Vol. 38, № 11. – P. 36–44.

339. Shtovba S. Fuzzy Model Tuning Based on a Training Set with Fuzzy Model Output Values / S. Shtovba // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – Vol. 43, № 3. – P. 334–340.

340. Spiridonov V. N. Modeling Method of Discrete Dynamic Systems with Constant Structure / V. N. Spiridonov // JAutomatInfScien. DOI: 11615.2.30. – 2009. – P. 22–31.

341. Sukach E. I. The Design of Functionally Complex Systems Based on the Probabilistic–Algebraic Simulation / E. I. Sukach // JAutomtInfScien. DOI: 10.1615 – Vol.43.i4.10. – 2009. – P. 45–58.

342. Tao Wu. An HNP–MP Approach for the Capacitated Multi–Item Lot Sizing Problem With Setup Times / Wu Tao, Shi Leyuan, N. A. Duffie // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2039134. – 2009. – P. 500–511.

343. Tentori Monica. An Agent–Based Middleware for the Design of Activity–Aware Applications / Monica Tentori, Marcela Favela Rodriguez, Jesus Vara // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/MIS.2010.30. – 2009. – P. 15–23.

344. Wang Junze, Wang Furong, Yan Zheng, Huang Benxiong. Message Receiver Determination in Multiple Simultaneous IM Conversations / Junze Wang, Furong Wang, Yan Zheng, Huang Benxiong // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/MIS.2010.33 – 2009. – P. 24–31.

345. Wenzhen Huang, Zhenyu Kong. Process Capability Sensitivity Analysis for Design Evaluation of Multistage Assembly Processes / Huang Wenzhen, Kong Zhenyu // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2034633 – 2009. – P. 736–745.

346. Wilhelm W. E. Branch–and–Price Decomposition to Design a Surveillance System for Port and Waterway Security / W. E. Wilhelm, E. I. Gokce // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2008.2011563 – 2008. – P. 316–325.

347. Wong W. P. Budget Allocation for Effective Data Collection in Predicting an Accurate DEA Efficiency Score / W. P. Wong, W. Jaruphongsa, L. H. Lee. // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TAC.2010.2088870 – 2010. – P. 1235–1246.

348. Yanjia Zhao. Efficient Simulation Method for General Assembly Systems With Material Handling Based on Aggregated Event–Scheduling / Zhao Yanjia, Yan Chao–Bo, Zhao Qianchuan, Huang Ningjian, Li Jingshan, Guan Xiaohong // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. DOI: 10.1109/TASE.2009.2034135 – 2009. – P. 762–775.

349. Zack Y. A. A Determined Equivalent and Algorithms of Solving a Fuzzy–linear Programming Problem / Y. A. Zack // JAutomatInfScien. DOI: 10.1615. – Vol.43.i2.20 – 2009. – P. 7–22.

350. Zwicky F. Discovery, invention, research through the morphological approach. / F. Zwicky. – Toronto, 1969.

*Наукове видання*

**Боровська Таїса Миколаївна**

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНУВАННЯ  
І РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ  
НА БАЗІ МЕТОДОЛОГІЇ ОПТИМАЛЬНОГО АГРЕГУВАННЯ**

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено Т. Боровською

Підписано до друку 08.06.2018 р.

Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. др. арк. 17,79.

Наклад 300 (1-й запуск 1–75) пр. Зам № В2018-13

Вінницький національний технічний університет,

ІРВЦ ВНТУ,

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 65-18-06.

**press.vntu.edu.ua**; *email*: [kivc.vntu@gmail.com](mailto:kivc.vntu@gmail.com).

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.

21021, м. Вінниця, вул. Порики, 7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.