

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

В. А. ОГОРОДНІКОВ, О. В. ГРУШКО, В. Є. ПЕРЛОВ

**ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА. СПЕЦІАЛЬНІ
РОЗДІЛИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
СТУДЕНТІВ**

Навчальний посібник

**УНІВЕРСУМ-Вінниця
2013**

УДК 621.7:621.8
О 39

Рецензенти:

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

О. В. Нахайчук, доктор технічних наук, професор

В. О. Федотов, кандидат технічних наук, доцент

- Огородніков В. А., Грушко О. В., Перлов В. Є.**
О 39 **Прикладна механіка. Спеціальні розділи до самостійної роботи студентів.** Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2013. – 104 с.

Навчальний посібник призначений для вивчення дисципліни “Прикладна механіка” студентами напряму підготовки 6.050702 “Електромеханіка” денної та заочної форм навчання. В навчальному посібнику викладено короткі теоретичні відомості по курсу і наведено приклади виконання контрольних робіт та розрахунково-графічних завдань, що виносяться на самостійну роботу студентам.

УДК 621.7:621.8

ВСТУП	5
1. МЕТА і ЗМІСТ КУРСУ “ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА”	6
2. ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ПАСПОРТ МАТЕРІАЛУ	8
2.1. Крива течії матеріалу.....	8
2.2. Порядок виконання завдання.....	11
2.3. Діаграма пластичності матеріалу.....	11
2.4. Порядок побудови діаграм пластичності.....	13
Контрольні запитання.....	13
3. ТОНКІ ПЛАСТИНКИ ТА ОБОЛОНКИ	14
3.1. Безмоментна теорія оболонок.....	14
3.1.1. Розрахунки осесиметричних оболонок за безмоментною теорією	15
3.2. Знаходження напружень та переміщень у круглих пластинках.....	20
3.3. Розрахунок пластин за межами пружності.....	22
3.4. Контрольна робота № 1. Приклад розрахунку циліндричної посудини (оболонки).....	23
3.5. Контрольна робота № 2. Розрахунок пластин.....	17
Контрольні запитання.....	29
4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ	30
4.1. Тензор напружень.....	30
4.2. Головні напруження і головні площадки.....	32
4.3. Шаровий тензор і девіатор напружень.....	33
4.4. Диференціальні рівняння рівноваги.....	36
4.5. Плоский напружений стан.....	38
4.6. Розрахункове завдання з прикладом розрахунку: напружений стан у точці.....	39
Контрольні запитання.....	45
5. РОЗРАХУНКИ ЗА МЕЖАМИ ПРУЖНОСТІ	46
5.1. Розрахунки за межами пружності в умовах розтягу-стиску статично- невизначених систем.....	46
5.2. Граничний стан при крученні вала за межами пружності.....	49
5.3. Граничний стан балок при згині за межами пружності.....	51
5.4. Приклади розрахунків за межами пружності. Контрольна робота.....	53
Контрольні питання.....	55
6. РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНА РОБОТА	56
6.1. Розрахунок вала на витривалість при згині та крученні.....	56
6.2. Приклад виконання розрахунково-графічного завдання.....	58
6.3. Обчислення коефіцієнта запасу.....	62
Контрольні запитання.....	63

7. РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ.....	64
7.1. Основні теоретичні відомості.....	64
7.1.1. Загальні поняття.....	64
7.1.2. Види динамічних навантажень.....	64
7.1.3. Постійне динамічне навантаження.....	64
7.1.4. Ударне навантаження.....	65
7.1.5. Повторно-змінне навантаження. Коливання.....	68
7.1.5.1. Поздовжні і поперечні коливання.....	69
7.1.5.2. Крутильні коливання.....	69
7.2. Розрахунково-графічне завдання “Розрахунок балки при ударному навантаженні”.....	70
7.3. Розрахунок упорного підшипника.....	76
Контрольні запитання.....	77
ЛІТЕРАТУРА.....	78
ДОДАТКИ.....	80

ВСТУП

Охоплюючи весь світ, тенденція підвищення якості стосується у першу чергу машинобудівної продукції. У зв'язку із розширенням мережі спеціальностей, в основу яких покладені інформаційні технології, стрімко зростає роль дисциплін міцностного циклу, за допомогою яких оцінюють міцність, жорсткість і стійкість матеріалів. Поява нових конструкцій в енергетиці, автомобілебудуванні й інших галузях виробництва викликала необхідність діагностування як матеріалів, з яких вони виготовлені, так і самих конструкцій, з погляду їх якості, надійності, міцності, жорсткості і стійкості.

Навчальний посібник призначений для самостійного опрацювання студентами спеціальних розділів прикладної механіки.

Матеріали навчального посібника викладені за розділами: розрахунки за межами пружності; експериментальна механіка машин; динамічні навантаження; тонкостінні оболонки; повторно-змінні навантаження; теорія напруженого стану; розрахунок пластин у пружній площині, а також за межами пружності, які мало описані у традиційних курсах міцнісного циклу. Це пов'язано, перш за все, не тільки з інтересами авторів, але і з необхідністю дати студентам глибші сучасні знання про механічні властивості матеріалів за межами пружності, уміння формувати за допомогою експериментальної механіки машин технологічний паспорт матеріалу.

1. МЕТА І ЗМІСТ КУРСУ “ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА”

Вирішення сучасних складних проблем міцності деталей машин та елементів конструкцій, які працюють в екстремальних умовах, потребують залучення знань, що ґрунтуються на великій кількості дисциплін, в основу яких покладені розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість. Це дозволяє на стадії проектування нової техніки обґрунтовано знизити матеріаломісткість конструкції в зонах підвищеної термосилової завантаженості (зонах концентрації напружень), а також оптимізувати процес проектування технологічних процесів формоутворення.

Вирішення проблеми підвищення ресурсу та надійності машин з одночасним зниженням їх металоємності можливо тільки за наявності висококваліфікованих інженерних кадрів, які досконало володіють сучасними методами розрахунку на міцність, жорсткість, стійкість, у тому числі і при змінних навантаженнях.

Дисципліна „Прикладна механіка” формує у студентів знання з методів розв’язку актуальних інженерних задач по несучій спроможності багатоелементних конструкцій та технологічних проблем формоутворення сучасного машинобудування.

Вивчаючи названу дисципліну, студент повинен знати основні теоретичні та експериментальні методи досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкції за межами пружності та з урахуванням довготривалості їх експлуатації в умовах термосилового навантаження (деформування). При цьому він повинен уміти та мати навички з розв’язку актуальних конструкторських і технологічних задач, які виникають в інженерній практиці на стадії проектування виробів нової техніки, що працюють в екстремальних умовах з метою обґрунтованого зменшення їх матеріаломісткості за достатньої експлуатаційної надійності.

Мета та головне завдання курсу „Прикладна механіка” - показати студентам сфери та форми застосування багатьох теоретичних знань, що здобуті раніше з фізики, теоретичної механіки та механіки матеріалів, навчити застосовувати ці знання для розв’язання конкретних практичних задач. У процесі навчання студент здобуває знання з сучасних досліджень у галузі феноменологічних принципів, які покладені в основу розрахунків елементів конструкцій на міцність, жорсткість, стійкість, вміння самостійного пошуку доцільних підходів щодо аналізу критеріїв працездатності деталей, які розраховуються, та складання розрахункових схем. Навчитися ефективно використовувати необхідний математичний апарат, обчислювальну техніку та прилади у дослідженнях з феноменологічної міцності, а також розв’язувати практичні задачі, що пов’язані з розрахунками виробів на міцність, жорсткість і стійкість.

Метою викладання частин курсу „Прикладна механіка” - „Фізичні основи міцності” та „Механіка руйнувань” є набування студентами: знань закономірностей фізичних основ міцності та механіки руйнування матеріалів і елементів конструкцій; умінь проводити оцінки міцності матеріалів та елементів конструкцій з урахуванням наявних дефектів (дислокацій, тріщин тощо); навичок у вирішенні проблем міцності, які пов’язані з наявністю дефектів у металі.

Зміст дисципліни – основи методів розрахунків на міцність та довговічність при пружно-пластичному деформуванні та умовах повзучості; сучасні теореми та закони теорії пластичності; векторне

зображення процесу навантаження в точці тіла, що деформується; основні феноменологічні теорії пластичності; основні методи розв'язання крайових задач; сучасні моделі твердого деформованого тіла; руйнування матеріалів при повзучості.

Зміст розділу дисципліни „Прикладна механіка” - „Будівельна механіка машин” – структурний аналіз та методи розрахунку на міцність та жорсткість просторових конструкцій, метод сил та метод кінцевих елементів при аналізі напружено-деформованого стану рам, розрахунки прямокутних, круглих пластин та циліндричних оболонок, розрахунки пластин, знаходження критичних сил при стиску, зсуві, крученні.

Зміст розділу дисципліни „Прикладна механіка” - „Феноменологічні основи міцності та деформуємі” – ідеалізація структури і фізико-механічних властивостей матеріалів як основи феноменологічного підходу до методології розрахунків; сучасні моделі деформуємих тіл; класичні критерії міцності при складному напруженому стані; критерії Кулона-Мора, Чужинського-Ягна, Міролюбова, Баландіна; теорія Фрідмана-Давіденкова; критерії деформуємі при великих пластичних деформаціях (критерії Смірнова-Аляєва, Колмогорова, Деля, Огороднікова). Приклади використання моделей властивостей і критеріїв міцності та деформуємі наведено в розрахунках.

Курс „Прикладна механіка” базується на знаннях, які здобуті студентом при вивченні вищої математики, фізики, теоретичної механіки, опору матеріалів, матеріалознавства та інших курсів. Але, на відміну від інших спецкурсів, в яких розглядаються теоретичні основи розрахунків напружено-деформованого стану елементів конструкції, методологія та відповідні алгоритми, цей курс передбачає вивчення загальних підходів формулювання рівнянь стану з урахуванням моделей структури і властивостей матеріалу, що прийняті заздалегідь і науково обґрунтовані.

Тут на першому плані постають питання, що пов'язані з обґрунтуванням вибору критеріїв несучої здатності елементів конструкцій у зв'язку з характером навантаження та особливостями їх експлуатації.

Окремі розділи присвячені питанням оцінки довготривалості конструкцій, впливу нестаціонарності режиму механічних навантажень. Теоретичні положення ілюструються прикладами з історії техніки та сучасного досвіду розрахункових робіт, а також виконанням конкретних розрахунків. Усі розділи „Прикладна механіка” викладено з позицій провідної ролі інженера у забезпеченні високих техніко-економічних показників деталей і машин, що проектуються.

Міцність має фізичну основу, як і всі інші механічні властивості матеріалів. Фахівець, який добре володіє дисципліною „Прикладна механіка”, зобов'язаний знати глибокі фізичні основи міцності, причини, які призводять до її зниження та руйнування конструкційних матеріалів, зокрема в результаті виникнення і розвитку тріщин. Тому ці питання розглядаються в частинах дисципліни „Прикладна механіка”, які мають назву „Фізичні основи міцності” та „Механіка руйнувань”. Матеріал цих частин базується на раніше засвоєних дисциплінах: математиці, фізиці, матеріалознавстві, теорії пружності, теорії пластичності та повзучості.

2. ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ПАСПОРТ МАТЕРІАЛУ

2.1 Крива течії матеріалу

При проектуванні операцій пластичного формоутворення деталей з листових матеріалів і прогнозуванні руйнування металів з допомогою САПР, використовується кінцево-елементний підхід, що потребує інформацію про характер кривих течії в області великих деформацій [1-7]. Крім того, криві течії необхідні для проектування операцій обробки металів тиском. Оскільки експериментально такі залежності одержати практично неможливо, то більшість досліджень в цій галузі зводиться до екстраполяції кривих течії в область великих деформацій з використанням поширених в обробці тиском рівнянь апроксимації.

У теорії обробки металів тиском часто застосовують рівняння кривої течії Свіфта або М.М. Малініна [3]:

$$\sigma_u = A(e + \varepsilon_u)^n; \quad (2.1)$$

$$\sigma_u = A\varepsilon_u^n, \quad (2.2)$$

де σ_u – інтенсивність напружень, ε_u – інтенсивність деформацій, A , n – коефіцієнти апроксимації кривої течії матеріалу.

Наведена крива в координатах σ_u – інтенсивність напружень, ε_u – інтенсивність деформацій не залежить від виду навантаження і виду напруженого стану, вона визначається лише властивостями матеріалу (гіпотеза про єдину криву течії).

Експериментальні дані для побудови кривої течії можуть бути одержані за допомогою випробувань матеріалів на осьовий стиск. В якості вихідних приймаємо значення інтенсивності напружень, які можуть бути розраховані за формулами (2.3) або (2.4):

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi d_i^2}; \quad (2.3)$$

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi d_0^2 \frac{h_0}{h_i}}, \quad (2.4)$$

де d_0 і d_i – діаметри зразка до і у процесі осадження; h_0 , h_i – висота зразка до і у процесі осадження.

Крім того, інтенсивність деформацій розраховується за формулою [3]

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}, \quad (2.5)$$

де ε_1 , ε_2 , ε_3 , – головні деформації.

В умовах одноосного стиску інтенсивність деформацій розраховується за формулами:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = 2 \ln \frac{d_0}{d_i}; \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = \ln \frac{A_0}{A_i}; \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = \ln \frac{H_0}{H_i}; \quad (2.8)$$

де d_0 , A_0 , H_0 , d_i , A_i , H_i – діаметр, площа і висота зразка до і в процесі осадження.

Таким чином, в якості експериментальних даних використовують σ_u і ε_u (див додаток В), отримані для сталі 38Х2МЮА, 30Х3МФА.

Експериментальні дані для отримання кривих течії взяті у власних роботах [1, 8, 13, 14, 16] або в роботах [2, 4, 5].

Нехай ми бажаємо апроксимувати криву течії формулою (2.2).

Прологарифмуємо вираз

$$\ln \sigma_u = \ln A + n \cdot \ln \epsilon_u$$

(2.9)

знайдемо показник n

$$n = \frac{\ln \sigma_u - \ln A}{\ln \epsilon_u} \quad (2.10)$$

Оберемо 5- 6 експериментальних даних і знайдемо середнє значення n_{cp}

$$n_{cp} = \frac{n_i}{5 \div 6} \quad (2.11)$$

Варто відмітити, що коефіцієнт A в формулі (2.2) має фізичний зміст: A дорівнює інтенсивності напружень σ_u при $\epsilon_u=1$, отже взявши два близьких значення σ_u і ϵ_u , що їм відповідає, знаходимо n . Для ізотропного матеріалу n також має фізичний зміст. Показник степеня n у формулі (2.2) дорівнює ϵ_u при досягненні максимального навантаження P_{max} на умовній діаграмі розтягу матеріалу (див. рис. 2.1).

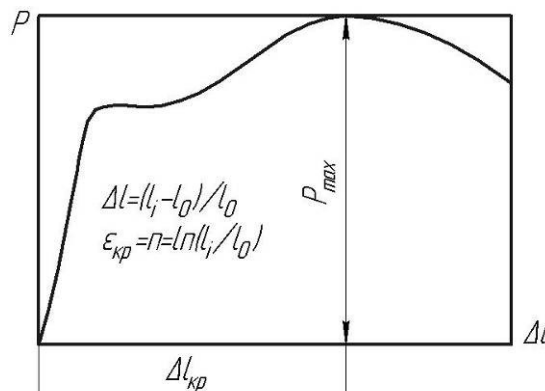


Рис. 2.1. Умовна діаграма розтягу дослідного матеріалу

На рис. 2.2 зображено криві течії сталей 38Х2МЮА і 30Х3МФА побудовані за експериментальними даними на осьовий стиск циліндричних зразків із змащенням торців [14]. Суцільною лінією показано апроксимацію кривої течії за формулою (2.2).

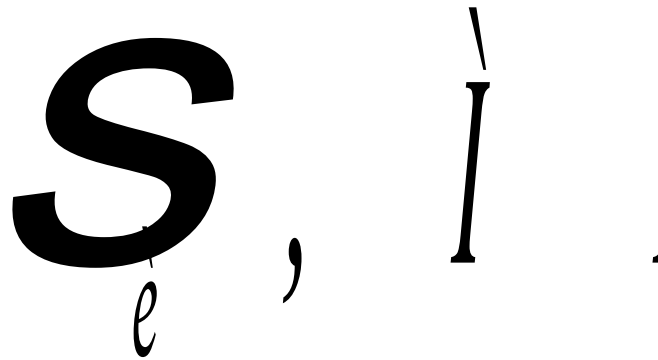


Рис. 2.2. Крива течії сталі 38X2МЮА після термообробки (■- експериментальні дані випробувань на стиск, ⊠ - експериментальні дані випробувань на розтяг, - - апроксимація згідно з рівнянням $\sigma_u = A\epsilon_u^n$, $A=(1488 \pm 1,6)\text{МПа}$, $n=(0,131 \pm 0,009)$ [14].

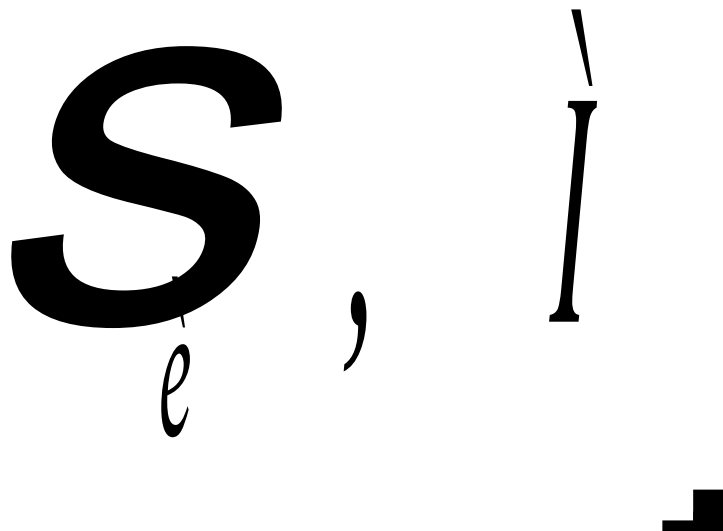


Рис. 2.3. Крива течії сталі 30X3МФА у стані постачання (■- експериментальні дані випробувань на стиск, ⊠ експериментальні дані випробувань на розтяг, - - апроксимація згідно з рівнянням $\sigma_u = A\epsilon_u^n$, $\sigma_u = A\epsilon_u^n$, $A=(1081 \pm 0.92)\text{МПа}$, $n=(0.227 \pm 0.013)$ [14].

2.2. Порядок виконання завдання.

1. На міліметровому папері у масштабі зображується графік у координатах σ_u , МПа, ϵ_u – безрозмірна величина, причому $(\epsilon_u)_{\max}=1$, а σ_u при $\epsilon_u=1$ порівнюється до величини A .

2. Розраховується величина “ n ” як середнє 5÷6 даних (додаток В), за формулою (2.10).
3. Суцільною лінією проводиться апроксимуюча крива за формулою (2.2).
4. Формулюється надпис під графіком „Крива течії сталі 30Х3МФА, $A=1081, n= 0,23$ ”.

2.3. Діаграма пластичності матеріалу

Діаграма пластичності [1, 4, 5] відображає залежність пластичності, мірою якої є гранична до руйнування накопичена інтенсивність деформацій, від показника напруженого стану

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{3\sigma}{\sigma_u}, \quad (2.12)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження, σ_u - інтенсивність напружень, σ – гідростатичний тиск. Показник η характеризує схему напруженого стану і відображає залежність пластичності від відносного гідростатичного тиску.

Під пластичністю тут розуміємо, як вже було зазначено раніше, накопичену інтенсивність деформацій до моменту руйнування

$$\epsilon_p = \int_0^{t_p} \epsilon_i d\tau. \quad (2.13)$$

У теорії деформуємості металів без руйнування діаграма пластичності в наведених координатах є важливою механічною характеристикою матеріалу $\epsilon_p = f(\eta)$ і має вигляд, наведені на рис. 2.4.

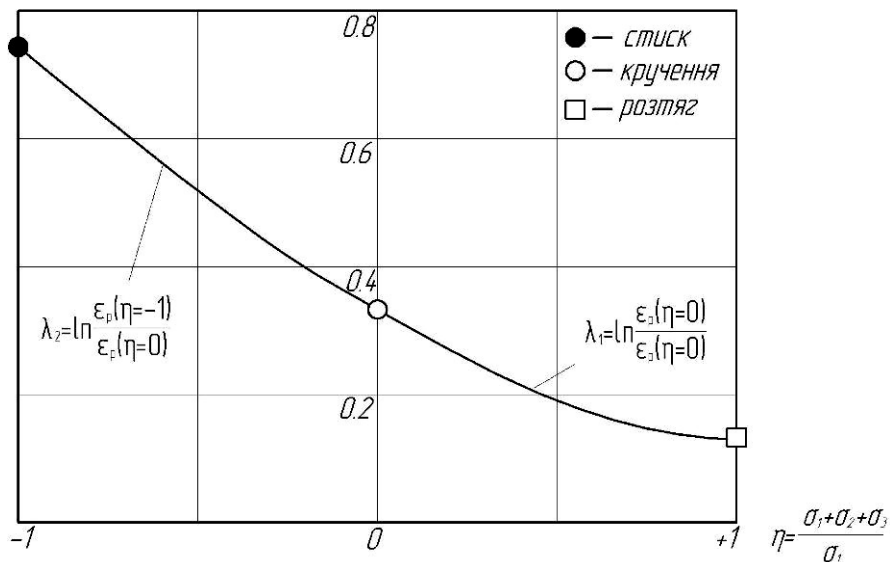


Рис. 2.4. Діаграма пластичності

Діаграма будується за результатами випробувань стандартних циліндричних зразків на розтяг [1, 2, 3-7]. Показник напруженого стану знаходимо за формулою

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1} = 1, \quad (2.14)$$

оскільки $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_u = \sigma_1$.

В умовах зсуву (кручення) показник напруженого стану $\eta = 0$, оскільки $\sigma_1 = +\tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$ а отже

$$\eta = \frac{\tau - \tau}{\sigma_u} = 0. \quad (2.15)$$

При стиску $\eta = -1$, $\sigma_1 = -\sigma_1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$\eta = \frac{-\sigma_1 + 0}{\sigma_1} = -1. \quad (2.16)$$

В умовах розтягу

$$\varepsilon_{p(\eta=1)} = 2 \ln \frac{d_0}{d_u}. \quad (2.17)$$

В умовах зсуву

$$\varepsilon_{p(\eta=0)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_p}{\sqrt{3}}, \quad (2.18)$$

де α – кут зсуву між повздовжньою віссю закручування зразка і дотичною до гвинтової лінії поблизу зламу (рис. 2.5).

Рис. 2.5. Вид зламу закрученого до руйнування зразка

На рис. 2.4 зображено експериментальні точки, нанесені на діаграму пластичності. Яку можна апроксимувати за допомогою формули В.А. Огороднікова [13]

$$\varepsilon_p(\eta) = \varepsilon_p(\eta=0) \exp(-\lambda_1 \eta),$$

(2.19)

де $\varepsilon_p(\eta)$ – гранична деформація при будь-якому показнику η , $\varepsilon_p(\eta=0)$ – гранична деформація при зсуві:

$$\lambda_1 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=0)}{\varepsilon_p(\eta=1)}; \quad (2.20)$$

$$\lambda_2 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=-1)}{\varepsilon_p(\eta=0)}, \quad (2.21)$$

тут λ_1 - чутливість пластичності до зміни показника напруженого стану у області $1 \geq \eta \geq 0$, λ_2 – чутливість пластичності до зміни показника напруженого стану в області $0 \geq \eta \geq -1$.

Задаючись різними значеннями η , розраховуємо за формулою (2.19) значення ε_p і відкладаємо на діаграмі пластичності. На рис. 2.4 зображено побудовану таким чином діаграму пластичності сталі 38Х2МЮА.

2.4. Порядок побудови діаграм пластичності

1. На міліметровому папері для побудови діаграми пластичності наносять експериментальні точки: розтягу – „□”, зсуву – „○”, стиску – „●” (див. додаток Г).
2. Розраховують коефіцієнти λ_i для свого матеріалу (додаток В), у якій експериментальні дані взяті з власних робіт [1, 8, 13, 14] або запозичені із робіт [2, 4, 5].
3. За формулою (2.19) розраховуємо $\varepsilon_p(\eta)$ для показників $\eta = -0,75$; $\eta = -0,5$; $\eta = -0,25$. При цьому у формулу (2.19) підставляємо λ_2 .
4. За формулою (2.19) розраховуємо $\varepsilon_p(\eta)$ для показників $\eta = 0,75$; $\eta = 0,5$; $\eta = 0,25$. При цьому у формулу (2.19) підставляємо λ_1 .
5. Суцільною лінією показуємо діаграму пластичності, апроксимовану формулою (2.19).

Контрольні запитання.

1. Як будується крива течії матеріалу?
2. Як виконується апроксимація кривої течії, який фізичний зміст коефіцієнтів апроксимації?
3. Що називають діаграмою пластичності матеріалу?
4. Як розраховують показники напруженого стану для різних видів деформації?
5. Що розуміють під поняттям “пластичність”?
6. Як будується діаграма пластичності матеріалу?
7. Як виконується апроксимація діаграми пластичності?

3. ТОНКІ ПЛАСТИНКИ ТА ОБОЛОНКИ

3.1. Безмоментна теорія оболонок

Оболонка – це тверде тіло, обмежене криволінійними поверхнями. Якщо відстань між цими поверхнями (товщина) невелика порівняно з іншими розмірами, то оболонку називають тонкостінною. До таких випадків відносять оболонки із співвідношенням товщини і радіусів кривини $h/R \leq 1/20$. Наприклад – резервуари, парові котли, корпуси ракет, літака, корабля, шкаралупа яйця, морська черепашка, череп голови та інше.

Пластинкою називають тверде тіло, обмежене плоскими поверхнями, відстань між якими (товщина) значно менша за розміри в площині тіла. Пластинки також можуть бути сталої або змінної товщини.

Залежно від форми зовнішнього обрису пластинки відносять до прямокутних, круглих, еліптичних тощо.

Теорія розрахунку пластинок і оболонок дуже складна. В інженерних застосуваннях, найпоширеніша так звана технічна теорія пластинок і оболонок. Ця теорія опирається на припущення запропонованні Кіргофом і Лявим.

1. Прямолінійний матеріальний елемент, перпендикулярний до середньої поверхні оболонки, залишається перпендикулярний до неї і після деформування. Це припущення називають принципом прямих нормалей.

2. Напруження, перпендикулярні до середньої поверхні, дуже малі. Це припущення тотожне твердженню, що шари оболонки, паралельні середній поверхні і не тиснуть один на одного.

3. Змінення довжини перпендикулярно до середньої поверхні елемента дуже мале. Розраховуються оболонки за безмоментною і моментною теоріями.

Безмоментна теорія оболонок базується на припущенні про рівномірний розподіл напружень по товщині. Це означає, що гнучких моментів немає, і оболонка працює лише на розтяг чи на стиск. Такий розподіл напружень можливий за умов, коли оболонка є тілом обертання, вона не має різних переходів і жорстких закріплень, навантаження – розподілене симетрично відносно осі обертання, скупчених сил немає. Якщо ці умови не виконуються, то напруження буде „моментним” тобто оболонка має згин. У цьому разі точніші результати дає застосування моментної теорії, яка, крім розтягу і стиску, враховує і згин.

3.1.1. Розрахунки осесиметричних оболонок за безмоментною теорією

Геометричне місце точок, яке поділяє оболонку по товщині навпіл, називають середньою поверхнею. Ця поверхня для оболонки відіграє приблизно таку саму роль, як і поздовжня вісь для стержня.

Під осесиметричними розуміють оболонки, середня поверхня яких є оболонкою обертання (рис. 3.1).

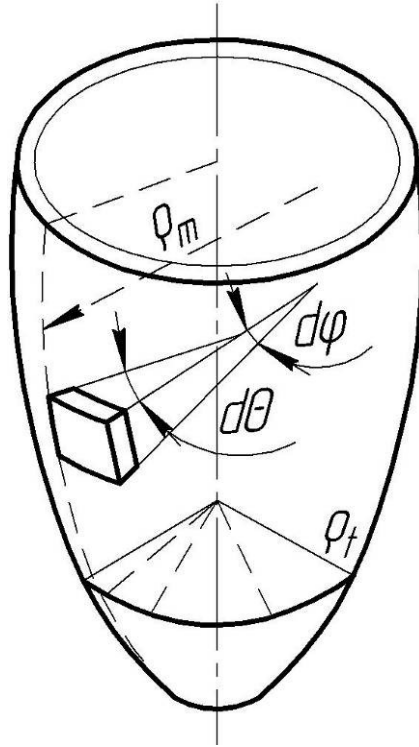


Рис. 3.1. Осесиметрична оболонка обертання

У такому випадку в радіальному напрямку також маємо осьову симетрію. У цьому разі похідні всіх геометричних характеристик, зусиль, напружень і переміщень оболонки за полярним кутом дорівнюють нулю. Задача стає визначеною, тобто відшукується функція одного незалежного змінного, наприклад, зміною радіуса чи висоти.

Переріз оболонки площиною, яка проходить через вісь симетрії (рис. 3.1), має назву меридіонального перерізу.

Лінія перерізу меридіанної площини з середньою поверхнею – меридіан, становить собою твірну, обертанням якої навколо осі оболонки окреслюється середня поверхня.

Через ρ_m позначено радіус кривизни меридіана (змінний по висоті – як показано на рис. 3.1), і через ρ_t – радіус кривизни середньої поверхні.

Оболонки обертання найпростіше розрахувати, якщо вважати розподіл напружень по товщині рівномірним. Це можливо за відсутності згинаючих моментів, зосереджених сил, різних переходів і жорстких закріплень. Виконання цих умов дає змогу застосувати безмоментну теорію оболонок, до розгляду якої зараз переходимо.

Для оболонок, які розглянуті, приймаємо схему плоского напруженого стану (рис. 3.2) $\sigma_t \neq 0$, $\sigma_m \neq 0$, $\sigma_p = 0$.

Напруження σ_m, σ_t пов'язані між собою таким чином

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{t} \quad (3.1)$$

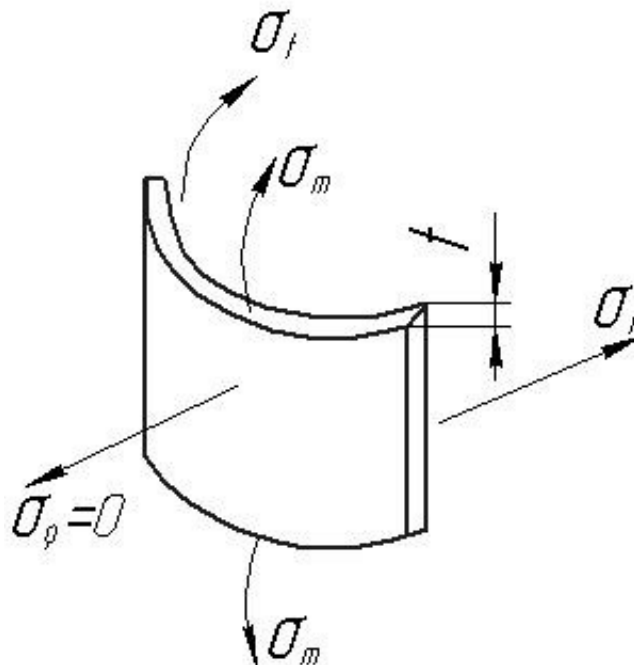


Рис. 3.2. Плоский напружений стан осесиметричної оболонки

Залежність (3.1) уперше вивів Лаплас. У рівнянні Лапласа додатне напруження відповідає розтягу, а від'ємне напруження – стиску, якщо радіуси кривизни брати зі знаком плюс для випуклої оболонки і мінус – для вигнутої. Внутрішній тиск “q” при виведенні рівняння (3.1) вважався додатним.

Зовнішній тиск необхідно підставляти в (3.1) зі знаком мінус. Відзначимо що напруження σ_m і σ_t мають порядок $\frac{qR}{t}$, нормальні до поверхні оболонки напруження $\sigma = -q$. Оскільки характерний радіус кривизни оболонки $(\rho_t, \rho_m) \gg t$, то $(\sigma_t, \sigma_m) \approx \sigma$. Тому напруженням σ можна знехтувати порівняно з σ_t і σ_m і вважати напруження в оболонках плоским. Для записування умов міцності необхідно застосовувати один з критеріїв міцності. Допустиме значення напруження необхідно зменшити для врахування можливої корозії і щоб надати оболонці більшої жорсткості.

Рівняння Лапласа містить два невідомих напруження. Щоб визначити їх, потрібне ще одне рівняння. Його можна скласти, умовно відтинаючи від

оболонки одну її частину і складаючи рівняння рівноваги для залишеної частини.

Площина перерізу є перпендикулярною до осі обертання, при цьому стінка оболонки перетинається перпендикулярно до меридіана (рис. 3.3). Відкидати зручніше ту частину, на якій є опорні в'язі. Відокремлена нижня частина оболонки зрівноважена силою тиску $q\pi R^2$ на поверхні рідини, вагою Q рідини та вагою самої оболонки нижче перерізу і внутрішніми зусиллями, загальне значення яких дорівнює $2\pi R t \sigma_m$.

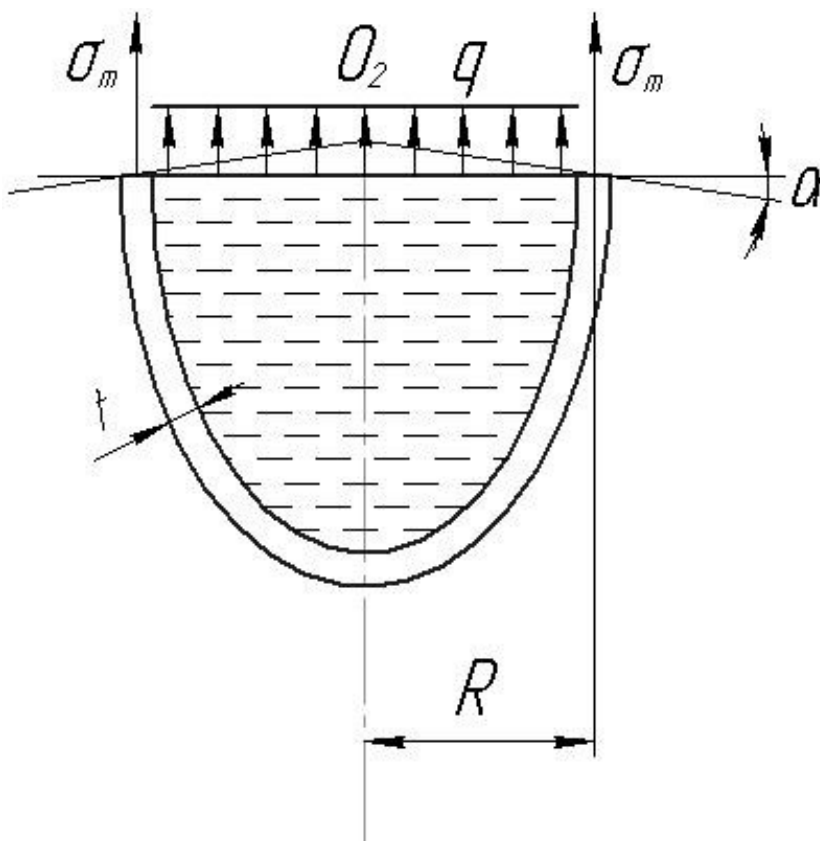


Рис. 3.3. Площина перерізу осесиметричної оболонки

Проектуючи вказані сили на вісь оболонки, одержимо

$$2\pi R t \sigma_m \cos \alpha = q\pi R^2 + Q, \quad (3.2)$$

звідки

$$\sigma_m = qR/2t \cos \alpha + Q/2\pi R t \cos \alpha. \quad (3.3)$$

Тиск q рідини густиною ρ на глибині z від поверхні дорівнює $z\rho$. Після визначення σ_m напруження σ_t визначають із (3.1)

$$\sigma_t = q\rho_t/h - \sigma_m\rho_t/\rho_m = \rho_t\left(\frac{q}{t} - \frac{\sigma_m}{\rho_m}\right). \quad (3.4)$$

При навантаженні оболонки рівномірним внутрішнім тиском, із (3.4) випливає співвідношення

$$\sigma_m = q\rho_t/2t, \quad (3.5)$$

де

$$\rho_t = \frac{R}{\cos \alpha},$$

і далі

$$\sigma_t = \rho_t \left(q/t - \frac{\sigma_m}{2t\rho_m} \right) = \left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m} \right) \frac{q\rho_t}{2t}. \quad (3.6)$$

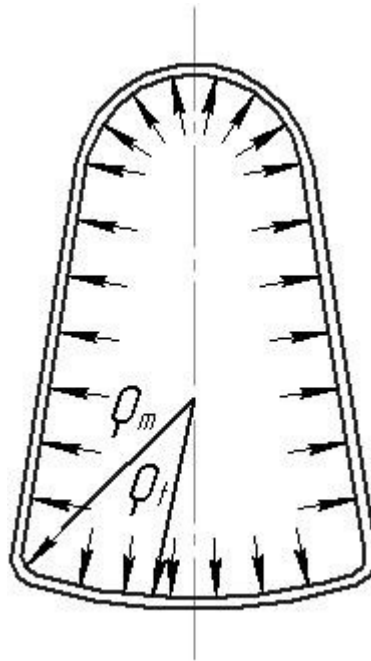


Рис. 3.4. Оболонка з перерізом однозв'язного обрису

Звідси випливає, що при $\rho_t \neq 2\rho_m$ тангенціальне (кругове) напруження σ_t стає стискуючим. Це необхідно мати на увазі, бо в разі дії стискуючих напружень може статися втрата стійкості початкової форми, і на оболонці з'являться складки.

Для циліндричної оболонки (рис. 3.5) $\rho_t = R$; $\rho_m = \infty$, тоді напруження:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2t}; \quad \sigma_t = \frac{qR}{t} \quad (3.7)$$

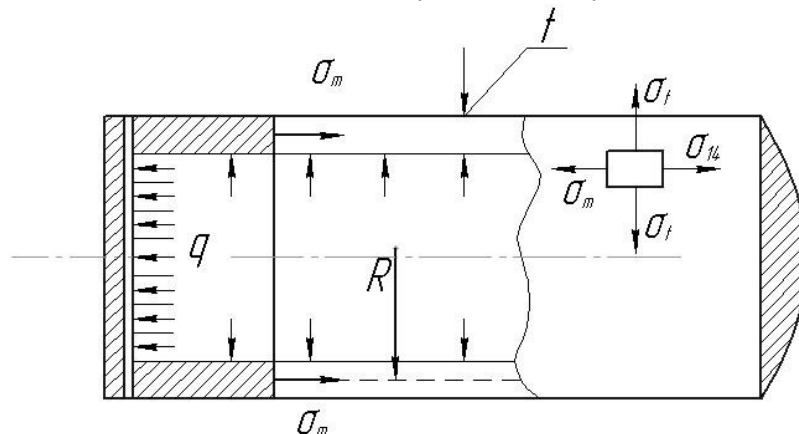


Рис. 3.5. Циліндрична оболонка

Для кульової оболонки (рис. 3.6) $\rho_t = \rho_m = R$ і відповідно

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{qR}{2t}. \quad (3.8)$$

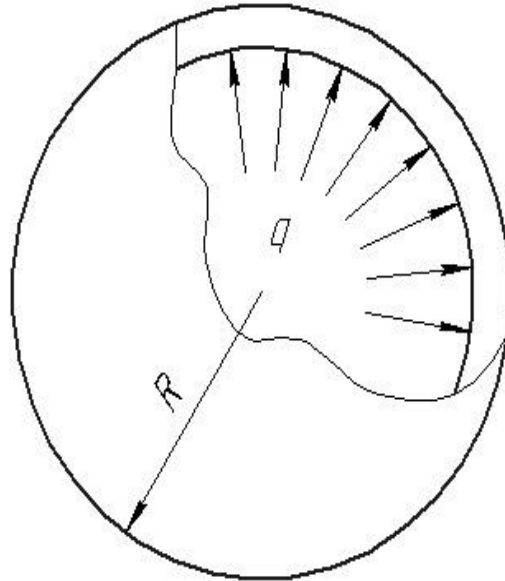


Рис. 3.6. Кульова оболонка

З формул (3.7) і (3.8) видно, що за однакового тиску, радіусу і товщини найбільше нормальне напруження в кульовій оболонці вдвоє менше порівняно з циліндричною. Отже, з погляду економічності, форма кулі є найдоцільнішою для оболонок, які зазнають дії внутрішнього тиску. Але з технологічних міркувань оболонки роблять циліндричної форми і з днищами різної форми: кульової, еліпсоїдної чи коробової (яка складається з частини кулі і частини торцевої поверхні). Напруження в циліндричній частині резервуара визначають за формулою (3.7) незалежно від форми днища, в кульовому днищі за формулою (3.8).

3.2. Знаходження напружень та переміщень у круглих пластинках

Радіальні напруження у круглих пластинках будуть рівні:

$$\sigma_r = \frac{EZ}{1-\mu^2} \cdot \frac{\mu_r}{D}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_t = \frac{EZ}{1-\mu^2} \cdot \frac{M_t}{D}, \quad (3.10)$$

де D – коефіцієнт жорсткості

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}, \quad (3.11)$$

де E – модуль пружності, t – товщина оболонки, μ – коефіцієнт Пуассона, Z – координата, μ_r , M_t – моменти.

Підставимо вираз D (3.11), знаходимо

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{t^3} z, \quad (3.12)$$

$$\sigma_t = \frac{12M_t}{t^3} z. \quad (3.13)$$

Максимальні напруження мають місце при $z = B \pm \frac{t}{2}$, тому

$$\sigma_1^{\max} = \pm \frac{6M_r}{t^2}: \quad (3.14)$$

(3.15)

На рисю 3.7 наведені схеми затиснутої круглої пластини (а) та шарнірно закріпленої пластини (б)

а)

б)

Рис. 3.7. Схема навантаження круглої пластини:

а) пластина затиснена;

б) пластина шарнірно закріплена.

У цьому випадку значення моментів M_z , M_t для варіанта а можна знайти за формулами:

$$M_r = \frac{q}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)]; \quad (3.16)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)]. \quad (3.17)$$

Прогин

$$\omega = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (3.18)$$

У випадку закріплення б

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16} (3+\mu)(R^2 - r^2) \\ M_t &= \frac{q}{16} (3+\mu) \left(R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Вираз для переміщень має вигляд

$$\omega = \frac{q}{16D} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} R^2 r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right]. \quad (3.20)$$

Згідно з виразом (3.19) будемо епюру згинаючих моментів (рис. 3.8).

Рис. 3.8. Епюри згинаючих моментів

У випадку зміщеного контуру найбільше напруження розтягу виникає на верхній поверхні навколо контуру згідно з формулою:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{2qR^2}{16t_2} \cdot 6; \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu qR^2}{16} \cdot \frac{6}{t^2}, \quad (3.21)$$

де $\sigma_3 = 0$.

Еквівалентне напруження

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 - K \sigma_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{qR^2}{t^2}.$$

(3.22)

В випадку шарнірно-опертого контуру найбільші напруження розтягу виникають в центрі у нижній поверхні пластини:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3+\mu}{16} \cdot \frac{qR^2}{t^2} \cdot 6, \quad \sigma_3 = 0; \quad (3.23)$$

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 - K \sigma_3 = \frac{3}{8}(3+\mu) \cdot \frac{qR^2}{t^2} \leq \sigma_T.$$

(3.24)

Найбільші прогини, згідно з виразом (3.18) і (3.20) у випадках *a* та *б*:

$$a) \quad \omega_{\text{max}} = \frac{qR^4}{64D}; \quad (3.25)$$

$$б) \quad \omega_{\text{max}} = \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qR^4}{64D}. \quad (3.26)$$

3.3. Розрахунок пластин за межами пружності

Нехай пластина за варіантом *a*) деформується за межами пружності.

Граничне навантаження [3]

$$q_{\text{зп}} = 11,3 \frac{M_T}{R^2} = 11,3 \frac{\sigma_T t^2}{4R^2}. \quad (3.27)$$

Слідуючи роботі [8], у формулу (3.27) введемо коефіцієнт β замість 11,3, так як за межами пружності цей коефіцієнт залежить від товщини пластини.

Тоді формула (3.27) має вигляд

$$q_{ep} = \frac{\beta \sigma_u (\epsilon_u) t^2}{4R^2}, \quad (3.28)$$

де σ_u – інтенсивність напружень, яка залежить від ϵ_u . Величину ϵ_u визначимо за формулою

$$\epsilon_u = \alpha \frac{\omega^2}{R^2}, \quad (3.29)$$

де α – коефіцієнт, який залежить від товщини металу пластини.

У роботі [8] значення α визначається як

$$\alpha = Dt_0^n, \quad (3.30)$$

де $D = 0,96$, $n = 0,2$. Коефіцієнт β у формулі (3.28) залежить від товщини пластин і знаходиться за допомогою рис. 3.9.

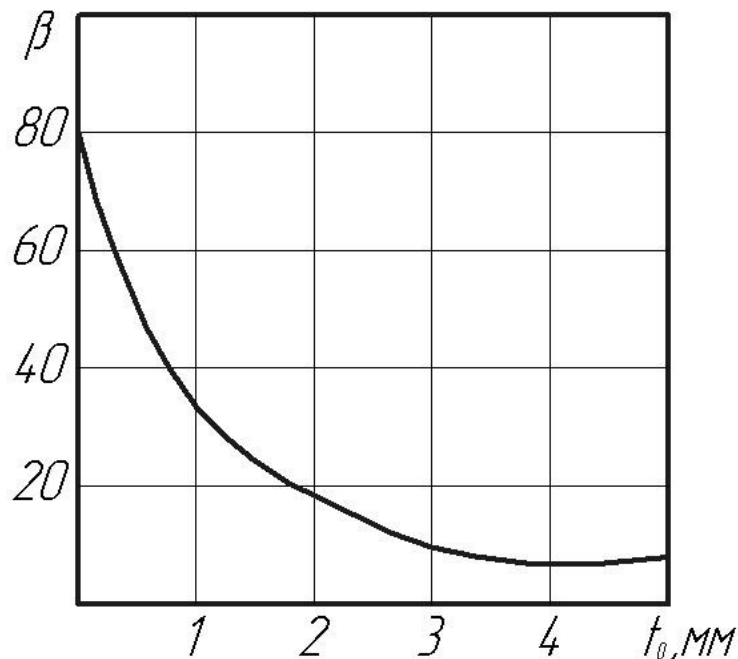


Рис. 3.9. Знаходження коефіцієнта β у формулі (3.28), у залежності від товщини пластини

Таким чином, при розрахунку круглих пластин за межами пружності у формулу (3.27) підставимо залежність $\sigma_u(\epsilon_u)$, величину $\sigma_u = A\epsilon_u^n$, де ϵ_u знайдено по (3.29).

3.4. Контрольна робота № 1

Приклад розрахунку циліндричної посудини (оболонки)

Днище циліндричної посудини закріплюють або за допомогою привареного фланця (рис. 3.10 а), або приварюють до циліндричного

корпусу (рис. 3.10, б). Матеріал днища знайти в табл. 3.1, там же наведено дані R , t , σ_T , $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,30$. Знайти:

1. Граничне навантаження днища q_{ep} для двох варіантів б і в.
2. Для знайденого граничного навантаження q_{ep} знайти товщину оболонки h , якщо матеріал оболонки такий самий як у днища, для двох варіантів закріплення днища б і в.
3. Знайти максимальний прогин днища при заданому q_{ep} для двох варіантів прикріплення днища б і в.

Дано: матеріал – сталь вуглецева; $\sigma_T = 300$ МПа; коефіцієнт запасу $n = 2,5$; модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуасона $\mu = 0,3$; $R = 200$ мм; $t = 10$ мм.

Розв'язок. Складемо розрахункові схеми. В першому випадку жорсткість днища не набагато перевищує жорсткість циліндричного корпусу. Це унеможливує лінійне і кутове переміщення зовнішнього контуру днища, тобто закріплення можна вважати жорстким (рис. 3.10, б).

У другому випадку зовнішній контур днища під дією тиску може повертатися разом з корпусом на деякий кут. Тому за розрахункову схему днища можна взяти пластинку, шарнірно оперту зовнішнім контуром і обмежену сталим тиском (рис. 3.10, в).

Варіант а.

$$q_{ep} = \frac{4t^2\sigma_T}{3R^2n} = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot 3000}{3 \cdot 20^2 \cdot 2,5} = 4 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

тут t в см., $[\sigma]$ - $\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, R - см – відповідь - $\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$.

Другий варіант – t – м, σ_T - МПа, R - м – відповідь – МПа.

$$q_{ep} = \frac{4 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{3 \cdot 0,2^2 \cdot 2,5} = 0,4 \text{ МПа}$$

Варіант б.

$$\sigma_{екв} = \frac{3qR^2(3+\mu)}{8t^2} \leq [\sigma],$$

звідки

$$q_{ep} \leq \frac{8 \cdot t^2 \cdot \sigma_T}{n \cdot 3R^2(3+\mu)} = \frac{8 \cdot 1^2 \cdot 3000}{2,5 \cdot 3 \cdot 20^2(3+0,3)} = 2,42 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} = 0,242 \text{ МПа},$$

або

$$q_{ep} = \frac{8 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{2,5 \cdot 3 \cdot 0,2^2 \cdot 3,3} = 0,242 \text{ МПа}.$$

Табл. 3.1.

Вихідні дані до виконання розрахунку пластин

№ з/П	R , см	t , см	$\sigma_{0,2}$, МПа	A , МПа	n	Примітка
0	10	0,2	450	825	0,19	Ст. 45
1	8	0,25	400	840	0,21	фольсваген
2	9	0,3	560	1480	0,18	P18
3	12	0,28	157	757	0,19	Ст. 20
4	14	0,35	320	900	0,27	Ст. 3
5	15	0,39	325	760	0,22	Ст. 20

6	5	0,1	440	950	0,15	Ст. 35
7	9	0,15	750	1250	0,10	40X
8	11	0,16	350	1380	0,23	08ГСЮФ
9	12	0,18	300	1000	0,19	08КП
10	8	0,19	310	1450	0,25	X18H9T
11	7	0,22	271	786	0,18	13M5A
12	10	0,23	650	2275	0,17	XH70BMГЮ
13	5	0,22	525	2350	0,16	XH77ГЮР
14	4,5	0,093	235	292	0,2	Д16АМ
15	4,8	0,11	300	1000	0,19	08КП
16	4,9	0,155	300	1600	0,19	Ст. 45
17	5,0	0,165	400	800	0,21	03 ХГЮ
18	5,2	0,185	300	800	0,18	Ст. 10

Продовження табл. 3.1

19	5,5	0,23	290	760	0,18	Ст. 08КП
20	6	0,245	300	1000	0,216	- // -
21	6,5	0,25	300	1000	0,22	- // -
22	7	0,27	285	1000	0,26	- // -
23	5	0,5	480	1320	0,6	P12
24	5,5	0,45	680	1250	0,10	40X
25	6	0,40	400	957	0,157	Ст. 35
26	6,5	0,35	300	1010	0,34	08КП
27	7	0,30	375	1500	0,28	У8А
28	7,5	0,25	390	780	0,20	13M5A
29	8,5	0,20	442	1000	0,20	ШХ-15
30	9	0,15	320	900	0,27	Ст. 3
31	9,5	0,17	365	1015	0,16	Ст. 45
32	10	0,18	255	760	0,22	Ст. 20
33	10,5	0,19	390	830	0,20	фольсваген
34	11	0,20	495	1200	0,19	30X3MФА
35	11,5	0,25	421	912	0,11	51XФА
36	12	0,26	235	292	0,20	Д16АМ
37	5,2	0,28	400	800	0,21	03ХГЮ
38	5,25	0,29	310	1450	0,25	X18H9T
39	5,5	0,30	300	800	0,18	Ст. 10
40	6	0,32	271	786	0,18	13M5A
41	6,5	0,35	350	1380	0,23	08 ГСЮФ
42	7	0,38	502	920	0,21	30XГСА
43	7,5	0,39	230	1300	0,21	У8А
44	8	0,4	500	1200	0,2	38X2MЮА
45	8,5	0,45	421	912	0,22	51XФА
46	9	0,46	442	1000	0,20	ШХ15
47	9,5	0,47	271	786	0,21	13M5A
48	10,5	0,48	525	2350	0,17	XH77ГЮР
49	10	0,49	320	900	0,27	Ст. 3
50	10,5	0,52	350	1380	0,23	08ГСЮФ

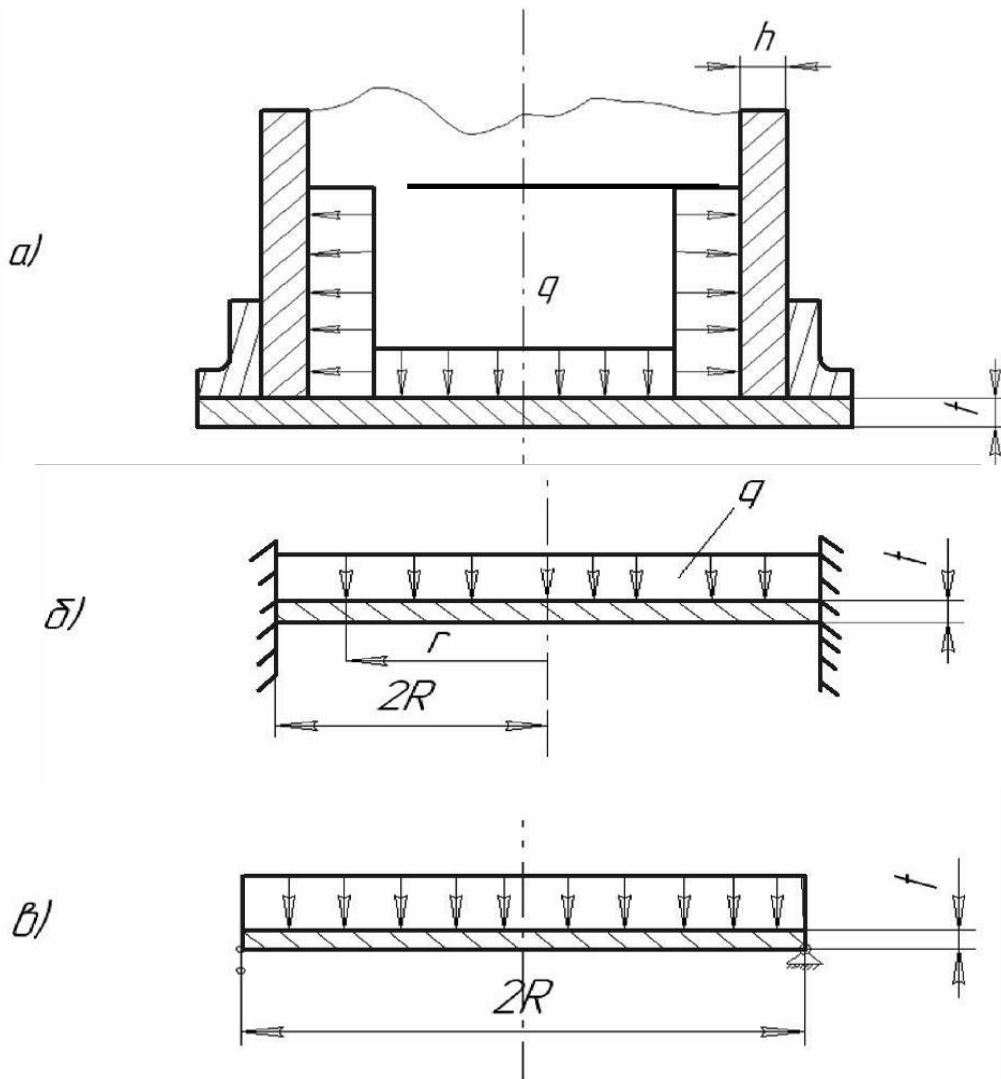


Рис. 3.10. Приклад розрахунку оболонки сумісно з пластиною

Визначимо при розрахованому q_{zp} товщину циліндричної оболонки.

Варіант а.

$$\sigma_{екв} = \frac{qR}{h} \leq [\sigma],$$

$$h \geq \frac{nqR}{\sigma_T} = \frac{4 \cdot 200 \cdot 2,5}{3000} = 0,67 \text{ см} = 6,7 \text{ мм} = 0,00067 \text{ м}.$$

Або q , МПа, R , м

$$h \geq \frac{0,4 \cdot 0,2 \cdot 2,5}{300} = 0,00067 \text{ м} = 6,7 \text{ мм}$$

Варіант б.

$$h \geq \frac{nqR}{\sigma_T} = \frac{2,42 \cdot 200 \cdot 2,5}{3000} = 0,4 \text{ см} = 4 \text{ мм} = 0,0004 \text{ м}$$

Або q , МПа, R , м

$$h \geq \frac{0,242 \cdot 0,2 \cdot 2,5}{300} = 0,0004 \text{ м}$$

Максимальний прогин днища при знайденому q_{zp} для двох варіантів прикріплення днища а і б.

Варіант а.

Знаходимо коефіцієнт жорсткості по (3.11)

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1^3}{12(1-0,3^2)} = 183150,$$

або

$$D = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1^3}{12(1-0,3^2)} = 0,0183150.$$

Прогин знаходимо за формулою (3.25)

$$\omega_{\max} = \frac{qR^4}{64D} = \frac{4 \cdot 20^4}{64 \cdot 183150} = 0,0005 \text{ м} = 0,05 \text{ см} = 0,5 \text{ мм}.$$

Варіант б.

Знаходимо прогин за формулою (3.26)

$$\omega_{\max} = \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qR^4}{64D} = \frac{(5+0,3)}{(1+0,3)} \cdot 0,0005 = 0,002 \text{ м} = 2 \text{ мм}.$$

Допустимий прогин $[\omega]$ прийнятий $[\omega] = \frac{t}{5} = \frac{10 \text{ мм}}{5} = 2 \text{ мм},$

$$\omega_{\max} \leq [\omega].$$

Умова жорсткості виконується.

3.5. Контрольна робота № 2

Розрахунок пластин

Пластина защемлена по контуру (рис. 3.11, а). У табл. 3.1 наведено дані: $R, t, \sigma_T, E, \mu=0,30$. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$. Матеріал зміцнюється за законом $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$. Коефіцієнти A і n наведено у табл. 3.1.

Пластина шарнірно оперта (рис. 3.11, б). В табл. наведено дані: R, t, σ_T, E, μ . Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$. Матеріал зміцнюється за законом $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$. Коефіцієнти A і n наведено в табл. 3.1.

1. Знайти для двох варіантів q_{sp} в пружній області. При визначеному q_{sp} знайти максимальний прогин для двох варіантів а і б.
2. Знайти q_{sp} за межами пружності для варіанти а, коли прогин пластини $\omega_{\max} = 5t$.

Нехай $t=10 \text{ мм}, R=200 \text{ мм}, \sigma_T=300 \text{ МПа}, n=2,5, \mu=0,3,$
 $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, A=900 \text{ МПа}, n=0,27$.

Варіант а.

$$q_{sp} = \frac{4t^2\sigma_T}{3R^2n} = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot 3000}{3 \cdot 20^2 \cdot 2,5} = 4 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2},$$

$$q_{sp} = \frac{4 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{3 \cdot 0,2^2 \cdot 2,5} = 0,4 \text{ МПа}.$$

Варіант б.

$$q_{zp} \leq \frac{8 \cdot t^2 \cdot \sigma_T}{n \cdot 3R^2(3 + \mu)} = \frac{8 \cdot 1^2 \cdot 3000}{2,5 \cdot 3 \cdot 20^2(3 + 0,3)} = 2,42 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 0,242 \text{ МПа},$$

або

$$q_{zp} = \frac{8 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{2,5 \cdot 3 \cdot 0,2^2 \cdot 3,3} = 0,242 \text{ МПа}.$$

Нехай пластина деформується за межами пружності, коли

$$\omega_{\max} = 5t = 5 \cdot 1 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}.$$

Знаходимо q_{zp} за формулою (3.28)

$$q_{zp} = \beta \frac{\sigma_u(\epsilon_u)t^2}{4R^2},$$

де $\beta = 10$ див. рис. 3.3.

ϵ_u знаходимо за формулою (3.29), або $\sigma_u = A\epsilon_u^n$

$$\epsilon_u = \alpha \frac{\omega^2}{R^2} = 1,52 \frac{5^2}{20^2} = 0,095,$$

де α знаходимо за формулою (3.30)

$$\alpha = Dt_0^n = 0,96 \cdot 10^{0,2} = 1,52.$$

Інтенсивність напружень (див. формулу 2.2)

$$\sigma_u = A\epsilon_u^n = 900 \cdot 0,095^{0,27} = 477 \text{ МПа},$$

$$q_{zp} = 10 \frac{477 \cdot 0,01^2}{4 \cdot 0,2^2} = 2,98 \text{ МПа}.$$

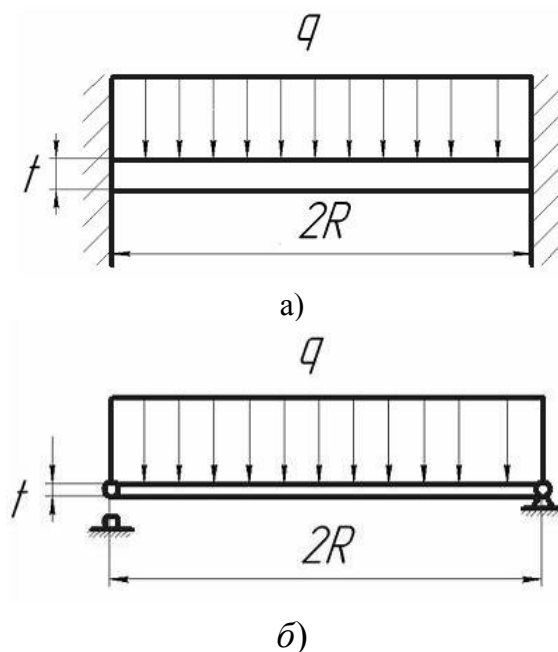


Рис. 3.11. Схема навантаження:
а) кругла пластина защемлена;
б) кругла пластина шарнірно закріплена.

Контрольні запитання.

1. Що називають оболонкою?

2. Що називають пластинкою?
3. Які припущення запропоновані Кіргофом і Лявом стосовно теорії пластинок і оболонки?
4. На якому припущенні базується безмоментна теорія оболонки?
5. Що називають серединною поверхнею, осесиметричною оболонкою, меридіональним перерізом?
6. Яку залежність вивів Лаплас для оболонки з урахуванням плоского напруження стану?
7. Який порядок розв'язання рівняння Лапласа?
8. Як визначаються напруження для циліндричної оболонки?
9. Як визначаються напруження для кульової оболонки?
10. Як визначаються напруження у круглих пластинках?
11. Як визначаються переміщення у круглих пластинках?
12. Як розраховуються пластинки за межами пружності?

4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ

4.1. Тензор напружень

Одне з основних завдань механіки деформуємого твердого тіла – аналіз напруженого стану. Напружений стан навколо точки характеризується тензором другого рангу. Слово тензор перекладається як напруження (tension – англ.). Введення Ейнштейном тензорного числення спонукало механіків одними з перших застосувати узагальнене поняття вектора - тензора - до аналізу напруженого стану у точці.

Напруження – інтенсивність внутрішніх сил, тобто внутрішня сила, яка прикладається на одиницю площі.

Напружений стан у точці характеризується тензором напруження другого рангу, компоненти якого в декартовій системі координат позначаються таким чином

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Компоненти тензора напружень, або напруження σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} (надалі – σ_x , σ_y , σ_z), направлені по нормалях майданчиків, перпендикулярних відповідно до координатних осей x , y , z (рис. 4.1), називаються нормальними. Вони викликають деформацію розтягу або стиску. Деформації розтягу, які мають напрямом від вказаних майданчиків, вважають додатними. Напруження τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} називаються дотичними. Вони викликають зсуви по відповідних осях xy , xz , yz . Наприклад, τ_{yz} – дотичне напруження, яке діє на майданчики перпендикулярно до осі y і направлене уздовж осі z .

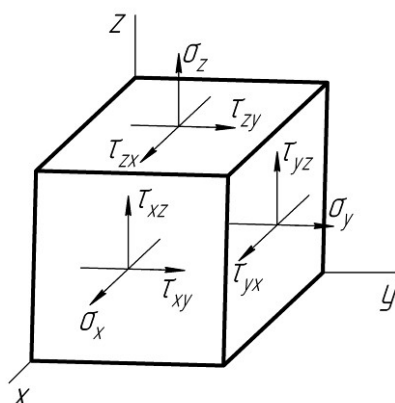


Рис. 4.1. Позначення напружень у декартовій системі координат

Дотичні напруження вважаються додатними, якщо їм відповідає зменшення кута між волокнами, до деформації, направленої вздовж координатних осей, вказаних в індексах (рис. 4.2). На рис. 4.1 всі

напруження додатні.

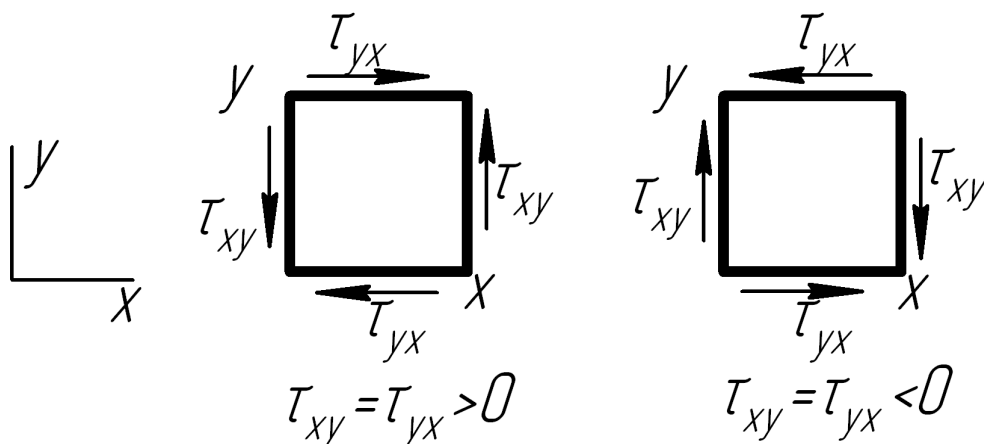


Рис. 4.2. До визначення правила знаків дотичних напружень

Якщо розглянути умову рівноваги куба, на гранях якого діють напруження, можна довести справедливість закону парності дотичних напружень. Так, згідно рис. 4.1, сума моментів усіх сил щодо ребра, що збігається з віссю z , рівна нулю. Тоді на видимій грані куба діє сила $\tau_{xy} dy dz$, плече цієї сили dx , на перпендикулярній грані – $\tau_{yx} dx dz$, плече цієї сили dy .

Остаточно одержимо

$$\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dy dz = 0,$$

отже

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

У поверхні тіла напруження задовольняють рівнянням Коші

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \mu_x + \tau_{xy} \mu_y + \tau_{xz} \mu_z &= P_x, \\ \tau_{yx} \mu_x + \sigma_y \mu_y + \tau_{yz} \mu_z &= P_y, \\ \tau_{zx} \mu_x + \tau_{zy} \mu_z + \sigma_z \mu_z &= P_z, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

де P_x, P_y, P_z – проекції поверхневого навантаження, віднесеного до одиниці площі, на координатні осі; μ_x, μ_y, μ_z – направляючі косинуси нормалі до поверхні.

Якщо $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ – напруження в системі координат x, y, z , а $\sigma'_x, \tau'_{xy}, \dots$ – напруження у системі координат x', y', z' , і якщо $C_{xx} = \cos(xx')$, $C_{xy} = \cos(xy')$ і т. д. (підкреслимо, що перший індекс при C указує вісь «не штрихованої», а другої – «штрихованої» системи координат), то справедливі наступні формули перетворення напруження при перетворенні координат:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x C_{xx} C_{xx} + \tau_{xy} C_{xy} C_{yx} + \dots + \sigma_z C_{zx} C_{zx}, \\ \tau'_{xy} &= \sigma_x C_{xx} C_{xy} + \tau_{xy} C_{xy} C_{yy} + \dots + \sigma_z C_{zx} C_{zy}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

і т. д. Ці формули підлягають такій закономірності. У правій частині маємо дев'ять доданків, одним із співмножників яких є одне з дев'яти напружень в «нештрихованій» системі координат x, y, z . Якщо позначення нормального напруження подумки доповнити ще одним індексом, наприклад $\sigma_{y(y)}$ (таке позначення зрозуміле, оскільки σ_y – напруження, що

діє на майданчик, перпендикулярне до осі y , і направлене вздовж осі x), то співмножник отримуємо у вигляді двох C з такими індексами. У першого C перший індекс аналогічний першому індексу напруження у «не штрихованій» системі координат, а другий – першому індексу напруження у «штрихованій» системі координат. У другого C перший індекс такий самий як другий індекс у напруження в «не штрихованій» системі координат, а другий індекс такий самий як другий індекс напруження у «штрихованій» системі координат.

4.2. Головні напруження і головні площадки

Головними називаються майданчики, на які не діють дотичні напруження. Нормальні напруження, що діють на цих майданчиках, називаються головними напруженнями. Напрями нормалей до головних майданчиків називають головними напрямками тензора напружень, а суміщені з ними осі – головними осями цього тензора.

Головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ визначають розв'язанням рівняння

$$\sigma_e^3 - I_1\sigma_e^2 - I_2\sigma_e - I_3 = 0, \quad (4.3)$$

де I_1, I_2, I_3 – головні інваріанти тензора напружень. Вони таким чином виражаються через напруження:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Направляючі косинуси першого головного напрямку, тобто напрямку, вздовж якого діє $\sigma_1, v_x^I, v_y^I, v_z^I$, знаходять із системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)v_x^I + \tau_{xy}v_y^I + \tau_{xz}v_z^I &= 0; \\ \tau_{yx}v_x^I + (\sigma_y - \sigma_1)v_y^I + \tau_{yz}v_z^I &= 0; \\ \tau_{zx}v_x^I + \tau_{zy}v_y^I + (\sigma_z - \sigma_1)v_z^I &= 0; \\ (v_x^I)^2 + (v_y^I)^2 + (v_z^I)^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

З перших трьох рівнянь (4.5) незалежні тільки два. Аналогічно визначаються направляючі косинуси двох інших головних напрямків. Якщо $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, то головні напрями визначаються однозначно і виявляються взаємно ортогональними.

Одне із головних напружень є найбільшим, а одне – найменшим із усього нормального напруження, що діє на майданчиках, які проходять через певну напружену точку.

На майданчик, нормаль до якого перпендикулярна одному з головних напрямків і рівнонахилена до двох інших головних напрямків, діє головне дотичне напруження. Так, на майданчик, нормаль до якого перпендикулярна першому головному напрямку і рівнонахилена до другого

і третього головних напрямів, діють головні дотичні напруження, рівні по модулю

$$\tau_1 = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|.$$

Аналогічно визначаються два інших головних дотичних напруження:

$$\tau_2 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \quad \tau_3 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|.$$

Якщо $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, то найбільше дотичне напруження діє на майданчик, рівнонахилене до майданчиків, на які діють головні напруження σ_1, σ_3

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

4.3. Шаровий тензор і девіатор напружень

Величину

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (4.6)$$

називають середнім нормальним напруженням, або гідростатичним тиском. Гідростатичний тиск – величина інваріантна до перетворення координат (вона пропорційна першому головному інваріанту тензора напружень).

Тензор з компонентами

$$\begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

називають кульовим тензором. Легко переконатися в тому, що компоненти цього тензора не змінюються при перетворенні координат. Дійсно, якщо в системі координат x, y, z цей тензор подається у вигляді (4.7), тоді в системі координат x', y', z' маємо

$$\sigma_{x'} = \sigma C_{xx}^2 + \sigma C_{yx}^2 + \sigma C_{zx}^2 = \sigma,$$

оскільки згідно з теоремою косинусів

$$C_{xx}^2 + C_{yx}^2 + C_{zx}^2 = 1$$

Далі

$$\sigma'_{xy} = \sigma C_{xx} C_{xy} + \sigma C_{yx} C_{yy} + \sigma C_{zx} C_{zy} = 0$$

оскільки $C_{xx} C_{xy} + C_{yx} C_{yy} + C_{zx} C_{zy} = 0$ силу перпендикулярності x' і y' .

Тензор з компонентами

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix},$$

що позначаються надалі

$$\begin{vmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{vmatrix},$$

називають девіатором напружень.

У головних осях тензора напружень згортаються в нуль дотичні напруження, а отже, змішані компоненти девіатора напружень. Через це головні напрями тензора і девіатора напружень збігаються. Якщо $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження, то головні компоненти девіатора напружень запишуться у вигляді

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma, \quad S_2 = \sigma_2 - \sigma, \quad S_3 = \sigma_3 - \sigma.$$

Перший головний інваріант девіатора напружень

$$I'_1 = S_x + S_y + S_z = \sigma_x - \sigma + \sigma_y - \sigma + \sigma_z - \sigma = 0. \quad (4.8)$$

Тут врахована рівність (4.6). Другий головний інваріант

$$I'_2 = -S_x - S_y - S_{yz} - S_z S_x + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2.$$

Використовуючи рівність (4.8), одержуємо

$$\begin{aligned} -S_x S_y - S_y S_z - S_z S_x &= -S_x(-S_x - S_z) - S_y(-S_x - S_y) - S_z(-S_y - S_z) = \\ &= S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x, \end{aligned}$$

звідки

$$-S_x S_y - S_y S_z - S_z S_x = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2).$$

Із закону парності дотичних напружень виходить

$$S_{xy}^2 = \frac{1}{2}(S_{xy}^2 + S_{yx}^2), \quad S_{yz}^2 = \frac{1}{2}(S_{yz}^2 + S_{zy}^2). \quad (4.9)$$

Таким чином

$$I'_2 = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + \dots + S_{zx}^2 + S_{zx}^2) \quad (4.10)$$

Далі

$$S_x = \sigma_x - \sigma = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z).$$

Аналогічно визначаємо S_y, S_z . Підставивши ці співвідношення в рівність (4.9), одержуємо наступні вирази другого інваріанта девіатора напружень

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{1}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x - \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

У теорії пластичності важливу роль відіграють характеристики напруженого стану, пропорційні квадратному кореню з другого інваріанта девіатора напружень. Це, перш за все, інтенсивність напружень

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sqrt{3I'_2} = \sqrt{\frac{3}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2 + S_{xy}^2)} = \\ &= [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

та інтенсивність дотичних напружень

$$K = \sqrt{I_2'} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{3}}. \quad (4.13)$$

Розглянемо два приклади.

При розтягу однорідного стержня постійного перерізу вздовж його осі x від нуля відмінне тільки нормальне напруження σ_x і через це гідростатичний тиск $\sigma = \frac{\sigma_x}{3}$, інтенсивність напружень $\sigma_u = \sigma_x$, інтенсивність дотичних напружень $K = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}$.

При крученні круглого стержня і відповідному виборі координат $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, а решта напружень рівні нулю. Тому в цьому разі гідростатичний тиск $\sigma = 0$, інтенсивність напружень $\sigma_u = \sqrt{3} \cdot \tau_u$, інтенсивність дотичних напружень $K = \tau_u$.

4.4. Диференціальні рівняння рівноваги

Розглянемо рівновагу нескінченно малого паралелепіпеда, три ребра якого dx, dy, dz суміщені відповідно з осями x, y, z прямокутної декартової системи координат (рис. 4.3). На невидимих гранях цього паралелепіпеда діють усереднені по них напруження $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$. Визначимо напруження на видимих гранях. Нагадаємо, що якщо деяка функція координат $f(x, y, z)$ має в точці А значення f_A , то в нескінченно близькій до А точці В значення цієї функції

$$f_B = f_A + \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz,$$

де dx, dy, dz – проекції відрізка А, В на координатні осі, а приватні похідні $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ визначені в точці А.

У цьому випадку напруження є функціями координат, і якщо на майданчик, що співпадає з координатною площиною $x=0$, діють напруження $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, то на паралельній та віддаленій від нього відстані dx діють напруження:

$$\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx; \quad \tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} dx; \quad \tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} dx.$$

Аналогічно, на видимій площадці, паралельній координатній площині $Y = 0$ і віддаленого від неї на відстані dy , діють напруження:

$$\sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy} dy, \quad \tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy, \quad \tau_{yz} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} dy.$$

Запишемо тепер умови рівноваги виділеного елемента. Проектуючи всі сили, що діють на нього, на вісь x , одержуємо

$$\begin{aligned} & -\sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dy dz + \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

або

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0. \quad (4.14)$$

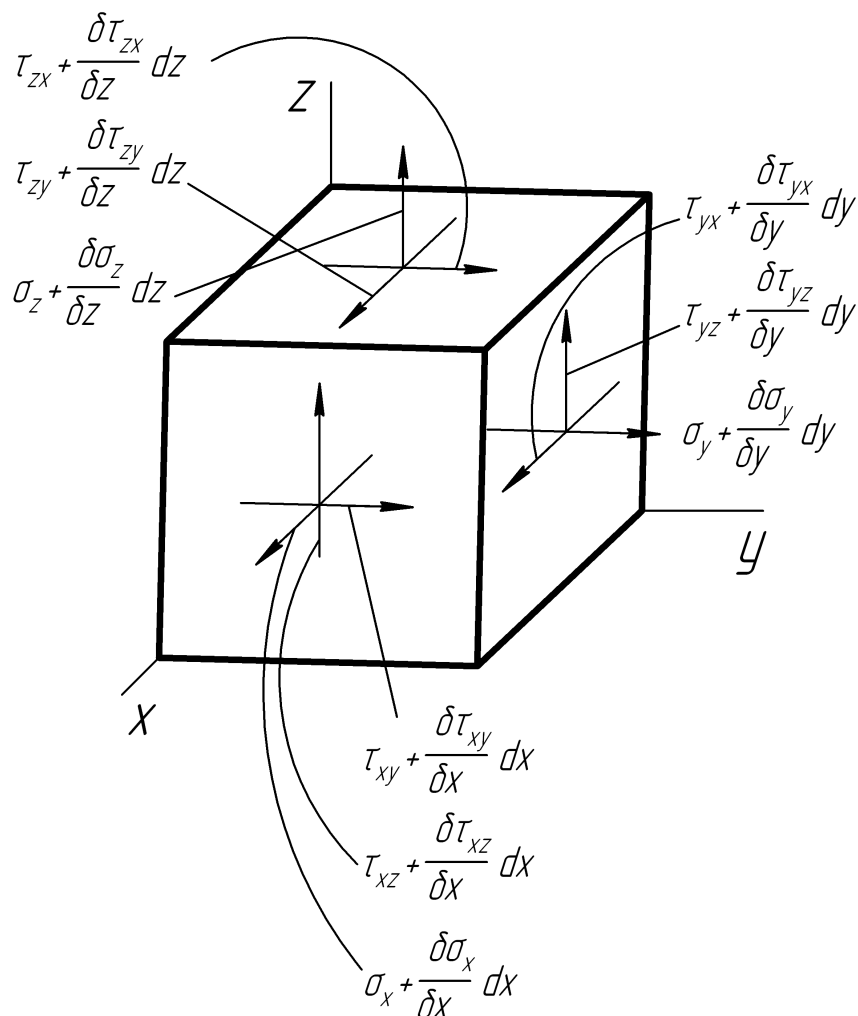


Рис. 4.3. До виведення диференціальних рівнянь рівноваги

На рис. 4.3 наведено вирази напружень на гранях паралелепіпеда. Аналогічно, проектуючи сили, що діють на елемент, на осі y, z , одержуємо ще два рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} &= 0, \\ \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ці рівняння називають диференціальними рівняннями рівноваги.

Прирівнявши до нуля суми моментів усіх сил навколо координатних осей, одержуємо закон парності дотичних напружень.

Таким чином, зміна напружень за об'ємом тіла не може бути довільною. Якщо тіло знаходиться у рівновазі, ця зміна не повинна суперечити рівнянням (4.15).

4.5. Плоский напружений стан

Напружений стан у точці називається плоским, якщо одне з головних напружень рівне нулю. При плоскому напруженому стані через напружену точку проходить майданчик, на який не діє напруження. Сумістимо вісь z з нормаллю до цього майданчика, тоді

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0.$$

Плоский напружений стан можна зобразити схемою, наведеною на рис. 4.4.

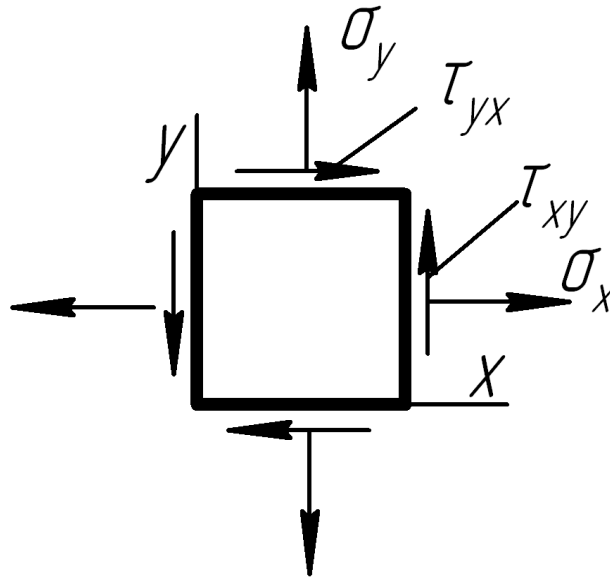


Рис. 4.4. Схема елемента, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану

Якщо $\sigma_3 = 0$, то два інших головних напруження визначають таким чином

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (4.16)$$

Кут α між нормаллю до головного майданчика, на який діє напруження σ_l і віссю x , знаходять з рівняння

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.17)$$

Якщо відомі напруження σ_x, τ_{xy} у системі осей x, y , то в системі x', y' , в якій кут між осями x' і x рівний β , напруження визначаються рівностями, які виходять із (4.2):

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \beta + \tau_{xy} \sin 2\beta + \sigma_y \sin^2 \beta, \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} \cos 2\beta + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\beta, \\ \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \beta - \tau_{xy} \sin 2\beta + \sigma_y \cos^2 \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

При плоскому напруженому стані гідростатичний тиск

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y),$$

інтенсивність напружень

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}. \quad (4.19)$$

Напружений стан тіла називається плоским, якщо в будь-якому його перерізі, перпендикулярному до деякого напрямку z , відсутні напруження. В кожній точці такого тіла напружений стан є плоским. Рівності ($\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$) справедливі по всьому об'єму тіла. Тому диференціальні рівняння рівноваги при плоскому напруженому стані тіла запишуться у вигляді

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0, \quad \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} = 0. \quad (4.20)$$

4.6. Розрахункове завдання з прикладом розрахунку: напружений стан у точці [13]

Розрахуємо напружений стан елемента, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану (рис. 4.5). Дано компоненти тензора напружень у декартовій системі координат: σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} ; τ_{zx} , τ_{yx} , τ_{zy} , а направляючі косинуси довільно орієнтованого майданчика – l_μ , m_μ , n_μ . Потрібно визначити напруження на вказаному майданчику: P_μ – номінальне; σ_μ – нормальне; τ_μ – дотичне; σ_0 – середнє, знайти інваріанти тензора напружень, головні напруження і положення головних майданчиків (обчислити направляючі косинуси нормалей до головних майданчиків), обчислити інтенсивність напружень σ_u і показники напруженого стану $\eta_1 = \frac{3\sigma_0}{\sigma_u}$, $\eta_2 = \frac{\sqrt[3]{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}}{\sigma_u}$, а також вид напруженого стану, параметр Надаї-Лоде

$$\eta_2' = \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Усі початкові дані наведено в табл. 4.1 і на рис. 4.5 (варіант 25). Знаки дотичних напружень визначені за табл. 4.1, а нормальні напруження – за рис. 4.5.

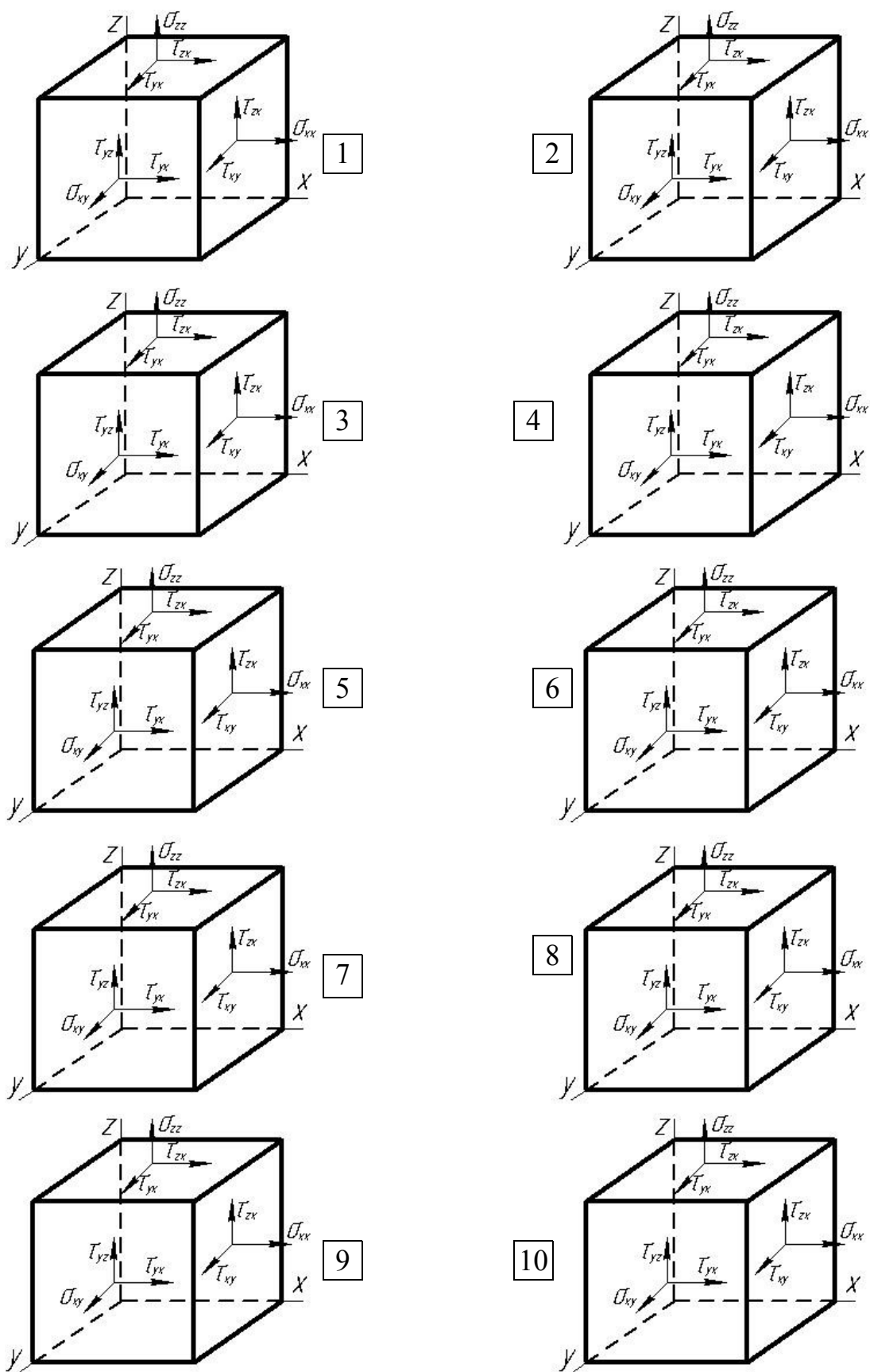


Рис. 4.5. Схема элемента, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану

Розв'язок.

1. Компоненти тензора напружень на майданчику μ згідно з (4.1):

$$p_x^\mu = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 500 \frac{1}{2} + 500 \frac{1}{2} + 800 \frac{1}{\sqrt{2}} = 1066 \text{ кгс/см}^2;$$

$$p_y^\mu = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 500 \frac{1}{2} + 0 \frac{1}{2} - 700 \frac{1}{\sqrt{2}} = -245 \text{ кгс/см}^2;$$

$$p_z^\mu = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = 800 \frac{1}{2} - 700 \frac{1}{2} - 300 \frac{1}{\sqrt{2}} = -162 \text{ кгс/см}^2.$$

Повне напруження на майданчику μ

$$p_\mu = \sqrt{(p_x^\mu)^2 + (p_y^\mu)^2 + (p_z^\mu)^2} = \sqrt{1066^2 + 245^2 + 162^2} = 1105 \text{ кгс/см}^2.$$

Нормальне напруження на майданчику

$$\begin{aligned} \sigma_\mu &= \sigma_x l_\mu^2 + \sigma_y m_\mu^2 + \sigma_z n_\mu^2 + 2\tau_{xy} l_\mu m_\mu + 2\tau_{yz} m_\mu n_\mu + 2\tau_{zx} n_\mu l_\mu = \\ &= 500 \frac{1}{2} + 0 \frac{1}{4} - 300 \frac{1}{4} + 2 \cdot 500 \frac{1}{4} - 2 \cdot 700 \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2 \cdot 800 \frac{1}{2\sqrt{2}} = 296 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Таблиця 4.1

Початкові дані для розрахунку напруженого стану

Номер варіанта	σ_x , кгс/см ²	σ_y , кгс/см ²	σ_z , кгс/см ²	τ_{zx} , кгс/см ²	τ_{yx} , кгс/см ²	τ_{zy} , кгс/см ²	l_μ	m_μ	n_μ
01	600	+200	500	200	-100	100	0,50	0,50	0,710
02	600	400	300	50	200	-100	0,32	0,25	0,914
03	100	700	300	200	100	50	0,15	0,22	0,973
04	500	400	+300	+500	400	50	0,54 8	0,632	0,548
05	100	800	400	30	-50	-100	0,12 5	0,350	0,936
06	400	700	100	100	100	100	0,32 0	0,250	0,914
07	400	600	400	50	60	170	0,38 0	0,150	0,913
08	400	400	200	200	100	50	0,00 0	0,200	0,980
09	400	300	600	+50	-50	-100	0,05 0	0,330	0,943
10	400	200	400	+100	-50	-200	0,25 0	0,150	0,956
11	300	800	200	+50	-70	-100	0,12 0	0,135	0,983
12	300	700	300	100	50	100	0,50 0	0,500	0,870
13	300	200	500	80	100	50	0,39 0	0,500	0,780
14	200	500	200	100	150	100	0,20 0	0,500	0,887
15	200	300	400	80	90	60	0,40 0	0,500	0,768
16	100	+300	300	+80	-100	50	0,30 0	0,400	0,866
17	200	300	600	35	40	100	0,35 0	0,250	0,900

18	300	500	400	200	150	-200	0,40 0	0,500	0,768
19	400	+500	300	+50	100	75	0,15 0	0,220	0,964
20	500	500	600	100	200	-100	0,22 0	0,120	0,968
21	600	400	-500	50	80	100	0,40 0	0,400	0,825
22	700	300	-400	100	-50	-200	0,60 0	0,510	0,624
23	800	200	200	75	20	-50	0,13 0	0,33	0,934
24	200	600	+400	+75	-50	100	0,10 0	0,600	0,794
25	500	0	300	800	500	-700	0,5	0,5	0,71

Дотичні напруження на майданчику μ

$$\tau_{\mu} = \sqrt{p_{\mu}^2 - \sigma_{\mu}^2} = \sqrt{1105^2 - 296^2} = 1065 \text{ кгс/см}^2.$$

2. Середнє напруження

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{500 + 0 - 300}{3} = 66,7 \text{ кгс/см}^2.$$

Октаедричне дотичне напруження

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(500 - 0)^2 + (0 - 300)^2 + (-300 - 500)^2 + 6(500^2 + 700^2 + 800^2)} = \\ &= 1014 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

3. Тензор напружень

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 500 & 500 & 800 \\ 500 & 0 & -700 \\ -800 & -700 & -300 \end{Bmatrix}.$$

Розкладемо тензор напружень на шаровий і тензор діватора напружень

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} 66,7 & 0 & 0 \\ 0 & 66,7 & 0 \\ 0 & 0 & 66,7 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 433,3 & 500 & 800 \\ 500 & -66,7 & -700 \\ -800 & -700 & -367 \end{Bmatrix}.$$

Шаровий тензор. Тензор діватора.

4. Інваріанти тензора напружень:

$$I_1(T_{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 500 + 0 - 300 = 200 \text{ кгс/см}^2 = 0,2 \text{ Тс/см}^2.$$

$$I_2(T_{\sigma}) = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 =$$

$$= -0,5 \cdot 0 - (-0,3) \cdot 0 - (-0,3) \cdot 0,5 + 0,5^2 + 0,7^2 + 0,8^2 = 1,53 \text{ Тс}^2/\text{см}^4.$$

$$I_3(T_{\sigma}) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{xy}^2 - \sigma_y \tau_{yz}^2 - \sigma_z \tau_{zx}^2 =$$

$$0,5 \cdot 0 \cdot (-0,3) + 2 \cdot 0,5 \cdot (-0,7) \cdot 0,8 - 0,5(0,7)^2 - 0 \cdot 0,8^2 =$$

$$= (-300) \cdot 0,5^2 = 0,73 \text{ Тс}^3/\text{см}^6.$$

5. Головні напруження згідно з кубічним рівнянням:

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0.$$

Кубічне рівняння приводимо до вигляду

$$\sigma^3 + a\sigma^2 + b\sigma + c = 0,$$

$$\text{де } \sigma = y - \frac{a}{3}; \quad a = I_1(T_\sigma); \quad b = -I_2(T_\sigma); \quad c = -I_3(T_\sigma).$$

Запишемо кубічне рівняння у вигляді $y^3 + Py + q = 0$, де введено нові коефіцієнти

$$P = -\frac{a^2}{2} + b = -\frac{I_1^2(T_\sigma)}{3} - I_2(T_\sigma) = -\frac{0,2^2}{3} - 1,53 = -1,54 \quad Tc^2 / cm^4,$$

$$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{ab}{3} + c = 2\left(-\frac{I_1(T_\sigma)}{3}\right)^2 - \frac{I_1(T_\sigma)(-I_2(T_\sigma))}{3} - I_3(T_\sigma) =$$

$$= -2\left(\frac{-0,2}{3}\right)^2 - \frac{0,2 \cdot 1,53}{3} + 0,73 = 0,627 \quad Tc^3 / cm^6.$$

Рівняння має три дійсні корені лише у разі $Q < 0$

$$Q = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1,54}{3}\right)^3 + \left(\frac{0,627}{2}\right)^2 = -0,038 < 0.$$

Ці корені набувають значення $Y_{1,2,3} = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\gamma + 2\pi k}{3}$, де

$$k = 0, 1, 2, \quad r = \sqrt{\frac{P^3}{27}} = \sqrt{0,136} = 0,369,$$

$$\cos \gamma = -\frac{q}{2r} = -\frac{0,627}{2 \cdot 0,369} = -0,85,$$

$$\gamma = 148,2^\circ, \quad 2\sqrt[3]{r} = 2\sqrt[3]{0,369} = 1,43.$$

Знаходимо значення коренів:

$$k = 0, \quad y_1 = 1,43 \cos \frac{148,2}{3} = 1,43 \cdot 0,65 = 0,93;$$

$$k = 1, \quad y_2 = 1,43 \cos \frac{148,2 + 2 \cdot 180}{3} = 1,43 \cdot (-0,984) = -1,41;$$

$$k = 2, \quad y_3 = 1,43 \cos \frac{148,2 + 2 \cdot 2 \cdot 180}{3} = 1,43 \cdot 0,332 = 0,475.$$

Остаточні головні напруження:

$$\sigma_1 = y_1 - \frac{a}{3} = 0,92 + 0,067 = 996 \quad кгс / см^2;$$

$$\sigma_2 = y_2 - \frac{a}{3} = 0,475 + 0,067 = 541 \quad кгс / см^2;$$

$$\sigma_3 = y_3 - \frac{a}{3} = -1,407 + 0,067 = -1340 \quad кгс / см^2.$$

Для контролю правильності розв'язку кубічного рівняння використаємо інваріантність коефіцієнтів $I_1(T_\sigma)$, $I_2(T_\sigma)$, $I_3(T_\sigma)$:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 996 + 541 - 1340 = 0,197 \quad Tc/cm^2;$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 =$$

$$= -0,996 \cdot 0,541 - 0,541(-1,34) - (1,34) \cdot 0,996 = 1,52 \quad Tc^2 / cm^4;$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0,541 \cdot 0,996(-1,341) = -0,722 \quad Tc^3/cm^6.$$

Розходження між $I_1(T_\sigma)$, $I_2(T_\sigma)$, $I_3(T_\sigma)$, розрахованими по головних

напруженнях і по напруженнях у декартовій системі координат x, y, z , відповідно складають:

$$\varepsilon_1 = \frac{200 - 197}{200} \cdot 100\% = 1,5\%;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{153 - 152}{153} \cdot 100\% = 0,65\%;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{0,73 - 0,72}{0,73} \cdot 100\% = 1,1\%.$$

6. Для визначення положення головних майданчиків, тобто для вирахування направляючих косинусів нормалей до головних майданчиків l, m, n , відповідну систему однорідних рівнянь зручно подати у вигляді:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \frac{l}{n} - \tau_{xy} \frac{m}{n} &= -\tau_{xz}; \\ \tau_{xy} \frac{l}{n} + (\sigma_y - \sigma) \frac{m}{n} &= -\tau_{yz}; \\ \tau_{zx} \frac{l}{n} + \tau_{zy} \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

а відношення між квадратами направляючих косинусів – у вигляді

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2}. \quad (4.22)$$

Оскільки з трьох рівнянь системи лише два рівняння незалежні, то визначивши $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ з розв'язку двох рівнянь, третє рівняння використовуємо для контролю знайдених відношень $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$. Після чого із співвідношення (4.22) знаходимо n , а потім l і m .

У наведеному прикладі:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0,5 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0,3 \text{ тс/см}^2; \quad \tau_{zx} = 0,8 \text{ тс/см}^2; \quad \tau_{yz} = 0,5 \text{ тс/см}^2; \\ \tau_{xy} &= 0,7 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_1 = 0,996 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_2 = 0,541 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_3 = -1,34 \text{ тс/см}^2. \end{aligned}$$

Для розв'язання (4.21) застосуємо детермінантний спосіб розв'язання системи алгебраїчних рівнянь у вигляді:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 = 0; \quad a_2 x_2 + a_2 y_2 = c_2, \quad (4.23)$$

$$\text{де } x_1 = \frac{l_1}{m_1}, \quad y_1 = \frac{m_1}{n_1}.$$

У цьому разі:

$$a_1 = 0,5 - 0,996 = -0,496; \quad a_2 = 0,5; \quad a_2 = 0,5; \quad a_2 = 0,996;$$

$$D_0 = c_1 a_2 - a_2 c_1 = 4,961(-9,96) - 51 - 5 = -24,4;$$

$$D_1 = c_1 a_2 - a_1 c_2 = 8(-9,96) - (-5) \cdot 7 = -44,68;$$

$$D_2 = a_1 c_2 - c_1 a_2 = 4,96 \cdot 7 - 8 \cdot 5 = -5,28.$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{44,68}{24,4} = 1,83;$$

Тоді:

$$y_1 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{5,28}{24,4} = 0,216.$$

Із рівняння (4.21) знаходимо n :

$$1 + 1,83^2 + 0,216^2 = \frac{1}{n^2}; \quad n_1 = \pm 0,477; \quad \arccos n_1 = 61,51^\circ;$$

$$l_1 = 0,873; \quad \arccos l_1 = 29,2^\circ; \quad l_1 m_1 = 0,103; \quad \arccos m_1 = 84,1^\circ.$$

Розраховуємо інтенсивність напружень

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 2151 \text{ кгс/см}^2.$$

Показники напруженого стану:

$$\eta_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{996 + 541 - 1340}{2151} = 0,0916;$$

$$\eta_2'' = \frac{\sqrt[3]{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}}{\sigma_u} = \frac{\sqrt[3]{996 \cdot 541 \cdot (-1340)}}{2151} = -0,42;$$

$$\eta_2' = \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2 \cdot 541 - 996 + 1340}{996 + 1340} = 0,8.$$

Контрольні запитання.

1. Що називають тензором напружень?
2. Які є компоненти тензора напружень другого рангу?
3. Що виражає закон парності дотичних напружень?
4. Що називають інваріантами тензора напружень?
5. Як визначаються головні напруження?
6. Що називають гідростатичним тиском?
7. Що називають девіатором напружень?
8. Як визначаються перший, другий та третій інваріанти девіатора напружень?
9. Як записується формула для визначення інтенсивності напружень?
10. Як записується формула для визначення інтенсивності дотичних напружень?
11. Який вигляд мають диференціальні рівняння рівноваги?
12. Що називають плоским напруженим станом?
13. Який порядок розрахунку напруженого стану елемента, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану?

5. РОЗРАХУНКИ ЗА МЕЖАМИ ПРУЖНОСТІ

5.1. Розрахунки за межами пружності в умовах розтягу-стиску статично-невизначених систем [9]

Нехай статично-невизначена система (рис. 5.1) розтягується від зовнішньої сили P .

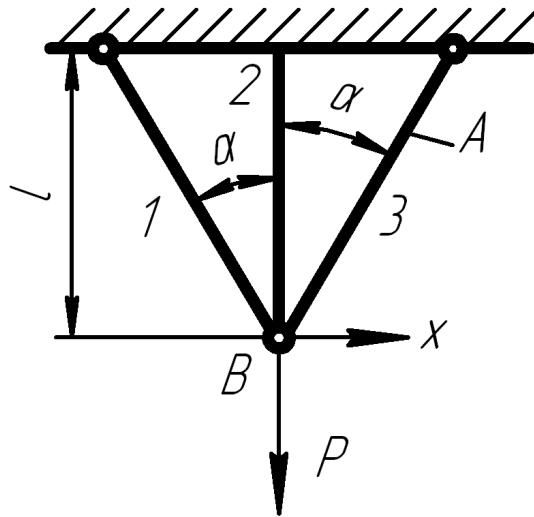


Рис. 5.1. Статично - невизначена система

При розв'язанні системи для знаходження внутрішніх сил N_1, N_2, N_3 застосовуємо рівняння статки $\sum F(x) = 0$ (рис. 5.2),

$$N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, \quad (5.1)$$

звідки $N_1 = N_3$,

$$\sum F(y) = 0, \quad (5.2)$$

$$N_2 + 2N_1 \cos \alpha = P. \quad (5.3)$$

Кінематика (рис. 5.3)

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \cos \alpha. \quad (5.4)$$

Фізика (закон Гука)

$$\frac{N_1 l_1 \cdot EA}{EA \cdot N_2 l_2} = \cos \alpha, \quad (5.5)$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \cos \alpha. \quad (5.6)$$

Одержимо

$$N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad (5.7)$$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (5.8)$$

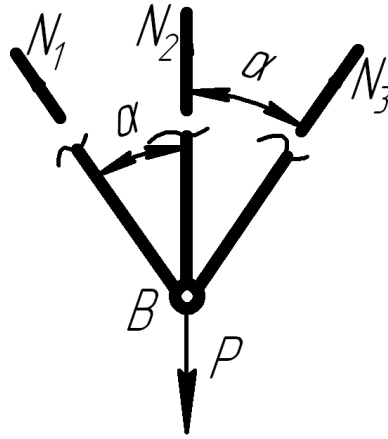


Рис. 5.2.

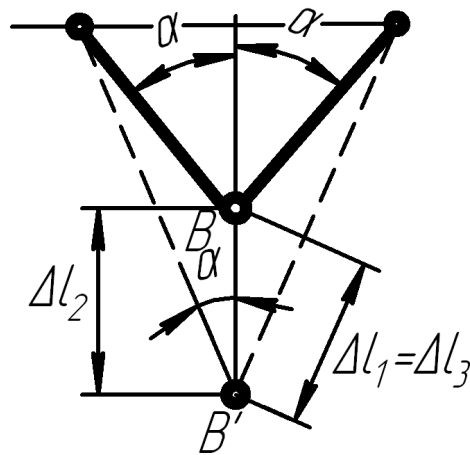


Рис. 5.3.

Граничну силу P знаходимо з умови $N_2 > N_1 = N_3$, одержимо

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A} \leq \sigma_T, \quad (5.9)$$

тоді $P_{cp} \leq \sigma_T A (1 + 2 \cos^3 \alpha)$.

Нехай $\alpha = 30^\circ$, довжина стержня $l = 1$ м, границя текучості $\sigma_T = 200$ МПа, площа стержнів $A = 2$ см², тоді гранична сила

$$P_{cp}^{[\sigma]} \leq 2000 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} (1 + 2 \cos^3 30^\circ) = 14445 \text{ кГ} = 144450 \text{ Н}.$$

Нехай стержні виготовлені з ідеально пластичного матеріалу, який не зміцнюється $\sigma_T = \text{const}$. Тоді буде ситуація, коли при зростанні сили P у стержнях 1, 2, 3 виникає відома внутрішня сила $\sigma_T A$ (див. рис. 5.4). Система стає статично визначеною. Тоді

$$P_{cp} \leq 2\sigma_T A \cos \alpha + \sigma_T A = \sigma_T A (1 + 2 \cos \alpha). \quad (5.10)$$

Підставивши вихідні дані, одержимо

$$P_{cp}^{[P]} \leq 2000 \frac{\pi \cdot 2^2}{4} (1 + 2 \cos 30^\circ) = 17166 \text{ кГ} = 171660 \text{ Н}.$$

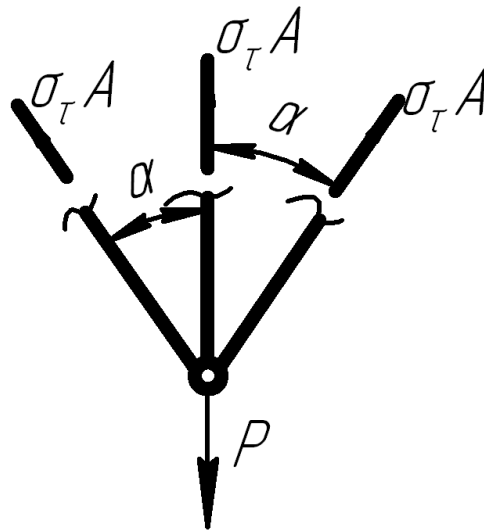


Рис. 5.4.

Таким чином, розрахунок по допустимих навантаженнях відрізняється від розрахунку по допустимих напруженнях

$$\frac{P_{zp}^{[\sigma]}}{P_{zp}^{[P]}} = \frac{17166}{14445} = 1,19.$$

Економія металу при цьому складає 19%.

Якщо стержні виготовили із матеріалу, який зміцнюється за законом кривої течії, при цьому апроксимація кривої течії має вигляд $\sigma_i = A^* \varepsilon_i^n$. Коефіцієнти апроксимації кривої течії $A^* = 200$ МПа, $n = 0,22$. Тоді в формулу (5.10) необхідно підставити не $\sigma_T = const = 2000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, а величину напруження текучості, яке залежить від величини напруження деформації $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. Таким чином, граничне навантаження буде залежати від величини інтенсивності деформації. [8].

Нехай у нашому випадку стержень 2 видовжується на величину $\Delta l = 5$ мм, тоді інтенсивність деформацій у стержні 2 дорівнює

$$\varepsilon_i = \ln \frac{l_i}{l_0} = \ln \frac{100,5}{100} = 0,00499, \quad (5.11)$$

а інтенсивність напружень

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^n = 8000 \cdot 0,00499^{0,22} = 2492 \text{ кг/см}^2 = 249 \text{ МПа}.$$

Підставивши значення напруження текучості у формулу (5.10), одержимо величину граничної сили для матеріалу, який зміцнюється

$$P_{zp}^{[P]} = \sigma_i(\varepsilon_i) \cdot (1 + 2 \cos \theta) \cdot A = 249 \cdot (1 + 2 \cos 30^\circ) \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 2138 \text{ кг}.$$

Отже, маємо економію металу 48%

$$\frac{P'_{zp}^{[p]}}{P'_{zp}^{[\sigma]}} = \frac{21389}{14445} = 1,4 \xi.$$

A^* – коефіцієнт апроксимації (не площа).

5.2. Граничний стан при крученні вала за межами пружності

При крученні вала дотичні напруження в його поперечних перерізах розподілені за лінійним законом [рис. 5.5], максимального значення ці напруження досягають у точках контуру

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}.$$

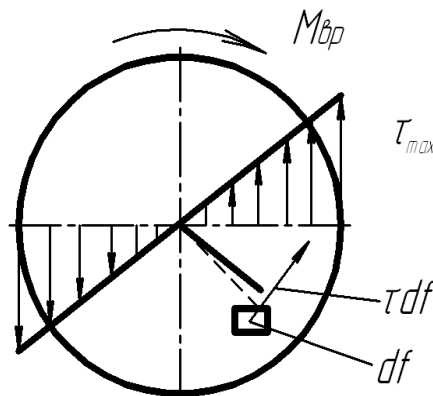


Рис. 5.5.

Отже, матеріал у середині вала недовантажений.

При зростанні крутного моменту до $M_{\text{кр}}^T$ напруження в точках контуру перерізу досягнуть межі текучості, а в середині вал знаходитиметься у пружному стані.

При подальшому зростанні крутного моменту напруження у внутрішніх точках бруса також досягнуть межі текучості.

На рис. 5.6, б зображено епюру дотичного напруження для випадку, коли частина поперечного перерізу охоплена пластичною областю (матеріал «тече», пластична хвиля охоплює верхню частину перерізу). При цьому внутрішня область знаходиться у пружному стані.

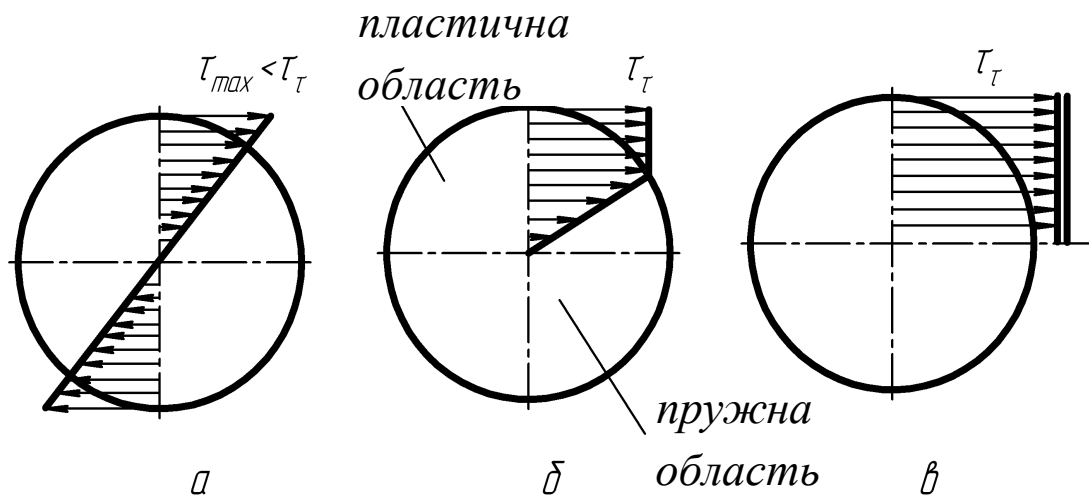


Рис. 5.6.

При подальшому збільшенні крутного моменту досягається такий стан, коли пружна зона зникне і по всьому перерізі напруження стануть рівні межі текучості (рис. 5.6, в). Це буде повне вичерпання несучої здатності вала. Обчислимо граничний крутний момент по допущеному напруженню і навантаженню.

По допустимому напруженню

$$M_{zp}^{[\sigma]} = \tau_{max} \cdot W_p = \tau_{max} \cdot \frac{\pi d^3}{16}. \quad (5.12)$$

По допустимому навантаженню

$$M_{zp}^{[p]} = \int_F \tau_T \rho dF = \tau_T \int_0^{d/2} \rho 2\pi \rho d\rho = \tau_T \frac{\pi d^3}{12} = \tau_T W_p^*, \quad (5.13)$$

де W_p^* – пластичний полярний момент опору поперечного перерізу.

Для кільцевого поперечного перерізу

$$W_p^* = \frac{\pi D^3}{12} (1 - \alpha^4) \text{ де } \alpha = \frac{d}{D}. \quad (5.14)$$

При розрахунку по допустимому напруженню небезпечний стан виникає, коли дотичні напруження досягають на поверхні значення τ_T , тоді

$$M_{zp}^{[\sigma]} = \tau_{max} \cdot W_p. \quad (5.15)$$

Граничний крутний момент відповідний виникненню текучості в усіх точках поперечного перерізу буде рівним

$$M_{zp}^{[p]} = \tau_T W_p. \quad (5.16)$$

Таким чином,

$$\frac{M_{zp}^{[p]}}{M_{zp}^{[\sigma]}} = \frac{W_p^*}{W_p} = \frac{\frac{\pi D^3}{12} (1 - \alpha^4)}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)}. \quad (5.17)$$

Це відношення прагне до одиниці у міру зменшення товщини стінки. Максимальним воно стає для суцільного перерізу

$$\frac{M_{zp}^{[p]}}{M_{zp}^{\sigma}} = \frac{\frac{\pi D^3}{12}}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{4}{3}, \quad (5.18)$$

тобто розрахунок по допустимих навантаженнях сприяє або економії металу на 33 %, або збільшенню граничного крутного моменту. Усі висновки виконано для ідеально-пластичного матеріалу.

5.3. Граничний стан балок при згині за межами пружності

При розрахунку на згин балки з пластичного матеріалу по допустимому напруженню, небезпечним вважається стан конструкції, за якого в крайніх точках небезпечного перерізу нормальні напруження досягають межі текучості (для симетричного поперечного перерізу (рис. 5.7, а). Епюру нормального напруження показано на рис. 5.7, б. При збільшенні навантаження, що діє на балку, а отже, і згинаючого моменту, який виникає в небезпечному поперечному перерізі, текучість охоплюватиме все більшу частину перерізу; для деякої стадії навантаження, епюра нормального напруження матиме вигляд зображений на рис. 5.7, в. В усіх точках зони перерізу напруження рівні напруженню текучості σ_T (якщо відсутнє зміцнення). Для частини перерізу, що працює пружно, напруження лінійно залежить від координати y .

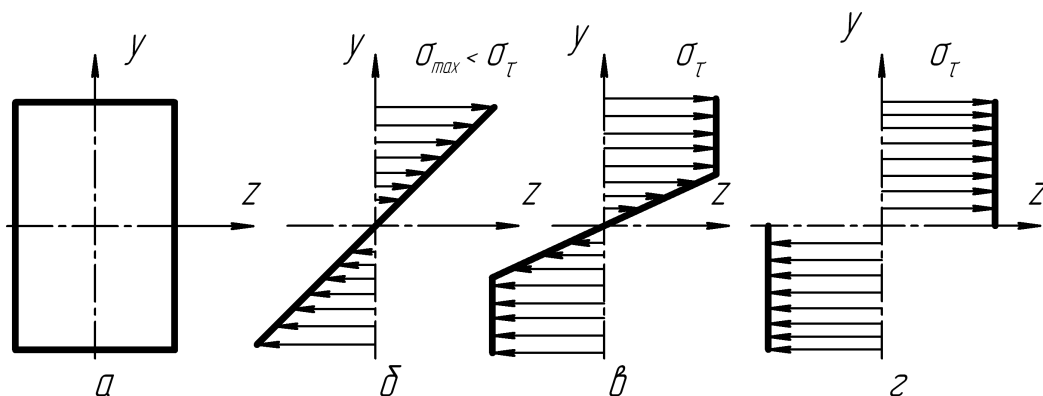


Рис. 5.7.

Несуча здатність балки буде вичерпана, коли в усіх точках небезпечного перерізу нормальні напруження досягають межі текучості (рис. 5.7, д). Відповідний згинаючий момент буде граничним M_{zp} .

Виникнення повної текучості в деякому поперечному перерізі балки можна порівняти з утворенням у цьому перерізі «пластичного» шарніра, який дозволяє при постійному граничному навантаженні частинам балки, розділеним цим шарніром, вільно обертатися один з одним.

Граничний згинаючий момент визначають за формулою

$$M_{zp} = \sigma_T \cdot W_z^*, \quad (5.23)$$

де W_z^* – пластичний момент опору поперечного перерізу балки.

При симетричному поперечному перерізі балки

$$W_z^* = 2S_{\max}, \quad (5.24)$$

де S_{\max} – статичний момент половини перерізу щодо нейтральної осі. Наприклад, для прямокутного перерізу шириною b і висотою h

$$W_z^* = 2\left(\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4}. \quad (5.25)$$

При несиметричному поперечному перерізі (рис. 5.8) нейтральна вісь за наявності напруження текучості по всьому перерізу ділить його на дві рівновеликі частини (положення нейтральної осі у пружній і пластичній стадіях не збігається). Пластичний момент опору визначають за формулою

$$W_z^* = S_1 + S_2, \quad (5.26)$$

де $S_1 + S_2$ – статичні моменти напівперерізів щодо нейтральної осі.

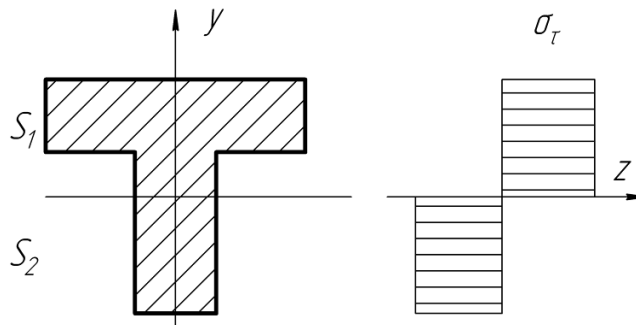


Рис. 5.8.

Граничний згинаючий момент при розрахунку по допустимих напруженнях

$$M_{zp}^{[\sigma]} = \sigma_T W_z. \quad (5.27)$$

Відношення цих моментів за двома методиками розрахунку

$$\alpha = \frac{M_{zp}^{[p]}}{M_{zp}^{[\sigma]}} = \frac{W_z^*}{W_z}. \quad (5.28)$$

Значення цього відношення, очевидно, визначається лише формою поперечного перерізу. Так, для прямокутного перерізу $\alpha = 1,5$; для прокатних двотаврів при вигині у площині найбільшої жорсткості в середньому $\alpha = 1,15$.

5.4. Приклади розрахунків за межами пружності.

Контрольна робота

Приклад.

Визначити за способом граничних навантажень необхідний діаметр вала (рис. 5.9), якщо для матеріалу вала $\tau_T = 1600$ кг/см² необхідний коефіцієнт запасу $[n] = 2$.

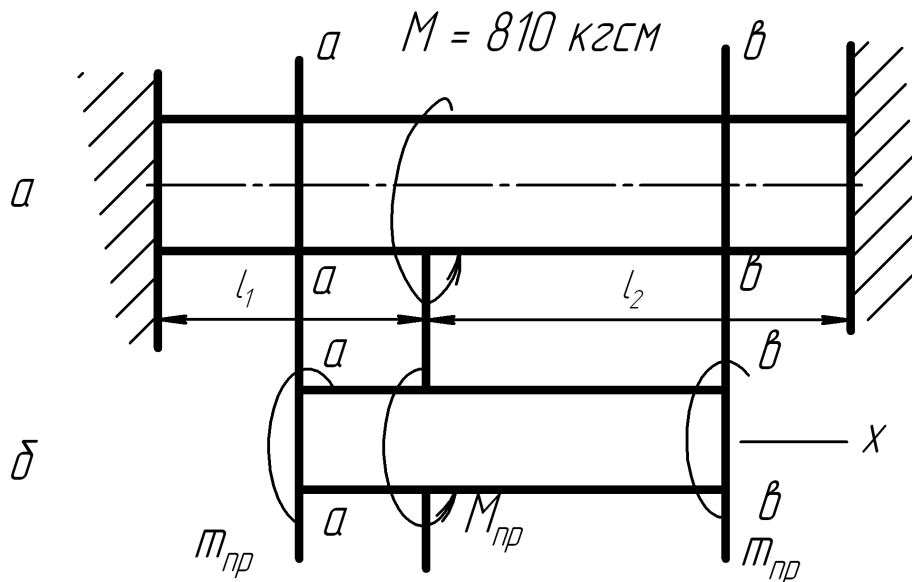


Рис. 5.9.

Розв'язок.

У граничному стані у всіх поперечних перерізах обох ділянок вала крутні моменти досягають граничного значення $m_{\text{пр}}$. Двома перерізами $a-a$ і $b-b$ виділимо частину вала (див. рис. 5.9) У стані граничної рівноваги на відсічену частину діє зовнішній момент $M_{\text{пр}}$ і моменти $m_{\text{пр}}$, замінюючи дію відкинutoї частини вала.

Умова рівноваги виділеної частини вала

$$M_{\text{пр}} = 2m_{\text{пр}} = 2 \frac{\pi d^3}{12} \tau_{\text{T}} = \frac{\pi d^3}{6} \tau_{\text{T}}. \quad (5.19)$$

Момент, що допускається

$$[M] = \frac{M_{\text{пр}}}{[n]} = \frac{\pi d^3 \tau_{\text{T}}}{6 \cdot 2} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_{\text{T}}. \quad (5.20)$$

Звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{12[M]}{\pi \tau_{\text{T}}}}. \quad (5.21)$$

За умовою міцності момент M , прикладений до вала, рівний моменту, що допускається, тобто $[M] = M = 8 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{см}$, отже

$$d = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 8 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 1600}} = 12,4 \text{ см}. \quad (5.22)$$

При рішенні цієї задачі за способом граничних навантажень відношення довжин учасників $e_1:e_2$ не має значення. Застосовуючи спосіб напруження, що допускається, це відношення має істотне значення: значення моменту, що допускається, буде найбільшим при $e_1 - e_2$.

Приклад.

Визначити інтенсивність рівномірно розподіленого допустимого навантаження для балки наведеної на рис. 5.10. Межа текучості матеріалу

балки $\sigma_T = 2300 \text{ кг/см}^2$, необхідний коефіцієнт запасу $[n] = 1,6$.

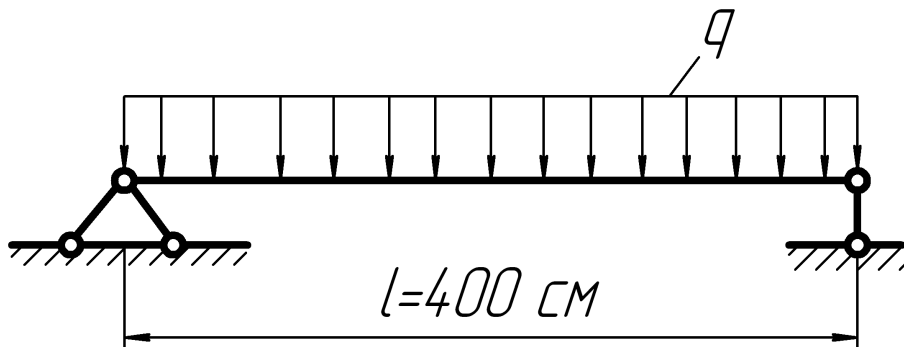


Рис. 5.10.

Розв'язок.

Визначимо положення нейтральної осі поперечного перерізу за умови, що вона ділить поперечний переріз на дві рівновеликі частини (у граничному стані). Площа стінки більша площі полиці, і отже, нейтральна вісь перетинає стінку. Відстань нейтральної осі від внутрішньої грані полиці y_0 , $F_1 = F_2$ (рис. 5.11).

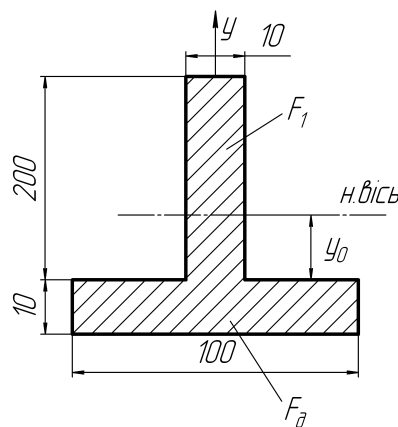


Рис. 5.11.

$$10 \cdot 1 + 1y_0 = 1(20 + y_0),$$

звідки $y_0 = 5 \text{ см}$.

Статичні моменти напівперерізів щодо нейтральної осі:

$$S_1 = 1 \cdot 15 \frac{15}{2} = 112,5 \text{ см}^3;$$

$$S_2 = 10 \cdot 1 \cdot 5,5 + 1 \cdot 5 \cdot 2,5 = 67,5 = 112,5 \text{ см}^3.$$

Пластичний момент опору поперечного перерізу

$$W_z^* = S_1 + S_2 = 112,5 + 67,5 = 180 \text{ см}^3.$$

Граничний згинаючий момент

$$M_{cp} = \sigma_T W_z^* = 2300 \cdot 180 = 414 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Допущений згинаючий момент

$$[M] = \frac{M_{sp}}{[n]} = \frac{414 \cdot 10^3}{1,6} = 258,8 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Найбільший згинаючий момент виникає у перерізі посередині прольоту

$$M_{\max} = \frac{qe^2}{8}.$$

Прирівнюючи максимальний згинаючий момент до допустимого моменту, одержуємо

$$\frac{[q]e^2}{8} = [M],$$

звідки

$$[q] = \frac{8[M]}{e^2} = \frac{8 \cdot 258,8 \cdot 10^3}{400^2} = 12,94 \text{ кг} / \text{см}^2.$$

Контрольні запитання

1. Який принцип розрахунку статично-невизначеної системи?
2. Який вигляд має епюра дотичних напружень при крученні валу?
3. Як розраховується граничний крутний момент по допустимому напруженню?
4. Як розраховується граничний крутний момент по допустимих навантаженнях?
5. Чому дорівнює граничний крутний момент?
6. Який вигляд мають епюри нормального напруження при вигині балки для різних величин навантажень?
7. Як визначається граничний згинаючий момент?
8. Як визначається пластичний момент опору?
9. Який порядок визначення необхідного діаметра вала за способом граничних навантажень?
10. Який порядок визначення інтенсивності рівномірно розподіленню навантаження?

6. РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНА РОБОТА

6.1. Розрахунок вала на витривалість при згині та крученні [12]

Вихідні дані. Ступінчатий вал обертається на двох шарикопідшипниках (рис 6.1), на вал діє сила P та циклічні скручуючі моменти T з коефіцієнтом асиметрії

$$r = \frac{M_{min}}{M_{max}}; M_{max} = P \cdot a$$

Якість поверхні характеризується величиною шорсткості.

Потрібно:

1. Показати розрахункову схему вала.
2. Побудувати епюри згинальних моментів та визначити небезпечні перерізи.
3. Розрахувати згинаючі моменти в небезпечних перерізах.
4. З умови міцності при згині і крученні визначити $[P]$ (допустиму величину сили P).
5. Розрахувати коефіцієнт запасу вала.

Дані взяті з табл. 6.1.

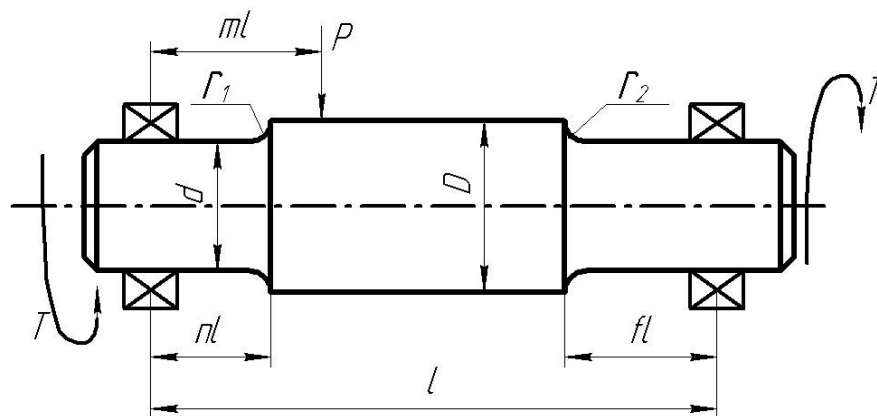


Рис. 6.1.

Табл. 6.1

Вихідні дані для виконання РГЗ

№ рядка	Матеріал	<i>l</i>	<i>a</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>D</i>	<i>r</i> ₁	<i>r</i> ₂	<i>[n</i> _σ <i>]</i>	<i>r</i>	Шорсткість <i>R</i> _α , мм
		см					мм				<i>[n</i> _τ <i>]</i>		
0	Сталь 35	85	2 5	0,4 4	0,3 2	0,3 9	4 2	9 8	2	9	2,2	-0,7	1,25
1	Сталь 30	80	2 0	0,4 2	0,3 4	0,4 0	4 1	8 0	1	1 0	2,1	-0,8	2,3
2	Сталь 10	95	3 5	0,4 8	0,3 4	0,3 9	4 3	7 4	4	7	2,4	-0,6	0,32
3	Сталь 45	90	3 0	0,4 6	0,3 3	0,3 8	3 8	7 6	3	8	2,3	-0,4	0,16
4	Сталь 50	10 5	4 5	0,5 2	0,3 0	0,3 6	4 6	7 0	6	4	2,7	-0,3	2,5
5	30ХМ	10 0	4 0	0,5 0	0,3 5	0,3 4	4 5	7 2	3	3	2,8	0,4	1,26
6	40Х	11 5	5 5	0,5 6	0,3 8	0,3 7	4 8	6 6	9	3	2,9	0,5	0,32

7	12XH3A	11 0	5 0	0,5 4	0,3 7	0,3 3	4 7	6 8	1 0	3	2,6	0,4	0,63
8	30XГСА	12 5	6 5	0,4 8	0,4 0	0,3 1	5 0	6 2	1 0	1	3,0	0,7	0,16
9	40XHMA	12 0	6 0	0,5 8	0,3 9	0,3 2	4 9	6 4	9	2	2,9	0,6	0,32

6.2. Приклад виконання розрахунково-графічного завдання

Вихідні дані: матеріал – сталь 40ХН;

$l = 120 \text{ см}; a = 50 \text{ см}; m = 0,52; n = 0,35; f = 0,30; d = 45 \text{ мм}; D = 70 \text{ мм}; r_1 = 9 \text{ мм};$
 $r_2 = 5 \text{ мм}; [n_\sigma] = 2,5; r = -0,4;$ Шорсткість $R_a = 0,32$.

Розв'язок.

Показники статичної і циклічної міцності сталі 40ХН (див. додатки В, Г)
 $\sigma_{\text{міц}} = 1000 \text{ МПа}; \sigma_{0,2} = 800 \text{ МПа}; \tau_{0,2} = 390 \text{ МПа}; \sigma_{-1} = 400 \text{ МПа}; \tau_{-1} = 240 \text{ МПа};$
 $\psi_n = 0,15; \psi_\tau = 0,075$.

1. Знаходимо максимальну і мінімальну величини крутних моментів:

$$M_{\text{max}} = P \cdot a = P \cdot 50 \text{ см}; M_{\text{min}} = r \cdot M_{\text{max}} = (-0,4) \cdot 50 = -20P \text{ см}.$$

2. Креслимо розрахункову схему вала згідно з вихідними даними (рис. 6.1).

3. Будуємо епюри згинаючих моментів і визначаємо небезпечні перерізи вала.

4. Визначаємо опорні реакції (рис. 6.1).

$$V_B = \frac{0,52 \cdot 120 \cdot P}{120} = 0,52P;$$

$$\sum M_B = 0 \quad V_A = 120 - P \cdot (57,6) = 0$$

$$V_A = \frac{P \cdot 57,6}{120} = 0,48P.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0, \quad V_A - P + V_B = 0; \quad 0,48P + 0,52P - P = 0$$

5. Визначаємо згинаючі моменти у характерних перерізах:

$$M_A = 0; \quad M_C = V_A \cdot 62,4 = 0,48 \cdot P \cdot 62,4 = 30P \text{ см}.$$

Будуємо епюру M (рис. 6.1). Крутні моменти по довжині вала однакові. Тому небезпечні перерізи визначаємо, орієнтуючись на розрахункову схему вала і епюру згинаючих моментів (рис. 6.2). Такими є перерізи C і E , тому що за наявності концентраторів напружень у вигляді ступінчастої зміни діаметрів тут діють згинальні моменти, близькі до максимального.

6. Обчислення згинаючих моментів у небезпечних перерізах.

Переріз C :

$$M_C = V_A \cdot 35 = 0,48P \cdot 35 = 16,8P \text{ см}$$

Переріз E :

$$M_E = V_B \cdot 40 = 0,52P \cdot 40 = 20,8P \text{ см}.$$

7. Визначимо $[P]$. Знаходимо $[P]_C$ і $[P]_E$ - величини допустимої сили для кожного перерізу. Менша з них і буде $[P]$.

I. Переріз C .

Знаходимо $[P]_\sigma^C$ - допустиму величину сили P з умови міцності при згинанні.

$$n_\sigma \geq [n_\sigma] \quad (6.1)$$

Нормальне напруження в небезпечній точці перерізу при обертанні вала змінюється за симетричним циклом. Тому коефіцієнт запасу обчислимо за формулою

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \cdot \sigma_a} \quad (6.2)$$

Амплітудне напруження $\sigma_a = \sigma_{\max} = \frac{M}{W}$.

Осьовий момент опору перерізу вала

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,5^3}{32} = 8,95 \text{ см}^3. \text{ Тоді}$$

$$\sigma_a^c = \frac{MC}{W} = \frac{16,8P}{8,95} = 1,89P \cdot \frac{1}{\text{см}^2}.$$

Загальний коефіцієнт зниження границі витривалості деталі при симетричному циклі знайдемо за формулою:

$$K_{\sigma} = \frac{K_{\sigma}}{\beta \epsilon_{\sigma}}. \quad (6.3)$$

При $\frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56$: $\frac{r^c}{d} = \frac{r_1}{d} = \frac{9}{45} = 0,2$ і $\sigma_M = 1000 \text{ МПа}$ коефіцієнти

концентрації напружень $K_{\sigma}^c = 1,38$; $K_{\tau}^c = 1,24$ (див. додаток Д) $\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\tau} = 0,755$ (див. додаток Е). При шорсткості $R_a 0,32$ $\frac{1}{\beta} = 1$ (додаток Ж)

$$K_{\sigma}^c = \frac{1,38 \cdot 1}{0,755} = 1,83; K_{\tau}^c = \frac{1,24 \cdot 1}{0,755} = 1,64$$

із (6.1) і (6.2) одержимо:

$$\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}^c \sigma_a^c} \geq [n_{\sigma}] = \frac{400}{1,83 \cdot 1,89P/10^2} \geq 2,5 \quad (6.4)$$

$$[P]_{\sigma}^c = \frac{400 \cdot 10^2}{1,83 \cdot 1,89 \cdot 2,5} = 4626 \text{ Н}. \quad (6.5)$$

Розмірність: $\sigma_{-1} - \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$, $\sigma_a^c = \frac{P}{\text{мм}^2}$.

II Знаходимо $[P]_{\tau}^c$ – допустиму величину сили P з умови міцності при крученні

$$n_{\tau} \geq [n_{\tau}].$$

Матеріал у небезпечній точці сприймає асиметричний цикл дотичних напружень. Тому визначимо допустиме значення сили $[P]_{\tau(r)}^c$ з умови втомної міцності і сили $[P]_{\tau(r)}$. Записуємо умову втомної міцності $n_{\tau(r)} \geq [n_{\tau}]$. Визначаємо коефіцієнт запасу $n_{\tau(r)}$ по відношенню до границі витривалості.

Для цього обчислюємо добуток $\rho \cdot K_{\sigma}^c$. Характеристика $\rho = \frac{\tau_a}{\tau_c}$:

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{kp \max}}{W_p} - \frac{M_{kp \min}}{W_p} \right) \quad (6.6)$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{kp \max}}{W_p} + \frac{M_{kp \min}}{W_p} \right)$$

Полярний момент опору перерізу вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W = 2 \cdot 8,946 = 17,9 \text{ см}^3 \quad (6.7)$$

$$\tau_a = \frac{M_{kp \max} - M_{kp \min}}{2W_p} = \frac{(50 - (-20))P}{2 \cdot 17,9} = 1,96 P / \text{см}^2. \quad (6.8)$$

$$\tau_c = \frac{(50 - 20)P}{2 \cdot 17,9} = 0,84 P / \text{см}^2; \quad (6.9)$$

$$\rho = \frac{1,96 P}{0,84 P} = 2,33. \quad (6.10)$$

так як величина добутку $\rho \cdot K_w^C = 2,33 \cdot 1,64 > 1$, то для обчислення коефіцієнта запасу використовуємо формулу (6.11). Тоді

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_w^C \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_c} \geq [n_\tau] = \frac{240}{1,64 \left(\frac{1,96 P}{10^2} \right) + 0,075 \left(\frac{0,84 P}{10^2} \right)} \geq 2,5 \quad (6.11)$$

$$[P]_{\tau(r)}^C = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) 2,5} = 2970 \text{ Н}. \quad (6.12)$$

Розмірність: $\tau_{-1} - \text{Н} / \text{мм}^2$; $\tau_a, \tau_c - \text{Н} / \text{мм}^2$.

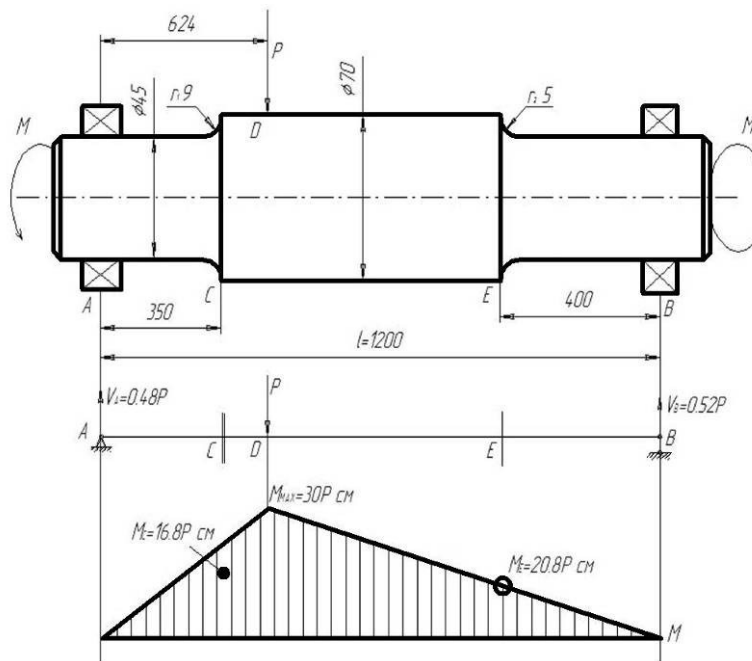


Рис. 6.3. Розрахункова схема вала

Знаходження $[P]_{\tau(T)}^L$.

Записуємо умову статичної міцності

$$n_{\tau(T)} \geq [n_\tau]. \quad (6.13)$$

Коефіцієнт запасу по відношенню до границі текучості обчислюємо за формулою

$$n_{\tau(T)} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}}, \quad (6.14)$$

де
$$\tau_{\max} = \tau_a + \tau_c = (1,956 + 0,838) \frac{P}{\text{см}^2} = 2,9 \frac{P}{\text{см}^2} \quad (6.15)$$

Враховуючи (6.13 - 6.15), одержимо

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\max}} \geq [n_\tau] \Rightarrow \frac{390}{2,90/10^2} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^\omega = \frac{390 \cdot 10^2}{2,9 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^\omega = 5390 \text{ Н}.$$

З порівняння величин

$$[P]_{\sigma}^{\omega} = 3720 \text{ Н}, \quad [P]_{\tau(r)}^{\omega} = 2970 \text{ Н}, \quad [P]_{\tau(r)} = 5390 \text{ Н}.$$

Робимо висновок, що для перерізу L допустима величина сили $[P]^L = 2970 \text{ Н}$

Переріз E.

1. Знаходимо $[P]_{\sigma}^E$

$$\sigma_a^E = \sigma_{\max}^E = \frac{M_E}{W} = \frac{20,8P}{8,95} = 2,32 \frac{P}{\text{см}^2}.$$

Визначаємо коефіцієнти $K_{\sigma d}^E$ і $K_{\tau d}^E$.

$$\text{При } \frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56, \quad \frac{r^E}{d} = \frac{r_2}{d} = \frac{5}{45} = 0,11 \text{ і } \sigma_E = 1000 \text{ МПа},$$

$$K_{\sigma}^E = 1,62, \quad K_{\tau}^E = 436, \quad \varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\tau} = 0,76; \quad 1/\beta = 1.$$

$$\text{Тоді } K_{\sigma d}^E = \frac{1,62}{0,76} = 2,15; \quad K_{\tau d}^E = \frac{1,36 \cdot 1}{0,76} = 1,8$$

$$\frac{\sigma - 1}{K_{\sigma}^E \sigma_a^E} \geq [n_{\sigma}] = \frac{400}{2,15(1,79P/10^2)} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_{\sigma}^E = \frac{400 \cdot 10^2}{2,15 \cdot 1,79 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\sigma}^E = 4160 \text{ Н}.$$

$$\text{Розмірність } \sigma_{-1} - \text{Н} / \text{мм}^2, \quad \sigma_a^E - \frac{P}{\text{мм}^2}.$$

Обчислюємо $[P]_{\tau}^E$ при асиметричному крученні.

Критерій $\rho \cdot K_{\tau d}^E = 2,33 \cdot 1,8 \approx 1$, і коефіцієнт запасу по відношенню до границі витривалості обчислюємо за формулою

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau d}^E \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_c} \geq [n_{\tau}] \Rightarrow \frac{240}{1,8 \left(\frac{1,961}{10^2} \right) + 0,0075 \left(\frac{0,841}{10^2} \right)} \geq 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,8 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) 2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = 2680 \text{ Н}.$$

Амплітудні τ_a і середні τ_c напруження в перерізах L і E однакові. Тому

$$[P]_{\tau(r)}^E = [P]_{\tau(r)}^L = 5340 \text{ Н}.$$

Як видно з порівняння $[P]_{\sigma}^E$, $[P]_{\tau(r)}^E$ і $[P]_{\tau(r)}^L$, для перерізу E допустима величина сили $[P]^E = 2680 \text{ Н}$.

Отже, допустима величина сили P для вала визначається втомою міцністю матеріалу в небезпечній точці перерізу E .

$$[P] = [P]^E = 2680 \text{ Н}.$$

6.3. Обчислення коефіцієнта запасу міцності

При плоскому напруженому стані коефіцієнт запасу визначають за формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (6.16)$$

Обчислюємо n для кожного ймовірно небезпечного перерізу. Менша величина є коефіцієнтом запасу вала.

Коефіцієнт запасу n_σ по нормальному напруженню обчислюється в небезпечній точці перерізів L і E .

Переріз L

$$n_\sigma^L = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a^L}, \quad (6.17)$$

$$\sigma_a^L = 1,88 \cdot [P] / \text{см}^2 = \frac{1,88 \cdot 2680}{10^2} \cdot \frac{H}{\text{мм}^2} = 50,4 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$n_\sigma^L = \frac{400}{1,83 \cdot 50,4} \Rightarrow n_\sigma^L = 4,34,$$

$$n_\tau^L = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}^L \cdot \tau_a + \psi_\tau \tau_a} = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) 2680} \Rightarrow n_\tau^L = 2,74,$$

$$n_L = \frac{n_\sigma^L \cdot n_\tau^L}{\sqrt{(n_\sigma^L)^2 + (n_\tau^L)^2}} = \frac{4,34 \cdot 2,74}{\sqrt{4,34^2 + 2,74^2}} \Rightarrow n_L = 2,3.$$

Переріз E

$$n_\sigma^E = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}^E \cdot \sigma_a^E}, \quad (6.18)$$

$$\sigma_a^E = 1,79 [P] / \text{см}^2 = \frac{1,79 \cdot 2680}{10^2} \cdot \frac{H}{\text{мм}^2} = 48 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$n_\sigma^E = \frac{400}{48 \cdot 2,3} \Rightarrow n_\sigma^E = 3,6.$$

Оскільки величина $[P]$ визначена з умови міцності матеріалу в небезпечній точці перерізу E при крученні, то

$$n_\tau^E = [n_\tau] = 2,5; \quad n_E = \frac{n_\sigma^E n_\tau^E}{\sqrt{(n_\sigma^E)^2 + (n_\tau^E)^2}} = \frac{3,6 \cdot 2,5}{\sqrt{3,6^2 + 2,5^2}} \Rightarrow n_\sigma = 2,05.$$

Значить, коефіцієнт запасу вала

$$n = n_E = 2,05.$$

Відповідь: $[P] = 2680 \text{ Н}$; $n = 2,05$.

Контрольні запитання.

1. Який порядок розрахунку ваги на витривалість при вигині та крученні?
2. Як знаходяться максимальні і мінімальні величини крутних моментів?
3. Як визначаються небезпечні перерізи?
4. Як визначається амплітудне навантаження?
5. Як знаходиться полярний момент опору перерізу вала?

6. Як обчислюється коефіцієнт запасу міцності?
 7. Як визначається величина допустимого зусилля?

7. РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ

7.1. Основні теоретичні відомості

7.1.1. Загальні поняття

Навантаження, спричинене силами інерції, називають динамічним.

Динамічне внутрішнє зусилля S_d , напруження σ_d , τ_y , деформацію (переміщення) Δ_y можна подати у вигляді двох складових: одна залежить від статичної дії зовнішніх сил, а друга – від сил інерції

$$\left. \begin{aligned} S_y &= S_{cm} + S_i \\ \sigma_y &= \sigma_{cm} + \sigma_i \\ \Delta_y &= \Delta_{cm} + \Delta_i \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Постійну складову $(S_{cm}, \sigma_{cm}, \Delta_{cm})$ визначають звичайним способом, залежно від виду деформації. Спосіб визначення складової, спричиненої силами інерції $(S_i, \sigma_i, \Delta_i)$, залежить від виду динамічного навантаження.

7.1.2. Види динамічних навантажень

У динаміці та міцності машин розрізняють три види навантажень:

- 1) постійне;

- 2) ударне;
- 3) повторно-змінне.

7.1.3. Постійне динамічне навантаження

До цього класу задач належать задачі динаміки, в яких прискорення – величина стала.

При визначенні динамічного внутрішнього зусилля S_y використовують принцип Даламбера. За цим принципом рухоме тіло можна розглядати у стані миттєвої рівноваги, якщо до нього прикласти, крім зовнішніх сил, силу інерції.

Силу інерції направляють протилежно прискоренню. Її величину знаходять за формулами:

$$\left. \begin{aligned} dF_i &= dm \cdot a = \rho dV \cdot a = (\gamma/g) dV \cdot a \\ \text{або} \\ F_i &= m \cdot a = \rho V \cdot a = (\gamma/g) V \cdot a \end{aligned} \right\}, \quad (7.2)$$

якщо кожна точка має однакове прискорення.

У формулах (7.2) m – маса, V – об’єм, a – прискорення, g – прискорення сили земного тяжіння, ρ – густина матеріалу, γ – питома вага матеріалу.

При розрахунку стержневих систем зручно користуватись поняттям інтенсивності сили інерції, або погонної сили інерції (сила на одиницю довжини)

$$q_i = \frac{dF_i}{dl} = \rho A \cdot a = (\gamma/g) \cdot A \cdot a, \quad (7.3)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

У випадку вертикального підйому вантажу з прискоренням a динамічні параметри можна визначити за допомогою коефіцієнта динамічності K_d

$$\left. \begin{aligned} S_d &= S_{cm} \cdot K_d \\ \sigma_y &= \sigma_{cm} \cdot K_d \\ \Delta_y &= \Delta_{cm} \cdot K_d \end{aligned} \right\}, \quad (7.4)$$

де

$$K_d = 1 \pm a/g \quad (7.5)$$

Знак «+» в (7.5) – підйом вантажу, знак «-» в (7.5) – рух вантажу донизу.

7.1.4. Ударне навантаження [12]

Прискорення і сила інерції тіла, що спричиняє удар, зростають не змінюючи напрямку, від нуля до кінцевого значення.

Удар може бути поздовжнім (рис. 7.1, а), поперечним (рис. 7.1, б), скручуючим (рис. 7.1, в, стержень АВ).

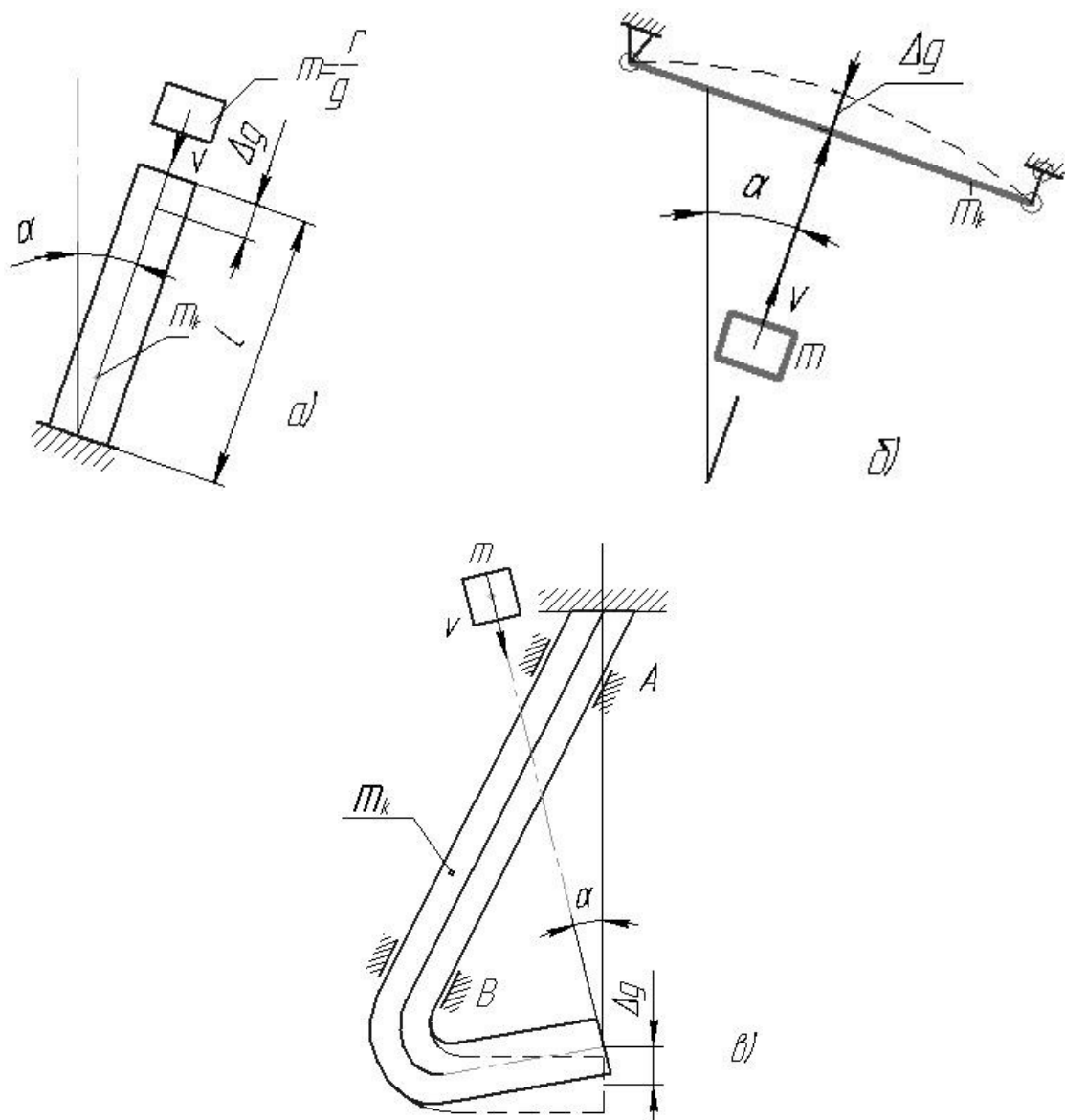


Рис. 7.1. Ударне навантаження:

а) – поздовжній удар; б) – поперечний удар; в) – скручуючий удар.

В опорі матеріалів використовують наближену теорію удару, за допомогою якої визначають максимальні значення напружень σ_g , τ_g і переміщень Δ_g .

Динамічні напруження і переміщення визначають за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \sigma_{cm} \cdot K_g, \\ \tau_g &= \tau_{cm} \cdot K_g, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\Delta_g = \Delta_{cm} \cdot K_g. \quad (7.7)$$

У загальному випадку коефіцієнт динамічності можна визначити за формулами:

$$K_g = \pm \cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{2K}{mg\Delta_{cm} \left(I + \beta \frac{mk}{m} \right)}}; \quad (7.8)$$

або,

$$K_g = \pm \cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{V^2}{g \Delta_{cm} \left(I + \beta \frac{mk}{m} \right)}}, \quad (7.9)$$

де α – кут між вертикаллю і напрямком удару; знак „+” перед $\cos \alpha$ ставлять при ударі зверху вниз, „-” при ударі знизу вгору; $K = \frac{mv^2}{2}$ – кінематична енергія ударяючого тіла в момент дотику; V – швидкість ударяючого тіла в момент дотику; m – маса ударяючого тіла; m_k – маса конструкції, що сприймає удар; β – коефіцієнт приведення маси конструкції до точки удару.

Для окремих випадків величину коефіцієнта β вказано на рис. 7.2, а, б, в.

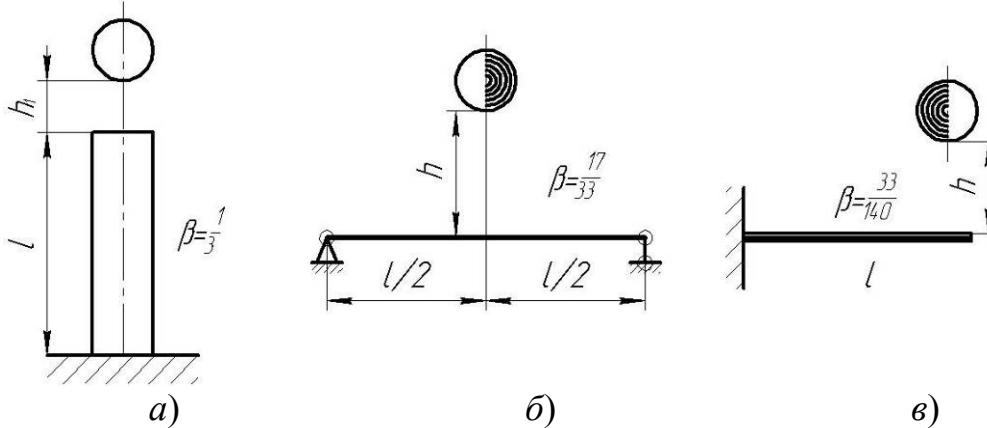


Рис. 7.2. Коефіцієнт β для окремих випадків удару

Якщо маса конструкції зосереджена в точці удару, то $\rho=1$. Для попередніх і наближених розрахунків в багатьох випадках масу конструкції m_k можна не враховувати. У такому разі значення коефіцієнтів динамічності можна визначати за формулами:

1. Вертикальний удар: $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2 \alpha = 1$;

$$K_o = \pm 1 + \sqrt{1 + \frac{2K}{m \gamma \Delta_{cm}}}, \quad (7.10)$$

або

$$K \partial = \pm 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta_{cm}}}. \quad (7.11)$$

2. Удар вільно падаючим тілом: $V^2 = 2gh$;

$$K_o = 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\Delta_{cm}}}. \quad (7.12)$$

3. Горизонтальний удар: $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2 \alpha = 0$;

$$K_o = \sqrt{\frac{2K}{mg \Delta_{cm}}}, \quad (7.13)$$

або

$$K_o = \frac{V}{\sqrt{g \cdot \Delta_{cm}}}. \quad (7.14)$$

Максимальні динамічні переміщення і силу інерції у випадку горизонтального удару можна визначити за формулами:

$$\Delta_o = \sqrt{2 \delta K}; \quad (7.15)$$

$$F_{\delta} = \sqrt{\frac{2K}{\delta}}, \quad (7.16)$$

де $\delta = \delta_{11}$ – податливість конструкції в напрямку удару (переміщення від статично прикладеної в точці удару одиничної сили $F^0 = 1$).

4. Скручуючий удар обертовим тілом.

Динамічний кут повороту γ_{δ} і скручуючий момент M_{δ} маховика M при раптовому гальмуванні шківів Ш (рис. 7.3) можна обчислити за формулами:

$$\gamma_{\delta} = \sqrt{2\delta K}; \quad (7.17)$$

$$M_{\delta} = \sqrt{\frac{2K}{\sigma}}, \quad (7.18)$$

де $\sigma = \sigma_{II}$ кут повороту від одиничного окружуючого моменту $m^0 = 1$, статично прикладеного в місці кріплення маховика; K – кінетична енергія маховика.

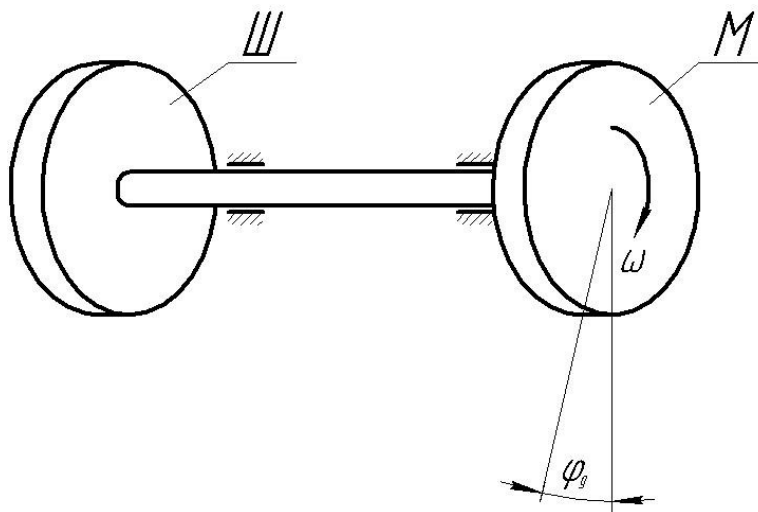


Рис. 7.3.

7.1.5. Повторно-змінне навантаження. Коливання

Повторно-змінне динамічне навантаження спричиняється позacentровою силою при обертанні тіла навколо осі, що не проходить через центр мас тіла.

На рис. 7.4 показано позacentрову силу H , що виникає при обертанні незбалансованого ротора електродвигуна.

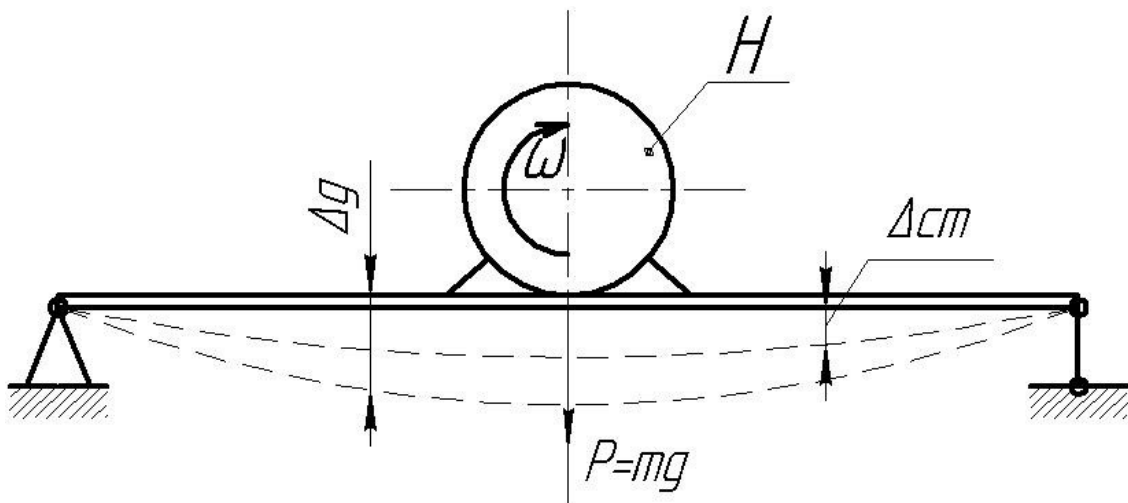


Рис. 7.4.

У напрямку дії ваги $P = mg$ двигуна складова сила H змінюється за гармонічним законом

$$H(t) = H \cos \omega t, \quad (7.19)$$

де t – час; H і ω – амплітуда і частота збурюючої сили.

Під дією збурюючої сили відбуваються вимушені коливання механічної системи.

Вирішальний вплив на величину напружень σ_t і переміщень Δ , спричинених збурюючою силою, має співвідношення частот вимушених ω і власних ω_0 коливань.

Власні коливання відбуваються під дією сил інерції і сил пружності після усунення причини, що вивела систему з рівноваги.

При визначенні частоти ω_0 власних коливань розраховують схему, як і при ударі, обирають у вигляді системи з єдиним ступенем вільності. Масу m_k конструкції приводять до центра мас m вантажу.

В інженерній практиці зустрічаються дві основні задачі:

- 1) відстройка конструкції від резонансу;
- 2) знаходження максимальних переміщень і напружень.

Відстройка від резонансу вважається досягнутою, якщо відношення частот вимушених і власних коливань знаходиться поза областю резонансу

$$0,7 \leq \omega / \omega_0 \leq 1,3. \quad (7.20)$$

7.1.5.1. Поздовжні і поперечні коливання

Частоту власних поздовжніх і поперечних коливань системи «конструкція – вантаж» розраховують за формулою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta_m \left(1 + \beta \frac{m_k}{m}\right)}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm} \left(1 + \beta \frac{m_k}{m}\right)}}, \quad (7.21)$$

де $\delta = \delta_1$ – переміщення від одиничної сили $F^0 = 1$ статично прикладеної в центрі мас у напрямку коливань; m – маса вантажу; m_k – маса конструкції; β – коефіцієнт приведення маси конструкції до центра мас (рис. 7.2); Δ_{cm} – статичне переміщення центру мас від ваги P вантажу.

Якщо масою m_k конструкції можна знехтувати, то формула (6.23) набуває вигляду

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}. \quad (7.22)$$

Найбільше динамічне переміщення в напрямку дії сили тяжіння вантажу обчислюють за (6.4) $\Delta_o = \Delta_{cm} \cdot K_o$, де Δ_{cm} – переміщення від статичної сили, що дорівнює вазі P вантажу.

Коефіцієнт динамічності

$$K_o = 1 + \frac{H}{P} \eta, \quad (7.23)$$

де η – коефіцієнт наростання коливань.

При виконанні умови (6.20) відстройка від резонансу

$$\eta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}. \quad (7.24)$$

Коефіцієнт наростання коливань завжди додатний. Найбільше динамічне напруження за (7.4) $\sigma_\delta = \sigma_{ст} \cdot K_\delta$, де $\sigma_{ст}$ – найбільше статичне напруження в конструкції від статичної дії ваги P вантажу.

7.1.5.2. Крутильні коливання

Частота власних крутильних коливань системи «вал-маховик» (рис.7.5)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta \cdot I_M}} = \sqrt{\frac{\sigma I_p}{l \cdot I_M}}, \quad (7.25)$$

де $\delta = \delta_\pi$ – переміщення (кут повороту) від одиничного моменту $m^0 = 1$ статично прикладеного в місці кріплення маховика; I_M – момент інерції маси маховика.

За наявності збурюючої сили скручуючого моменту, величина якого змінюється за гармонічним законом $T(t) = T \cos \omega t$, максимальний динамічний крутний момент і кут повороту маховика можна обчислити за формулами:

$$M_{кр} = T \cdot \eta, \quad (7.26)$$

$$\gamma_\delta = \gamma \cdot \eta, \quad (7.27)$$

де T – амплітудне значення збурюючої сили (моменту); γ – кут повороту від моменту T .

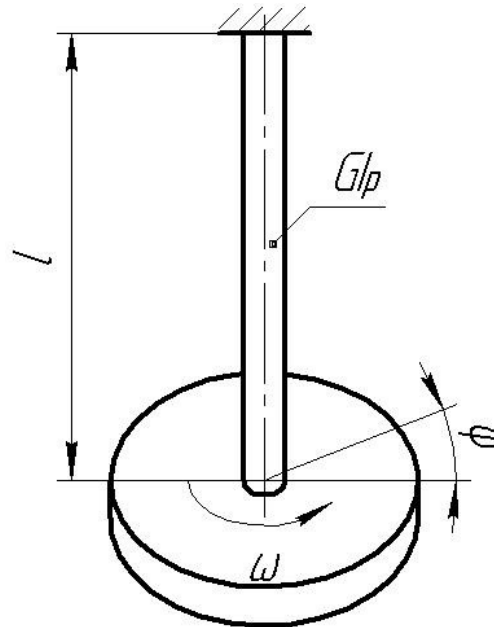


Рис. 7.5.

Коефіцієнт наростання коливань η при виконанні умови відстройки від резонансу обчислюється за (7.24).

7.2. Розрахунково-графічне завдання “Розрахунок балки при ударному навантаженні”

Зміст РГЗ.

На балку двотаврового поперечного перерізу, що закріплена за допомогою шарнірних опор, з висоти h падає вантаж P .

Необхідно:

1. Знайти найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки при статичній дії вантажу P .
2. Знайти максимальне динамічне напруження при ударі.
3. Знайти максимальне динамічне напруження при падінні вантажу на балку у випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори з податливістю α (податливість – це переміщення, що припадає на одиницю сили).

Варіанти схем балок показано на рис.7.6 а. Необхідні дані взяти з таблиці 7.1. У розрахунках прийняти модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа, або $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

Вагою балки знехтувати.

Приклад виконання РГЗ-6.1.

Вихідні дані: схема (див. рис. 7.6, а); двотавр № 30 а, $l=2,5$ м; $P=1,3$ кН (130кг); $h=0,15$ м; $\alpha =0,025$ м/кН.

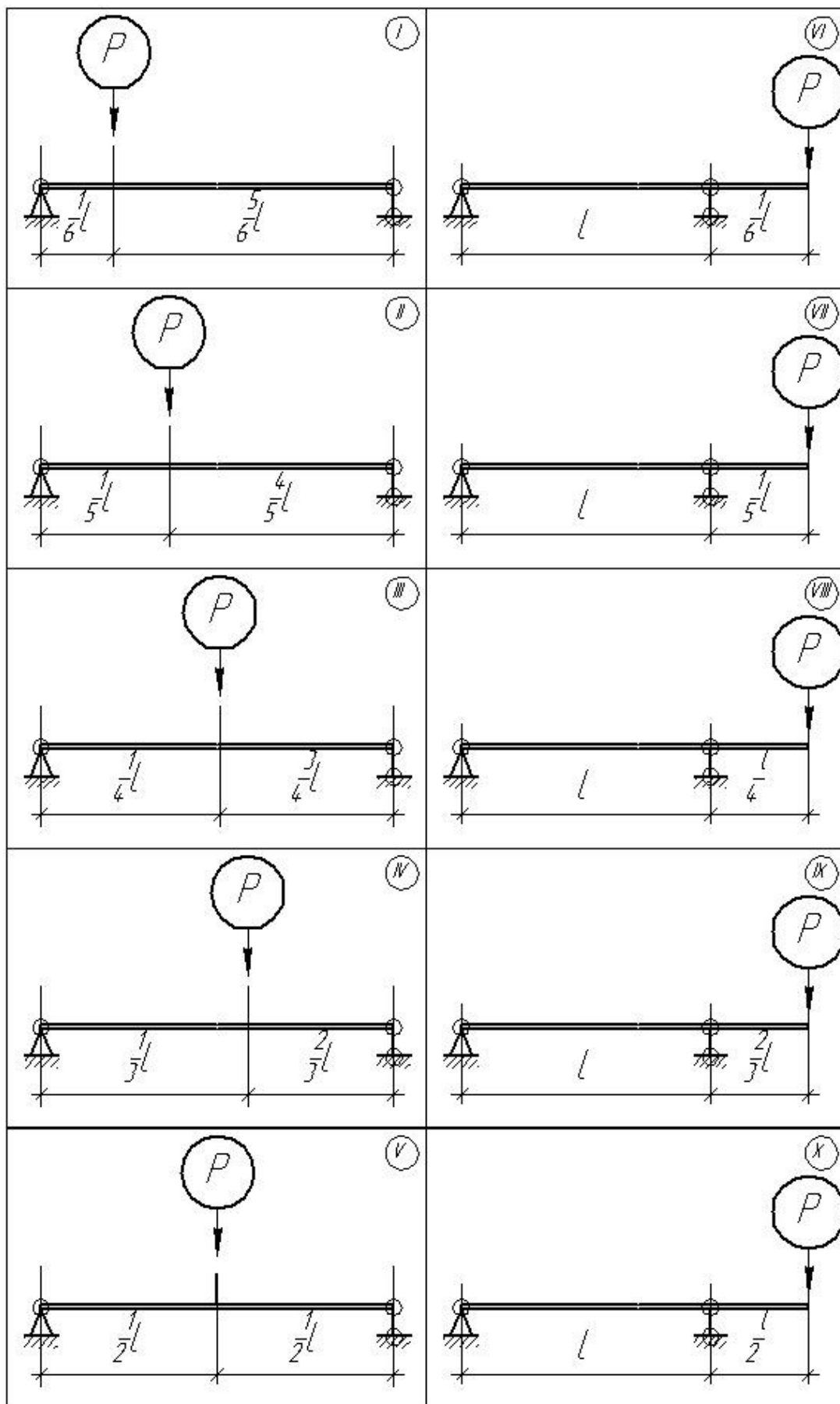


Рис. 7.6, а. Варіанти розрахункових схем для РГЗ 6.2

Дані для РГЗ 6.2

№ варіанта	№ схеми	№ двотавра	l , м	P , кН	h , м	α , м/кН
0	I	30	2	0,5	0,25	0,025
1	II	24	5	1,0	0,50	0,02
2	III	20a	2,5	1,5	0,30	0,023
3	IV	22a	3,0	2,0	0,7	0,027
4	V	24a	3,5	0,75	0,6	0,028
5	VI	27	3,5	0,80	0,55	0,03
6	VII	30	4,0	0,9	0,70	0,027
7	VIII	27a	3,5	1,25	0,65	0,029
8	IX	30a	4,0	1,28	0,35	0,03
9	X	27	1,75	1,2	0,4	0,035

Розв'язок:

1. Знаходимо найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки при статичному навантаженні

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_z}.$$

За таблицями сортаменту двотавра №30а, $W_z = 518 \text{ см}^3$. Максимальний згинаючий момент у перерізі С.

Знаходимо реакції з умов рівноваги та побудуємо епюру М (див. рис.7.6).

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot l - P \cdot \frac{1}{5}l = 0 \Rightarrow R_H = 0,2P.$$

$$\sum M_A = 0, R_B l - P \cdot \frac{4}{5}l = 0 \Rightarrow R_B = 0,8P.$$

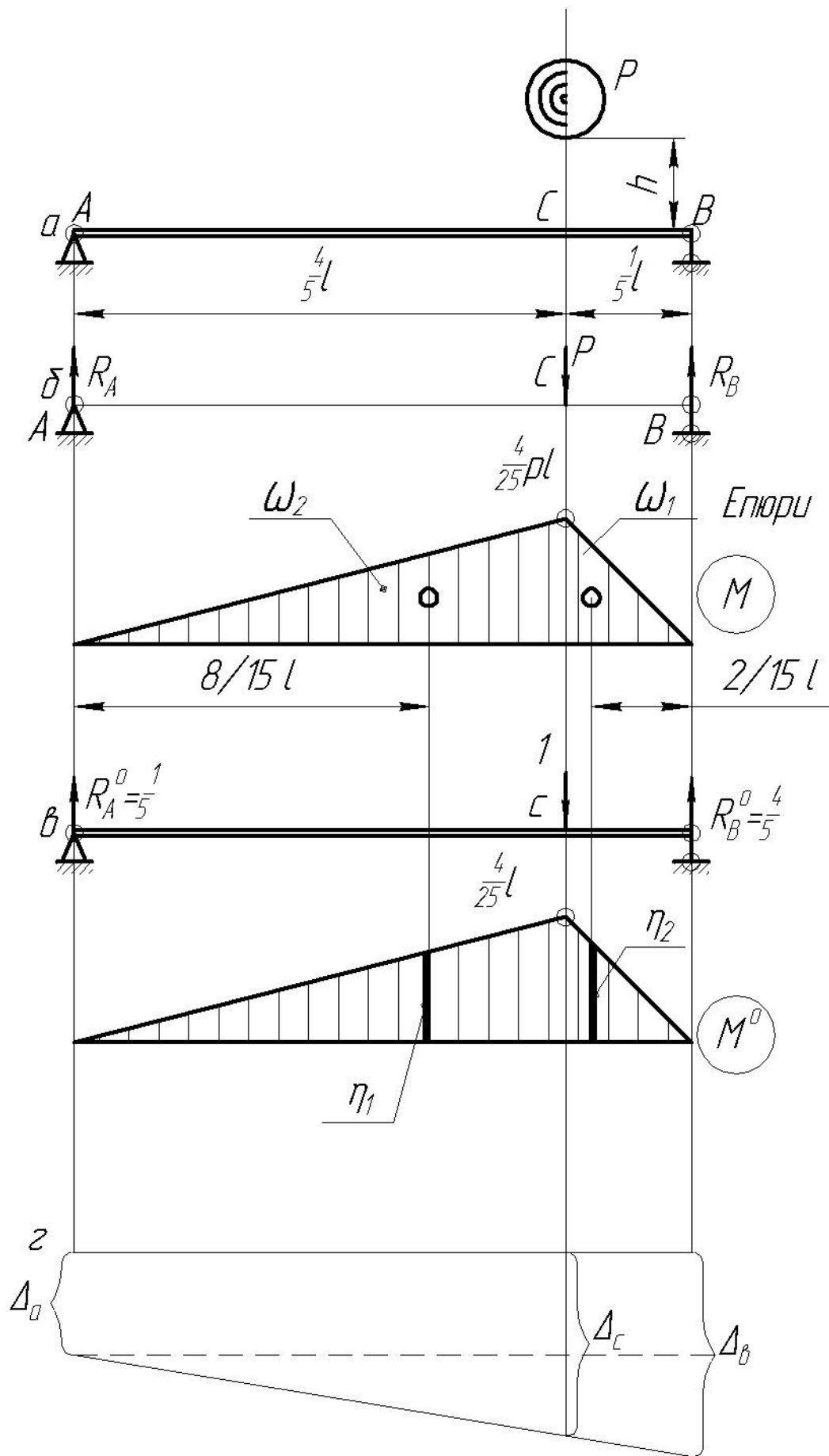


Рис. 7.6, б

Перевірка:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B = P; 0,2P + 0,8P = P.$$

Епюра M на ділянках лінійна, з переломом у точці C .

$$M_c = R_{AH} \cdot \frac{4}{5}l = 0,2P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5}P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}Pl$$

$$M_{\max} = \frac{4}{25} \cdot Pl = \frac{4}{25} \cdot 1300 \cdot 2,5 = 520 \text{ НМ} = 0,52 \text{ кНМ}.$$

Максимальне напруження:

$$\sigma_{\max}^{cm} \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{520}{518 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа}.$$

1. Знаходимо максимальне напруження при ударі по балці з жорсткими опорами.

Коефіцієнт динамічності

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cn}}}$$

Переміщення точки удару від статично прикладеної сили (прогин перерізу C) визначаємо методом Мора за правилом Верещагіна. Будуємо епюру одиничних сил M^0 (рис. 7.6, б).

Реакції від дії одиничної сили F^0 знаходимо так само, як від дії сили P :

$$R_A^0 = 0,2F^0 = 1/5 = 0,2;$$

$$R_B^0 = 0,8F^0 = 4/5 = 0,8.$$

Ордината епюри M^0 у точці C

$$M_c^0 = R_H^0 \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}l = 0,4 \text{ м}.$$

Переміщення

$$\Delta_{cm} = \sum \frac{\omega_i y_i}{EI} = \frac{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{EI},$$

де ω_1, ω_2 – площі епюри M :

$$\omega_1 = \frac{4}{25} Pl \cdot \frac{4}{5}l \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EI};$$

$$\omega_2 = \frac{4}{25} Pl \cdot \frac{1}{5}l \cdot \frac{1}{2EI} = \frac{2}{50} Pl^2 \cdot \frac{1}{EI}.$$

η_1, η_2 – ординати одиничної епюри під центром ваги відповідної вантажної площі

$$\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15}l = \frac{8}{75}l.$$

Таким чином

$$\Delta_{cm} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{8}{75}l + \frac{2}{50} \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{8}{75}l = \frac{Pl^3}{EI} (0,00683 + 0,00423) = 0,0111 \frac{Pl^3}{EI}.$$

Статичне переміщення

$$\Delta_c = 0,0111 \frac{Pl^3}{EI} = 0,0111 \cdot \frac{130 \cdot 250^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 7780} = 0,00145 \text{ см} = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Коефіцієнт динамічності

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5}}} = 146$$

Максимальне динамічне напруження

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = 146 \cdot 1,0 = 146 \text{ МПа}$$

2. Знайдемо максимальне динамічне напруження для випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори.

Задача відрізняється величиною коефіцієнта динамічності:

$$\sigma_{\max}^{\text{д}} = \sigma_{\max}^{\text{ст}} \cdot K_d';$$

$$K_d' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$$

Статичне переміщення точки удару визначаємо з урахуванням податливості опор

$$\Delta_{\text{ст}}' = \Delta_{\text{ст}} + \Delta_c,$$

де $\Delta_{\text{ст}}$ – переміщення точки С, спричинене деформацією компенсаторів.

З рис. 7.6 з:

$$\Delta_c = \Delta_A + \frac{4}{5}(\Delta_B - \Delta_A);$$

$$\Delta_A = \alpha R_A = 0,025 \cdot 0,26 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_B = \alpha R_B = 0,025 \cdot 1,04 = 26 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_c = 6,5 \cdot 10^{-3} + \frac{4}{5}(26 \cdot 10^{-3} - 6,5 \cdot 10^{-3}) = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Коефіцієнт динамічності

$$K_d' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5} + 22,1 \cdot 10^{-3}}} = 4,82$$

Максимальні динамічні напруження:

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}'} = 4,82 \cdot 1 = 4,82 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{дин}}}{\sigma_{\max}^{\text{дин}'}} = \frac{146}{4,82} = 30,3.$$

Таким чином, використання амортизаторів зменшує величину максимальних напружень при ударі в 30,3 рази.

7.3. Розрахунок упорного підшипника

Підшипник стиснутий силою P (див. табл. 6.2). Знайти площу контакту, а також розрахувати на міцність.

Матеріал – хромиста сталь.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Табл. 6.2

Вихідні дані для розрахунку упорного підшипника

№ варіанта	P , кг	Коефіцієнт нерівномірності	Допустиме контактне	Кількість кульок	d_k , мм
------------	----------	----------------------------	---------------------	------------------	------------

			напруження [σ] _к , МПа		
0	640	0,8	3500	20	15
1	700	0,75	4000	18	20
2	600	0,9	5000	20	18
3	750	0,7	3700	16	16
4	675	0,85	3900	20	15
5	725	0,8	3500	22	15
6	1000	0,78	4500	20	10
7	925	0,8	5500	22	15
8	900	0,8	6000	20	15
9	910	0,75	5500	20	20
10	928	0,8	3500	20	18
11	950	0,8	5520	20	15
12	975	0,8	3950	20	15
13	926	0,75	4250	23	15
14	675	0,8	3750	20	20
15	775	0,85	5200	20	15

Приклад розрахунку.

$P = 640$ кг, $d = 15$ мм, $[\sigma]_r = 3500$ МПа, $n = 0,8$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $i = 20$ шт.

1. Знаходимо силу на один шарик

$$P_1 = \frac{P}{0,8 \cdot i} = \frac{640}{0,8 \cdot 20} = 40 \text{ кг} = 400 \text{ Н.}$$

2. У точці “к” слід контакту

$$a = 0,883 \sqrt[3]{\frac{2PR}{E}} = 0,883 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 40 \cdot 0,75}{2,1 \cdot 10^6}} = 0,017 \text{ см.}$$

$$E_2 = E_1 = E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

3. Найбільше напруження на площадку контакту

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \frac{1,5 \cdot 40}{\pi \cdot 0,017^2} = 26570 \text{ кг/см}^2 = 2657 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k, 2657 \text{ МПа} \leq 3500 \text{ МПа.}$$

Умова міцності виконується.

Контрольні запитання

1. Яке навантаження називають динамічним?
2. Які є види динамічних навантажень?
3. У чому полягає принцип Даламбера для визначення внутрішнього зусилля?
4. Як визначається сила інерції при динамічному навантаженні?
5. Який вигляд має вираз для визначення інтенсивності сили інерції?
6. Як визначаються динамічні параметри при постійних динамічних навантаженнях?
7. Які розрізняють напрямки ударного навантаження?
8. За якими формулами визначаються динамічні напруження і переміщення?
9. Як визначається коефіцієнт динамічності в загальному випадку?

10. Як визначається коефіцієнт динамічності при вертикальному ударі?
11. Як визначається коефіцієнт динамічності при ударі вільно падаючим тілом?
12. Як визначається коефіцієнт динамічності при горизонтальному ударі?
13. Як визначаються максимальні динамічні переміщення і сила інерції у випадку горизонтального удару?
14. За якими співвідношеннями можна обчислити динамічний кут повороту і скручуючий момент маховика?
15. Чим спричиняється повторно-змінне динамічне навантаження?
16. За якою формулою обчислюють частоту власних повздовжніх і поперечних коливань системи “конструкція-вантаж”?
17. За якою формулою обчислюють частоту власних крутильних коливань системи “вал – маховик”.
18. Який порядок розрахунку балки при ударному навантаженні?
19. Який порядок розрахунку упорного підшипника?

ЛІТЕРАТУРА

1. Огородников В.А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. – К.: Вища шк., 1983. – 175 с.
2. Dell G.D. Yeliseyev V.V. and other. CAD system for the elastic – medium shaping of pipe-line parts // Jour of materials. Processing Technology. – 1992. – V.35. – p.191-198.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

4. Комогоров В.Л. Напряжения. Деформация. Разрушение. – М.: Металлургия, 1970. – 230 с.
5. Дель Г.Д. Технологическая механика. – М.: Машиностроение, 1978. – 174 с.
6. Кроха В.А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: Справочник. – М.: Машиностроение, 1980. – 157 с.
7. Третьяков А.В., Зюзин В.И. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением: Справочник. – 2-е изд. Перераб. и доп. – М.: Металлургия. – 1973. – 224 с.
8. Огородников В.А. Киселев В.Б., Сивак И.О. Энергия. Деформации. Разрушение. (Задачи автотехнических экспертиз). Монография. – Винница: УНІВЕРІУМ-Вінниця, 2005. – 204 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – Главная редакция физико-математических лит-ры изд-ва “Наука”, 1970. – 544 с.
10. Корнілов О.А. Опір матеріалів. Підручник. – Київ: Логос, 2002. – 562 с.
11. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е издание, перераб. и доп. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
12. Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофеев О.А. Опір матеріалів. Розрахункові роботи: Навч. Посіб. – Львів: Афіша, 2002 – 280 с.
13. Огородников В.А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении: Учебное пособие. – К.: УМК ВО, 1989. – 152 с.
14. Огородников В.А, Музычук В.И., Грушко А.В. О технологическом паспорте материала заготовок поршня с шатуном аксиально-роторного поршневого насоса // Промислова гідравліка і пневматика. – 2004. – № 4. – С. 86-92.
15. Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофеев О.А. Опір матеріалів. Прилади, задачі, розрахункові роботи. Навчальний посібник. – Хмельницький: ТУП, 1999 – 280 с.

16. Огороднікова В.А., Музичук В.І., Нахайчук О.В. Механіка процесів холодного формозмінювання з однотипними схемами механізму деформації. – В.: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 179 с.

ДОДАТКИ

ДС ОК А

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра опору матеріалів
і прикладної механіки

РОЗРАХУНКОВО ГРАФІЧНЕ

ЗАВДАННЯ

з дисципліни
“Прикладна механіка”

Виконав: ст. гр. 1Е-10

Іванов І. І.

Перевірив: д.т.н., проф.

Огородніков В.А.

ВІННИЦЯ - 2013

Рис. 1. Титульна сторінка РГЗ

ДОДАТОК Б

Розмірності

Напруження – Па (паскаль), $1\text{Па} = \frac{1\text{Н}}{\text{м}^2}$;

МПа (мегапаскаль), $1\text{МПа} = \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 10^3 \text{кПа} = 10^6 \text{Па} = \frac{1\text{Н}}{\text{мм}^2} = 10^{-1} \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Наприклад, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа} = 2 \cdot 10^6 \text{кг/см}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{кг/мм}^2$.

Енергія – 1Дж (джоуль) = 0,1кгм = 10кгсм.
 $10\text{Дж} = 1\text{кгм} = 100 \text{кгсм}$.

Момент – 1кНм = 0,1тм = 10^4 кгсм.
 $1\text{Нм} = 0,1 \text{кгм} = 10\text{кгсм}$.

Сила – 1Н (ньютон) = 0,1 кг.
 $1\text{кН} = 0,1\text{тонна} = 100\text{кг}$.

Розподіл навантаження – 1Н/м = 0,1кг/м.
 $1\text{кН/м} = 0,1\text{т/м} = 1\text{кг/см}$.

Примітка: Поряд із системою одиниць вимірювання СІ у технічній літературі також зустрічається система одиниць МКГС, тому в деяких випадках застосовуються обидві системи.

ДОДАТОК В

Експериментальні дані для побудови кривої течії $\sigma_i = f(\varepsilon_s)$

№ з/п	Марка матеріалу	Інтенсивність напружень σ_i , МПа	Інтенсивність деформацій ϵ_i	Коефіцієнти апроксимації	
				<i>A</i>	<i>n</i>
1	2	3	4	5	6
1	Ст. 08КП	300	0,00	1000	0,31
		400	0,25		
		450	0,05		
		520	0,10		
		580	0,20		
		650	0,30		
		720	0,40		
		780	0,50		
		860	0,60		
		900	0,70		
		950	0,80		
		980	0,90		
		1000	1,00		
2	Ст. 45	450	0,00	840	0,19
		540	0,05		
		590	0,10		
		650	0,20		
		700	0,30		
		750	0,40		
		780	0,50		
		800	0,60		
		810	0,70		
		820	0,80		
		830	0,90		
		840	1,00		
		3	VOLKSWAGEN		
200	0,025				
400	0,050				
540	0,10				
590	0,20				
650	0,30				
700	0,40				
730	0,50				
760	0,60				
790	0,70				
810	0,80				
830	0,90				
840	1,00				

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6
4	Лс. 59-1	5,6	0,00	892	0,43
		248	0,05		

		331	0,10		
		438	0,20		
		528	0,30		
		600	0,40		
		672	0,50		
		718	0,60		
		758	0,70		
		804	0,80		
		854	0,90		
		890	1,00		
5	Ст. 20	400	0,00	810	0,205
		438	0,05		
		505	0,10		
		583	0,20		
		633	0,30		
		673	0,40		
		703	0,50		
		729	0,60		
		753	0,70		
		774	0,80		
		793	0,90		
		810	1,00		
6	Ст. 10	380	0,00	720	0,21
		384	0,05		
		444	0,10		
		704	0,20		
		559	0,30		
		594	0,40		
		622	0,50		
		647	0,60		
		668	0,70		
		687	0,80		
		704	0,90		
		720	1,00		
7	03XCIO	400	0,00	930	0,20
		445	0,025		
		511	0,050		
		587	0,100		
		614	0,105		
		636	0,150		
		674	0,20		
		705	0,25		
		730	0,30		
		774	0,40		
		809	0,50		
		840	0,60		
		866	0,70		
		889	0,80		
		911	0,90		
		930	1,00		

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6
8	13145А	320	0,00	780	
		430	0,05		
		500	0,10		
		560	0,20		
		605	0,30		
		650	0,40		
		680	0,50		
		705	0,60		
		735	0,70		
		745	0,80		
		760	0,90		
		780	1,00		
		9	Х18ХГСА		
605	0,05				
732	0,10				
880	0,20				
1002	0,30				
1092	0,40				
1168	0,50				
1181	0,60				
1208	0,70				
1223	0,80				
1236	0,90				
1450	1,00				
10	30ХГСА			502	0,00
		686	0,05		
		736	0,10		
		776	0,20		
		818	0,30		
		847	0,40		
		868	0,50		
		878	0,60		
		882	0,70		
		892	0,80		
		901	0,90		
		920	1,00		
		11	51ХФА	421	0,00
607	0,05				
671	0,10				
752	0,20				
791	0,30				
831	0,40				
852	0,50				
872	0,60				
886	0,70				
893	0,80				
902	0,90				
915	1,00				

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6
12	15X	242	001	800	
		277	0,015		
		307	0,02		
		359	0,03		
		454	0,04		
		515	0,0715		
		564	0,10		
		623	0,18		
		656	0,24		
		735	0,38		
		773	0,554		
		782	0,70		
		800	1,00		
		13	08XГСЮФ		
440	0,05				
500	0,10				
350	0,15				
600	0,20				
700	0,30				
800	0,40				
900	0,50				
1000	0,60				
1080	0,70				
1150	0,80				
1300	0,90				
1380	1,00				
14	Ст. 35			440	0,00
		600	0,05		
		680	0,10		
		750	0,20		
		800	0,30		
		820	0,40		
		850	0,50		
		870	0,60		
		890	0,70		
		900	0,80		
		920	0,90		
		940	1,00		
		950	1,10		
		960	1,20		
970	1,30				
990	1,40				
1000	1,50				
15	08ХПО	400	0,00	1000	
		455	0,05		
		525	0,10		
		575	0,15		
		620	0,20		
		700	0,30		
		750	0,40		
		790	0,50		
		800	0,60		
		860	0,70		
		900	0,80		
		950	0,90		
1000	1,00				

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6				
16	ХН77ТЮР	525	0,00	2350					
		1400	0,10						
		1625	0,20						
		1775	0,30						
		1900	0,40						
		200	0,50						
		2100	0,60						
		2175	0,70						
		2225	0,80						
		2300	0,90						
		2350	1,00						
		17	ОТ-4			400	0,00	535	
						408	0,10		
415	0,20								
420	0,30								
430	0,40								
440	0,50								
450	0,60								
510	0,70								
520	0,80								
530	0,90								
535	1,00								
18	Р6145	560	0,00	1480					
		1120	0,20						
		1180	0,40						
		1300	0,60						
		1360	0,80						
		1480	1,00						
19	ХН70ВМТЮ	650	0,00						
		1175	0,10						
		1425	0,20						
		1600	0,30						
		1750	0,40						
		1850	0,50						
		1975	0,60						
		2050	0,70						
		2125	0,80						
		2200	0,90						
		2275	1,00						
20	Л60	00	0,00						
		100	0,10						
		200	0,20						
		300	0,30						
		375	0,40						
		475	0,50						
		550	0,60						
		600	0,70						
		700	0,80						
		775	0,90						
		850	1,00						

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6
21	В95	200	0,00		
		275	0,10		
		300	0,20		
		325	0,30		
		325	0,40		
		350	0,50		
		350	0,60		
		375	0,70		
		375	0,80		
		375	0,90		
		375	1,00		
		22	АД1		
100	0,10				
100	0,20				
100	0,30				
100	0,40				
125	0,50				
125	0,60				
125	0,70				
125	0,80				
150	0,90				
150	1,00				
23	ШХ15			442	0,00
		800	0,10		
		880	0,20		
		910	0,30		
		960	0,40		
		1000	0,50		
24	Ст.3	471	0,00		
		671	0,10		
		800	0,20		
		842	0,30		
		861	0,40		
		900	0,50		
		914	0,60		
25	Мідь М1	50	0,00		
		166	0,10		
		243	0,20		
		300	0,30		
		333	0,40		
		360	0,50		
		366	0,60		
26	08ГСЮФ	275	0,00		
		500	0,10		
		605	0,20		
		700	0,30		
		800	0,40		
		900	0,50		
		995	0,60		
		1400	0,70		

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6
27	4X13	230	0,00		
		907	0,10		
		1061	0,20		
		1107	0,30		
		1123	0,40		
		1138	0,50		
		1153	0,60		
28	40X	628	0,00		
		986	0,10		
		1057	0,20		
		1100	0,30		
		1143	0,40		
		1171	0,50		
		1186	0,60		
		1200	0,70		
		1214	0,80		
		1228	0,90		
		1257	1,00		
29	W62	00	0,00		0,2
		4700	0,10		
		5800	0,20		
		6400	0,30		
		6900	0,40		
		7300	0,50		
		7600	0,60		
		7900	0,70		
		8100	0,80		
		8200	0,90		
		8300	1,00		
		30	P12		
1040	0,10				
1040	0,20				
1040	0,30				
1140	0,40				
1140	0,50				
1220	0,60				
1220	0,70				
1280	0,80				
1280	0,90				
1320	1,00				
31	4X14H14B2M	425	0,00		
		900	0,10		
		1075	0,20		
		1200	0,30		
		1300	0,40		
		1400	0,50		
		1475	0,60		
		1550	0,70		
		1600	0,80		
		1650	0,90		
		1725	1,00		

Продовження додатка В

1	2	3	4	5	6
32	12X18H9T	350	0,00		
		750	0,10		
		950	0,20		
		1100	0,30		
		1200	0,40		
		1300	0,50		
		1400	0,60		
		1475	0,70		
		1550	0,80		
		1600	0,90		
		1650	1,00		
33	40XHMA	800	0,00		
		950	0,10		
		1000	0,20		
		1050	0,30		
		1050	0,40		
		1075	0,50		
		1100	0,60		
		1100	0,70		
		1125	0,80		
		1125	0,90		
		1150	1,00		
34	BT14	525	0,00		
		1400	0,10		
		1625	0,30		
		1775	0,40		
		1900	0,50		
		2000	0,60		
		2100	0,70		
		2175	0,80		
		2225	0,90		
		2350	1,00		

ДОДАТОК Г

Експериментальні дані для побудови діаграми пластичності

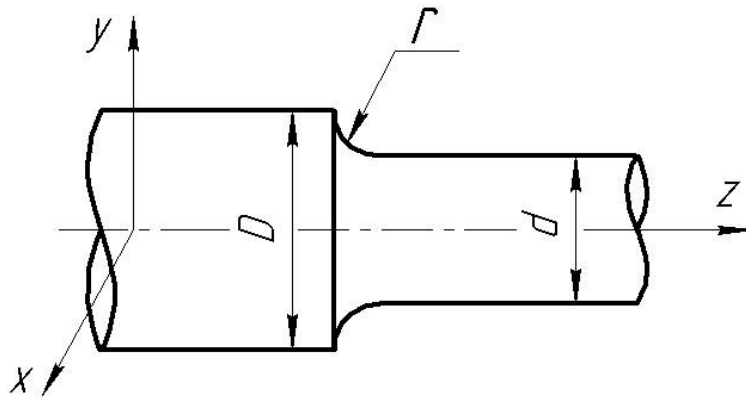
№ з/п	Марка матеріалу	Дані для побудови діаграми пластичності			Коефіцієнти чутливості пластичності до показника η	
		$e_p(\eta=1)$	$e_p(\eta=0)$	$e_p(\eta=-1)$	$\lambda_1 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=0)}{\varepsilon_p(\eta=1)}$	$\lambda_2 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=-1)}{\varepsilon_p(\eta=0)}$
1.	2	3	4	5	6	7
1.	BT-1	0,64	1,15	2,9	0,58	0,92
2.	P12	0,17	0,55	1,9	1,17	1,236
3.	P6M5	0,23	0,46	0,95	0,69	0,72
4.	20-A	1	1,3	1,7	0,26	0,25
5.	АМГ-2	1,05	1,57	2,25	0,4	0,35
6.	BT14	0,15	0,64	1,3	1,45	0,7
7.	P18	0,03	0,37	1,16	2,5	1,14
8.	P9	0,1	0,48	1,2	1,56	0,91
9.	40XH2MA	0,48	0,76	1,52	0,45	0,69
10.	Стапль40	0,09	0,37	∞	1,4	∞
11.	OT-4	0,35	0,75	1,6	0,762	0,757
12.	40X	0,08	0,86	1,5	2,37	0,556
13.	ЗОХМА	0,31	0,48	2,0	0,43	1,42
14.	Ст35	0,2	0,53	1,63	0,97	1,1
15.	О8КП	0,355	0,5	0,7	0,342	0,336
16.	У8А	0,03	0,39	1,2	2,56	1,12
17.	13M5-A	0,28	0,38	0,9	0,305	0,862
18.	XH70BMТЮ	0,38	0,68	1,1	0,58	0,481
19.	XH77ТЮР	0,29	0,62	0,96	0,76	0,437

Продовження додатка Г

1.	2	3	4	5	6	7
20.	ЛС59-1	0,4	0,55	0,65	0,318	0,176
21.	ШХ-15	0,2	0,52	1,8	2,6	1,24
22.	Д-1	0,3	0,47	0,5	0,2	0,3
23.	ЗОХГСА	0,75	1,05	1,45	0,33	0,32
24.	СтЗ	0,25	0,36	∞	0,365	∞
25.	СтЮ	0,3	0,67	2,67	0,803	1,38
26.	40Х13	0,35	0,84	3,3	0,875	1,37
27.	АВ	1,25	2,25	3,5	0,59	0,44
28.	ЛС62	0,45	1,1	1,5	0,894	0,31
29.	Ст45	0,15	0,4	1,1	0,981	1,01
30.	Д16Т	0,08	0,42	0,9	1,66	0,762
31.	Х18Н9Т	0,38	0,76	1,6	0,693	0,744
32.	Ст20	0,32	0,62	1,23	0,66	0,685
33.	АМГ5В	0,735	1,0	1,25	0,31	0,223
34.	Д16	0,875	1,25	1,625	0,36	0,262
35.	Ст35	0,25	0,534	1,63	0,76	1,12
36.	Л62	0,4	0,59	1,75	0,39	1,09
37.	У8А (2 партія)	0,255	0,39	1,2	0,425	1,12
38.	Д16 (2 партія)	0,10	0,41	1,5	1,46	1,30
39.	Ст20 (2 партія)	0,3	0,65	1,25	0,773	0,654
40.	Ст10 (2 партія)	0,32	0,65	1,42	0,710	0,780
41.	Ст38Х2МЮА	0,55	0,75	1,30	0,30	0,551
42.	Ст38Х2МЮА термооброблена	0,485	0,74	1,00	0,42	0,30
43.	Ст30Х3МФА	0,74	0,85	1,13	0,14	0,28
44.	Ст30Х3МФА термооброблена	0,74	0,85	1,13	0,11	0,92

ДОДАТОК Д

Значення коефіцієнтів концентрації напружень при згині та крученні



$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$$

D/d	r/d	Коефіцієнт концентрації напружень при згині K_G $\sigma_M, \text{МПа}$			Коефіцієнт концентрації напружень при крученні K_τ $\sigma_M, \text{МПа}$		
		≤ 500	800	≥ 1000	≤ 500	800	≥ 1000
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,48	1,57	1,63	1,15	1,18	1,20
	0,10	1,28	1,33	1,36	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,20	1,23	1,25	1,06	1,08	1,09
	0,2	1,16	1,20	1,22	1,05	1,06	1,07
1,1	0,02	2,00	2,24	2,47	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,64	1,70	1,75	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,37	1,42	1,45	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,27	1,31	1,34	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,20	1,24	1,27	1,06	1,08	1,10
1,25	0,02	2,12	2,68	3,10	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,81	1,97	2,10	1,40	1,45	1,48
	0,10	1,47	1,54	1,60	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,36	1,40	1,43	1,15	1,20	1,24
	0,20	1,30	1,32	4,34	1,09	1,13	1,16
1,5	0,02	2,42	-	-	1,76	1,97	2,14
	0,05	1,91	2,06	2,20	1,48	1,56	1,62
	0,10	1,53	1,61	1,67	1,24	1,32	1,38
	0,15	1,38	1,44	1,48	1,19	1,25	1,29
	0,20	1,33	1,36	1,38	1,10	1,18	1,24

ДОДАТОК Е

Значення коефіцієнта впливу абсолютних розмірів ($\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$) у залежності від діаметра деталі і матеріалу

Матеріал	$\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$ при d , мм.							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Вуглецева сталь $\sigma_M = 400 \dots 500$ МПа	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Вуглецева і легована сталь $\sigma_M = 500 \dots 800$ МПа	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легована сталь $\sigma_M = 800 \dots 1200$ МПа	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легована сталь $\sigma_M = 1200 \dots 1400$ МПа	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

ДОДАТОК Ж

Значення величин $1/\beta$ для сталевих деталей у залежності від способу обробки

Клас шорсткості поверхні	Позначення R_a , мкм	Спосіб обробки	σ_M , МПа			
			500	700	900	1200
3,4,5	20;10;5	Обдирка	1,20	1,25	1,35	1,50
6,7,8	2,5;1,25;0,63	Обточка	1,05	1,10	1,15	1,25
9,10	0,32;0,16	Шліфівка	1,00	1,00	1,00	1,00

ДОДАТОК 3

Механічні характеристики конструкційних сталей

Марка сталі	σ_M	σ_Y	τ_Y	Відносне видовження $\delta, \%$	Ударна в'язкість КС, кДж/м ²	Границя витривалості, МПа		
	не менше					Згин, σ_{-1}	Розтяг-стиск, σ_{-1p}	Кручення, τ_{-1}
	МПа							
10	340	210	140	31	2400	160-220	120-150	80-120
20	420	250	160	25	-	170-220	120-160	100-130
25	460	280	-	23	900	190-250	-	-
30	500	300	170	21	800	200-270	170-210	110-140
35	540	320	190	20	700	220-300	170-220	130-180
40	580	340	-	10	600	230-320	180-240	140-190
45	610	360	220	16	500	250-340	190-250	150-200
50	640	380	-	14	400	270-350	200-260	160-210
55	660	390	-	13	-	-	-	-
60	690	410	-	12	-	310-380	220-280	180-220
20Г	460	280	-	24	-	-	-	-
30Г	550	320	-	20	800	220-320	-	-
50Г	660	400	-	13	400	290-360	-	-
20Х	800	650	-	11	600	380	-	170-320
40Х	1000	800	-	10	600	350-380	250	225
45Х	1050	850	-	9	500	400-500	-	-
30ХМ	950	750	-	11	800	310-410	370	230
35ХМ	1000	850	-	12	800	470-510	-	-
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	-	9	500	550	-	-
40ХФА	900	750	-	10	900	380-490	-	-
38ХМЮА	1000	850	-	14	900	420-550	-	-
12ХН3А	950	700	400	11	900	390-470	270-320	220-260
20ХН3А	950	750	-	12	1000	430-450	300-320	245-255
30ХН3А	1000	800	-	10	800	520-700	-	320-400
40ХНМА	1000	950	-	12	1000	500-700	-	270-380
30ХГСА	1100	850	-	10	500	510-540	500-535	220-245

Примітка: При використанні сталей за ГОСТ 380-71 необхідно врахувати приблизну відповідність марок: Ст. 3 відповідає сталі 20; Ст. 4 – сталі 25; Ст. 5 – сталі 35; Ст. 6 – сталі 45.

ДОДАТОК К

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, МПа				Твердість за Бринелем НВ	Границя витривалості, МПа	
	При розтягу $\sigma_{\text{мр}}$	При стиску $\sigma_{\text{мс}}$	При згині $\sigma_{\text{м}}$	При крученні $\tau_{\text{м}}$		Згин σ_{-1}	Кручення τ_{-1}
СЧ12	120	500	280	-	143-229	-	-
СЧ15	150	650	320	240	163-229	70	50
СЧ18	180	700	360	-	170-229	-	-
СЧ21	210	750	400	280	173-241	100	80
СЧ24	240	850	440	300	187-217	120	100
СЧ28	280	1000	480	350	170-241	140	110
СЧ32	320	1100	520	390	187-255	140	110
СЧ35	350	1200	560	400	198-269	160	115
СЧ38	380	1400	600	460	207-269	150	115
ВЧ40-10	400	1600-1700	-	480-510	156-197	250-280	198
ВЧ50-1,5	500	1860-2000	-	740-790	187-255	200-220	170-210
ВЧ60-2	600	2040-2290	-	660-810	197-269	170-230	150-160

ДОДАТОК Л

Орієнтовані значення основних допустимих напружень на розтяг та стиск

Матеріал	Допустимі напруження, МПа	
	На розтяг	На стиск
Чавун сірий	28-30	120-150
Сталь Ст.2	140	
Ст.3	160	
машинобудівельна (конструкційна) -вуглецева	60-250	
машинобудівельна (конструкційна) -легована	100-400 і більше	
Мідь	30-120	
Латунь	70-140	
Бронза	60-120	
Алюміній	30-80	
Алюмінієва бронза	80-120	
Дюралюміній	80-150	
текстоліт	30-40	

ДОДАТОК М

Допустимі напруження на зріз для заклепкових та зварних з'єднань

Тип з'єднання	Напруження на зріз, МПа
Заклепкове:	
Основні елементи із сталі 20	100
- заклепка у розсвердлених отворах (клас В);	140
- заклепка у протиснених (клас С)	100
Зварне:	
- зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою	80
- зварювання ручне, електроди з товстою обмазкою	110
- автоматичне зварювання	110

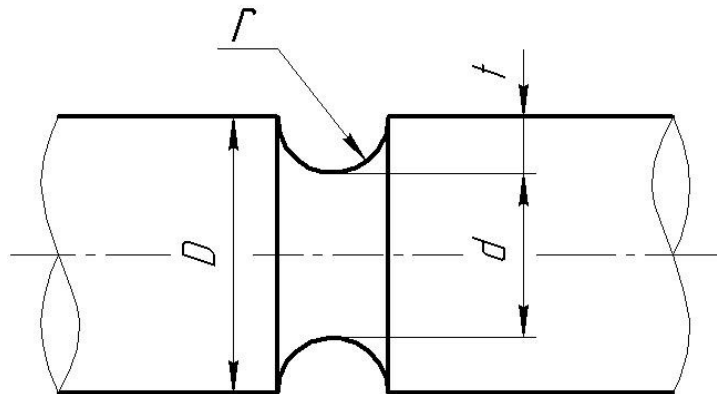
ДОДАТОК Н

Модулі пружності і коефіцієнт Пуассона

Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона, μ
	E	G	
Чавун сірий, білий	$(1.15-1.60) \times 10^5$	4.5×10^4	0.23-0.27
Чавун ковкий	1.55×10^5	-	-
Сталі вуглецеві	$(2.0 - 2.1) \times 10^5$	$(8.0-8.1) \times 10^4$	0.24-0.28
Сталі леговані	$(2.1 - 2.2) \times 10^5$	$(8.0-8.1) \times 10^4$	0.25-0.30
Мідь прокатана	1.1×10^5	4.0×10^4	0.31-0.34
Мідь холодно тягнута	1.3×10^5	4.9×10^4	-
Мідь лита	0.84×10^5	-	-
Бронза фосфориста катана	1.15×10^5	4.2×10^4	0.32-0.35
Бронза марганцевиста катана	1.1×10^5	4.0×10^4	0.35
Бронза алюмінієва лита	1.06×10^5	4.2×10^4	-
Латунь холодно тягнута	$(0.91-0.99) \times 10^5$	$(3.5-3.7) \times 10^4$	0.32-0.42
Латунь катана	1.0×10^5	-	0.36
Дріт алюмінієвий тягнутий	0.7×10^5	-	-
Дюралюміній катаний	0.71×10^5	2.7×10^4	-
Цинк катаний	0.84×10^5	3.2×10^4	0.27
Свинець	0.17×10^5	0.70×10^4	0.42
Скло	0.56×10^5	22×10^4	0.25
Граніт	0.49×10^5	-	-
Каучук	0.00008×10^5	-	0.47
Текстоліт	$(0.06-0.1) \times 10^5$	-	-
Гетинакс	$(0.1-0.17) \times 10^5$	-	-

ДОДАТОК П

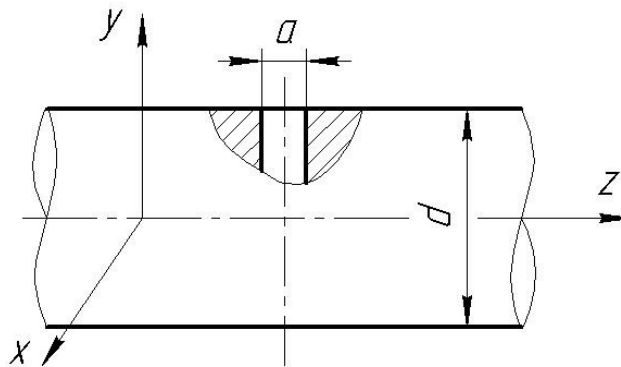
**Ефективні коефіцієнти концентрації напружень
для сталевих валів з виточками**



$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$$

t/r	r/d	Коефіцієнт концентрації напружень при згині K_σ, σ_m , МПа			Коефіцієнт концентрації напружень при крученні K_τ, σ_m , МПа		
		≤ 500	800	≥ 1000	≤ 500	800	≥ 1000
0,5	0,02	1,77	2,02	2,22	1,46	1,61	1,73
	0,05	1,72	1,87	1,98	1,43	1,52	1,60
	0,10	1,59	1,69	1,77	1,36	1,42	1,46
	0,15	1,45	1,53	1,59	1,27	1,32	1,36
	0,20	1,37	1,41	1,45	1,22	1,25	1,27
1,0	0,02	1,85	2,12	2,35	1,51	1,67	1,81
	0,05	1,80	1,96	2,10	1,48	1,58	1,66
	0,10	1,65	1,76	1,85	1,39	1,47	1,51
	0,15	1,50	1,58	1,65	1,30	1,35	1,39
	0,20	1,45	1,48	1,50	1,27	1,29	1,30
2,0	0,02	1,92	2,21	2,46	1,56	1,73	1,87
	0,05	1,86	2,03	2,19	1,51	1,62	1,71
	0,10	1,70	1,82	1,92	1,42	1,50	1,56
	0,15	1,54	1,63	1,7	1,33	1,38	1,42
	0,20	1,48	1,52	1,54	1,29	1,30	1,32

**Ефективні коефіцієнти концентрації напружень
для циліндричних деталей з поперечними отворами**

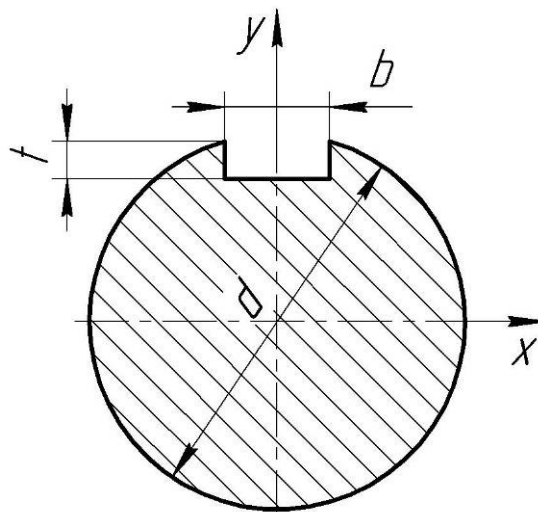


$$W = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{ad^2}{6}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \frac{a}{d}\right)$$

Характер навантаження	a/d	Границя міцності $\sigma_m, \text{МПа}$			
		500	600	800	1000
Згин	0,05-0,10	1,90	1,95	2,05	2,15
	0,15-0,25	1,74	1,77	1,86	1,95
Кручення	0,05-0,25	1,75	1,78	1,83	1,92

ДОДАТОК С

**Ефективні коефіцієнти концентрації напружень
для сталевих валів зі шпоночними канавками**



$$W = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$$

Характер навантаження	Границя міцності $\sigma_m, \text{МПа}$					
	500	600	700	800	900	1000
Згин K_σ	1,5	1,6	1,72	1,8	1,9	2,0
Кручення K_τ	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9

ДОДАТОК Т

**Ефективні концентратори напружень K_σ
для різьбового з'єднання типу "болт-гайка"**

Тип різьби	Вуглецева сталь	Легована сталь
Різьба метрична	3-4	4-5
Різьба Вітворта	3-4,5	4-5,5

ДОДАТОК У

**Ефективні концентратори напружень K_σ
для сталевий штаби з поперечним отвором**

$\sigma_m, \text{МПа}$	Розтяг	Згин
400	1,4	1,3
800	1,8	1,6
1200	2,0	1,8

$a/b=0.05 \dots 0.30$. В-ширина штаби, а-діаметр отвору

Номінальні напруження: $\sigma = \frac{F}{A_{\text{НЕТТО}}}$, $\sigma = \frac{M}{W_{\text{НЕТТО}}}$.

ДОДАТОК Ф

**Значення коефіцієнта впливу абсолютних розмірів ($\epsilon_0 \approx \epsilon_\tau$)
у залежності від діаметра деталі й матеріалу**

Матеріал	$\epsilon_0 \approx \epsilon_\tau$, при d, мм							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Вуглецева сталь $\sigma_m=400-500\text{МПа}$	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Вуглецева сталь і легована сталь $\sigma_m=400-500\text{МПа}$	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легована сталь $\sigma_m=800-1200\text{МПа}$	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легована сталь $\sigma_m=1200-1400\text{МПа}$	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

ДОДАТОК Х

**Значення величини $1/\beta$ для сталевих деталей
у залежності від способу оброблення**

Клас шорсткості поверхні	Позначення R_a , мкм	Спосіб оброблення	$\sigma_m, \text{МПа}$			
			500	700	900	1200
3, 4, 5	20; 10; 5	Обдирання	1,2	1,25	1,35	1,5
6, 7, 8	2,5; 1,25; 0,63;	Обточування	1,05	1,1	1,15	1,25
9, 10	0,32; 0,16	Шліфування	1,0	1,0	1,0	1,0

ДОДАТОК Ц

Коефіцієнти $\psi_\sigma^i \psi_\tau$ чутливості сталі до асиметрії циклу

$\sigma_m, \text{МПа}$	350-250	520-720	720-1000	1000-1200	1200-1400
ψ_σ	0	0,05	0,1	0,2	0,25
ψ_τ	0	0	0,05	0,1	0,15

ДОДАТОК Ш

Коефіцієнт $K_\sigma / \varepsilon_\sigma$ при згині і $K_\tau / \varepsilon_\tau$ при крученні для сталевих валів біля країв напресованих деталей

Діаметр вала, мм	Посадка	$K_\sigma / \varepsilon_\sigma$ при $\sigma_m, \text{МПа}$						$K_\tau / \varepsilon_\tau$ при $\sigma_m, \text{МПа}$					
		50	60	70	80	90	100	50	60	70	80	90	100
≤ 30	H7 (s6)	2.5 0	2.7 5	3.0	3.2 5	3.5 0	3.7 5	1.9 0	2.0 5	2.2 0	2.3 5	2.5 0	2.65
	H7 (k6)	1.8 8	2.0 6	2.2 5	2.4 4	2.6 3	2.8 2	1.5 8	1.6 4	1.7 5	1.8 6	1.9 8	2.09
	H7 (h6)	1.6 3	1.7 9	1.9 5	2.1 1	2.3 8	2.4 4	1.3 8	1.4 7	1.5 7	1.6 7	1.7 7	1.86
50	H7 (s6)	3.0 5	3.3 6	3.6 6	3.9 6	4.2 8	4.6 0	2.2 3	2.5 2	2.6 0	2.7 8	3.0 7	3.26
	H7 (k6)	2.2 8	2.5 2	2.7 5	2.9 7	3.2 0	3.4 5	1.8 7	2.0 3	2.1 5	2.2 8	2.4 2	2.57
	H7 (h6)	1.9 8	2.1 8	2.3 8	2.5 7	2.7 8	3.0 0	1.6 0	1.7 1	1.8 3	1.9 5	2.0 7	2.20
≥ 100	H7 (s6)	3.2 9	3.6 0	3.9 4	4.2 5	4.6 0	4.9 0	2.3 7	2.5 6	2.7 6	2.9 5	3.1 6	3.34
	H7 (k6)	2.4 6	2.7 0	2.9 6	3.2 0	3.4 6	3.9 8	1.8 8	2.0 4	2.1 8	2.3 2	2.4 8	2.80
	H7 (h6)	2.1 3	2.3 4	2.5 6	2.7 6	3.0 0	3.1 8	1.6 8	1.8 3	1.9 4	2.0 6	2.2 0	2.31

Огородніков Віталій Антонович,
Грушко Олександр Володимирович,
Перлов Віктор Євгенійович

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА. СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Навчальний посібник
для студентів напрямку підготовки 6.050702 “Електромеханіка”
денної та заочної форм навчання

Оригінал-макет підготовлено В. Є. Перловим

Видавництво ВНТУ “УНІВЕРСУМ–Вінниця”
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95 ВНТУ, ГНК, к.114
Тел. (0432) 44-05-32

Підписано до друку
Формат 29,7 x 42 ¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різнографічний Ум. друк. арк.
Наклад прим. Зам №

Віддруковано в комп’ютерному інформаційно- видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
Серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95