

## ОГЛЯД МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН

**В.Ю.Кучерук**

Вінницький державний технічний університет

На початку 30-х років в працях Е.Арнольда, Р.Ріхтера, М.Відмара, К.О.Круга та інших вчених була створена теорія усталених режимів роботи ЕМ.

Одна із перших робіт по перехідним процесам – це робота Р.Рюденберга. Теорія перехідних процесів, яка зародилась на початку 20-го століття, отримала бурхливий розвиток в 60-80-ті роки завдяки широкому використанню обчислювальної техніки.

Перші роботи по математичній теорії електричних машин (ЕМ) появились усередині 20-40-х років. До них відносяться роботи Р.Парка, О.О.Горєва, Г.Крона, Г.М.Петрова. Фундаментальними роботами по математичній теорії ЕМ є роботи Г.Крона, який запропонував модель і рівняння узагальненої ЕМ.

В останні роки зусиллями багатьох вчених (Б.Адкінс, І.О.Глебов, Г.О.Сипайлов, Е.Я.Казовський, С.В.Страхов, В.В.Хрущев, І.П.Копилов, В.Й.Чабан, Ю.І.Чучман) математична теорія ЕМ розвилась досить глибоко. Використання обчислювальної техніки дозволило аналізувати усталені процеси як окремі випадок перехідних процесів.

Історія розвитку електромеханіки свідчить про існування кількох підходів до математичного моделювання ЕМ (рис. 1) [1-14]: *на базі теорії поля* (рівняння Максвелла); *на базі теорії кіл* (рівняння Кірхгофа); *комбінований* (рівняння Максвелла та Кірхгофа); *на базі окремих фізичних законів* (рівняння Лагранжа 2-го роду).

Найбільш досконалим та поширеним є комбінований підхід, в якому поєднуються рівняння поля та рівняння кіл, коли виходячи з картин поля у повітряному зазорі ЕМ, записують рівняння напруг, а через струми чи поточкостягнення – рівняння електромагнітного моменту.

У цьому випадку ЕМ представляється як ідеалізований симетричний електромагнітний перетворювач енергії (багатополосник), що має рівний повітряний зазор, сталеві ділянки із нульовим магнітним опором, синусні обмотки (рис. 2).

ЕМ як багатополосник має два електричних виводи, які характеризуються напругою  $U$  і частотою  $f$ , трьома механічними виводами з моментом на валу  $M_{em}$ , швидкістю обертання  $\omega_r$  та моментом механічних втрат  $M_0$ .

Диференціальні рівняння ЕМ можливо записати в кількох різних формах. Найбільш поширеною формою запису диференціальних рівнянь для ЕМ (зокрема асинхронної машини) є система координат  $\alpha, \beta, 0$  [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} = U_{s\alpha} - i_{s\alpha} R_{s\alpha}; \\ \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} = U_{s\beta} - i_{s\beta} R_{s\beta}; \\ \frac{d\psi_{r\alpha}}{dt} = U_{r\alpha} - i_{r\alpha} R_{r\alpha} - \omega_r \psi_{r\beta}; \\ \frac{d\psi_{r\beta}}{dt} = U_{r\beta} - i_{r\beta} R_{r\beta} - \omega_r \psi_{r\alpha}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta}, \psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$  - потокозчеплення статора і ротора в координатах  $\alpha, \beta, 0$ ;  $U_{s\alpha}, U_{s\beta}, U_{r\alpha}, U_{r\beta}$  - проєкції напруг статора і ротора на вісі координат  $\alpha, \beta, 0$ ;  $i_{s\alpha}, i_{s\beta}, i_{r\alpha}, i_{r\beta}$  - струми в обмотках статора і ротора;  $R_{s\alpha}, R_{s\beta}, R_{r\alpha}, R_{r\beta}$  - активні опори статора і ротора;  $\omega_r$  - кутова швидкість обертання ротора.

Потокозчеплення в (1) зображуються у вигляді:

$$\begin{cases} \Psi_{s\alpha} = L_{s\alpha} i_{s\alpha} + L_m i_{r\alpha}; \\ \Psi_{s\beta} = L_{s\beta} i_{s\beta} + L_m i_{r\beta}; \\ \Psi_{r\alpha} = L_{r\alpha} i_{r\alpha} + L_m i_{s\alpha}; \\ \Psi_{r\beta} = L_{r\beta} i_{r\beta} + L_m i_{s\beta}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $L_{s\alpha}, L_{s\beta}, L_{r\alpha}, L_{r\beta}$  - індуктивності в обмотках статора і ротора;  $L_m$  - взаємна індуктивність між обмотками статора і ротора.

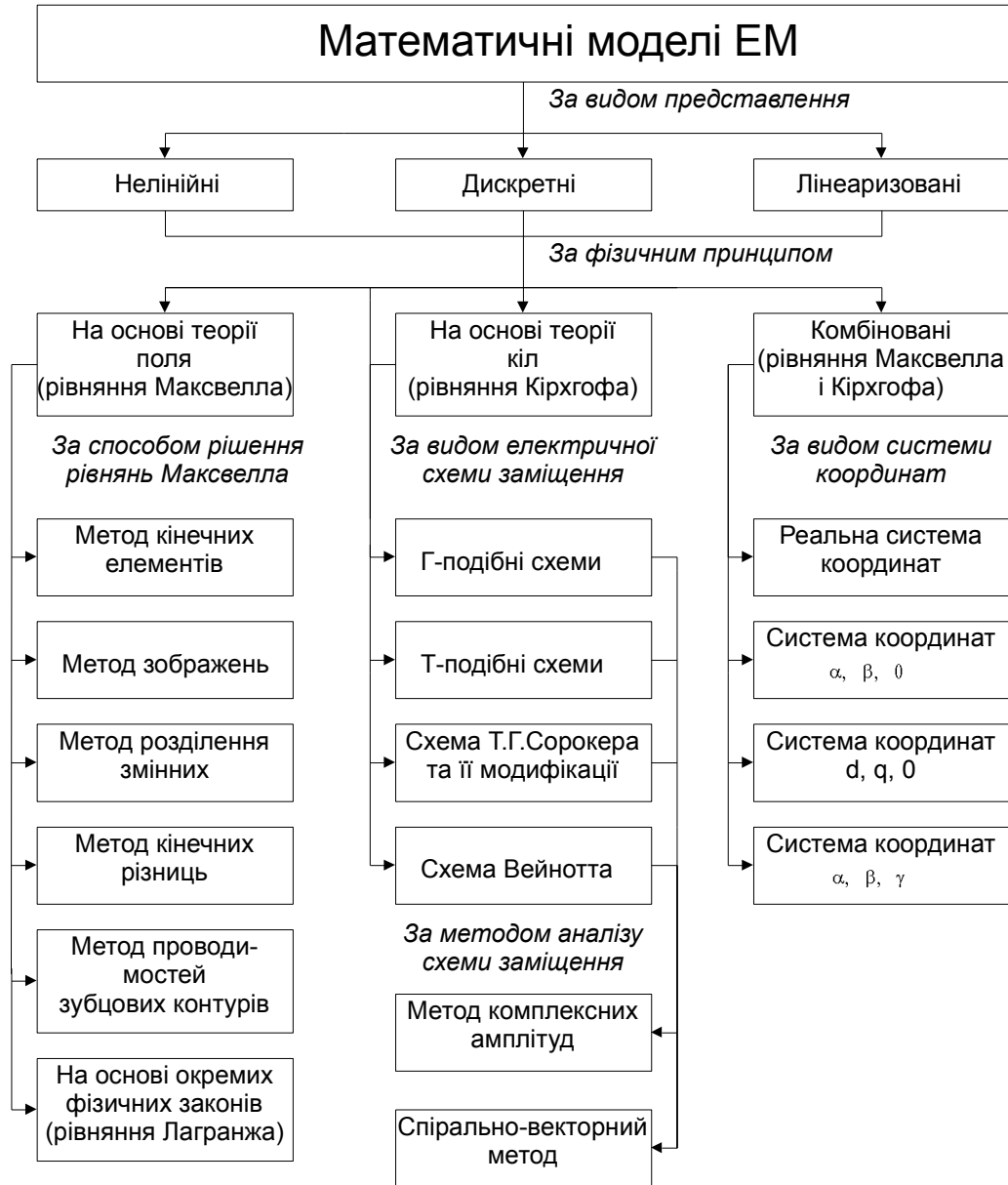


Рис. 1. Класифікація математичних моделей ЕМ

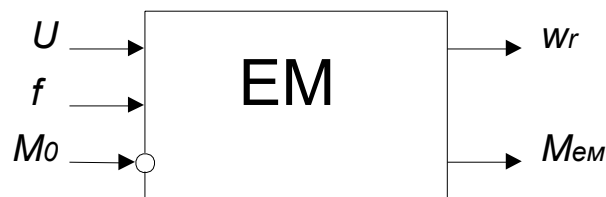


Рис. 2. ЕМ як електромеханічний багатополіусник

Дану математичну модель було вибрано як базу для проведення подальших досліджень.

Приймаючи узвичаєні допущення  $L_s = L_{s\alpha} = L_{s\beta}$ ;  $L_r = L_{r\alpha} = L_{r\beta}$ ;  $R_s = R_{s\alpha} = R_{s\beta}$ ;

$R_r = R_{r\alpha} = R_{r\beta}$  і підставивши (2) в (1), отримаємо:

$$\begin{cases} U_{s\alpha} = R_{s\alpha} i_{s\alpha} + \frac{d}{dt}(L_s i_{s\alpha}) + \frac{d}{dt}(L_m i_{r\alpha}); \\ U_{s\beta} = R_{s\beta} i_{s\beta} + \frac{d}{dt}(L_s i_{s\beta}) + \frac{d}{dt}(L_m i_{r\beta}); \\ U_{r\alpha} = R_{r\alpha} i_{r\alpha} + \frac{d}{dt}(L_r i_{r\alpha}) + \frac{d}{dt}(L_m i_{r\alpha}) + \omega_r (L_r i_{r\beta} + L_m i_{s\beta}); \\ U_{r\beta} = R_{r\beta} i_{r\beta} + \frac{d}{dt}(L_r i_{r\beta}) + \frac{d}{dt}(L_m i_{r\beta}) - \omega_r (L_r i_{r\alpha} + L_m i_{s\alpha}). \end{cases} \quad (3)$$

Розглядаючи ЕМ як асинхронну машину (АМ) із короткозамкненим ротором ( $U_{r\alpha} = U_{r\beta} = 0$ )

та як систему із зосередженими параметрами, можна записати:

$$\begin{cases} U_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + L_s \frac{d}{dt} i_{s\alpha} + L_m \frac{d}{dt} i_{r\alpha}; \\ U_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + L_s \frac{d}{dt} i_{s\beta} + L_m \frac{d}{dt} i_{r\beta}; \\ 0 = R_r i_{r\alpha} + L_r \frac{d}{dt} i_{r\alpha} + L_m \frac{d}{dt} i_{r\alpha} + \omega_r (L_r i_{r\beta} + L_m i_{s\beta}); \\ 0 = R_r i_{r\beta} + L_r \frac{d}{dt} i_{r\beta} + L_m \frac{d}{dt} i_{r\beta} - \omega_r (L_r i_{r\alpha} + L_m i_{s\alpha}). \end{cases} \quad (4)$$

Провівши відповідні математичні перетворення, можна записати систему рівнянь (4) в матричній формі:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} L_r (U_{s\alpha} - R_s i_{s\alpha}) + L_m (R_r i_{r\alpha} + \omega_r (L_r i_{r\beta} + L_m i_{s\beta})) \\ L_r (U_{s\beta} - R_s i_{s\beta}) + L_m (R_r i_{r\beta} - \omega_r (L_r i_{r\alpha} + L_m i_{s\alpha})) \\ -L_m (U_{s\alpha} - R_s i_{s\alpha}) - L_s (R_r i_{r\alpha} + \omega_r (L_r i_{r\beta} + L_m i_{s\beta})) \\ -L_m (U_{s\beta} - R_s i_{s\beta}) - L_s (R_r i_{r\beta} - \omega_r (L_r i_{r\alpha} + L_m i_{s\alpha})) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де  $k = \frac{1}{L_s L_r - L_m^2}$ .

Рівняння руху ротора АМ має вигляд:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{p}{J} (M_e - M_0), \quad (6)$$

де  $M_e$  – електромагнітний момент АМ:

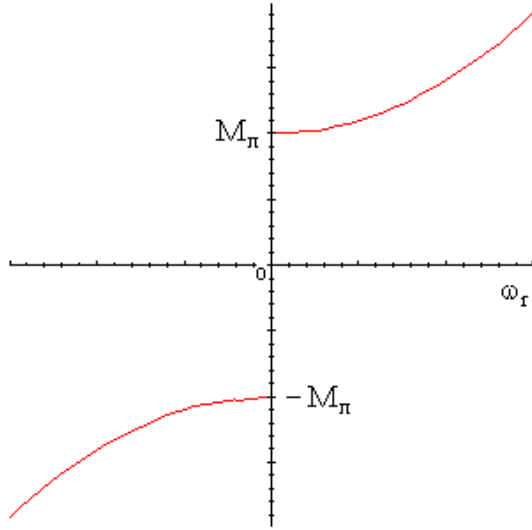
$$M_e = \frac{mp}{2} L_m (i_{s\beta} i_{r\alpha} - i_{s\alpha} i_{r\beta}); \quad (7)$$

$M_0$  – момент опору на валу;  $J$  – момент інерції ротора;  $m$  – кількість фаз;  $p$  – кількість пар полюсів.

У широкому діапазоні кутових швидкостей момент опору (тертя у підшипниках та аеродинамічний опір)  $M_0$  зв'язаний із  $\omega_r$  нелінійною залежністю [15]:

$$M_0(\omega_r) = \text{sgn}(\omega_r) \cdot \left[ M_{\Pi} + (M_{\text{НОМ}} - M_{\Pi}) \cdot \left( \frac{\omega_r}{\omega_{\text{НОМ}}} \right)^2 \right], \quad (8)$$

де  $M_{\Pi}$  – пусковий момент;  $M_{\text{НОМ}}$  – момент опору при номінальному навантаженні;  $\omega_{\text{НОМ}}$  – номінальна кутова швидкість;  $\text{sgn}(\dots)$  – функція знаку аргумента (рис. 3).



**Рис. 3. Залежність моменту опору  $M_0$  від кутової швидкості  $\omega_r$**

Проте при проведенні моделювання ЕМ рівняння (8) практично не враховується, хоча момент механічних втрат суттєво впливає на динамічні характеристики ЕМ.

Таким чином, математична модель АМ запишеться у вигляді:

$$\begin{cases}
 \frac{di_{s\alpha}(t)}{dt} = k \cdot [L_r (U_{s\alpha}(t) - R_s i_{s\alpha}(t)) + L_m (R_r i_{r\alpha}(t) + \omega_r(t) (L_r i_{r\beta}(t) + L_m i_{s\beta}(t)))]; \\
 \frac{di_{s\beta}(t)}{dt} = k \cdot [L_r (U_{s\beta}(t) - R_s i_{s\beta}(t)) + L_m (R_r i_{r\beta}(t) - \omega_r(t) (L_r i_{r\alpha}(t) + L_m i_{s\alpha}(t)))]; \\
 \frac{di_{r\alpha}(t)}{dt} = k \cdot [-L_m (U_{s\alpha}(t) - R_s i_{s\alpha}(t)) - L_s (R_r i_{r\alpha}(t) + \omega_r(t) (L_r i_{r\beta}(t) + L_m i_{s\beta}(t)))]; \\
 \frac{di_{r\beta}(t)}{dt} = k \cdot [-L_m (U_{s\beta}(t) - R_s i_{s\beta}(t)) - L_s (R_r i_{r\beta}(t) - \omega_r(t) (L_r i_{r\alpha}(t) + L_m i_{s\alpha}(t)))]; \\
 \frac{d\omega_r(t)}{dt} = \frac{p}{J} \cdot (M_{em}(t) - M_0(\omega_r(t))); \quad k = \frac{1}{L_s L_r - L_m^2}; \\
 M_{em}(t) = \frac{mp}{2} \cdot L_m (i_{s\beta}(t) i_{r\alpha}(t) - i_{r\beta}(t) i_{s\alpha}(t)),
 \end{cases} \quad (9)$$

де  $U_{s\alpha}(t) = \sqrt{2}U_m \cos(\omega t)$ ;  $U_{s\beta}(t) = \sqrt{2}U_m \sin(\omega t)$ ;  $U_m$  - напруга мережі живлення;  $\omega$  - кругова частота мережі живлення.

Система (9) представляє собою систему жорстких нелінійних диференціальних рівнянь, розв'язок яких можна отримати лише чисельними методами, наприклад, методом Рунге-Кутта із змінним кроком інтегрування в середовищі символічної математики Maple V4 [16] (рис. 4).

Розв'язок системи (9) дозволяє отримати також енергетичні характеристики ЕМ (рис. 4):

- втрати в обмотках статора  $Q_s(t) = R_s (i_{s\alpha}(t) + i_{s\beta}(t))^2$ ;
- втрати в обмотках ротора  $Q_r(t) = R_r (i_{r\alpha}(t) + i_{r\beta}(t))^2$ ;
- електромагнітна потужність  $P_{em}(t) = \omega_r(t) \cdot M_{em}(t)$ ;
- потужність в обмотках статора  $P_s(t) = P_{em}(t) + Q_s(t)$ ;
- потужність, що передана на ротор  $P_r(t) = P_{em}(t) - Q_r(t)$ ;
- ККД ЕМ  $\eta(t) = \frac{P_r(t)}{P_s(t)}$ .

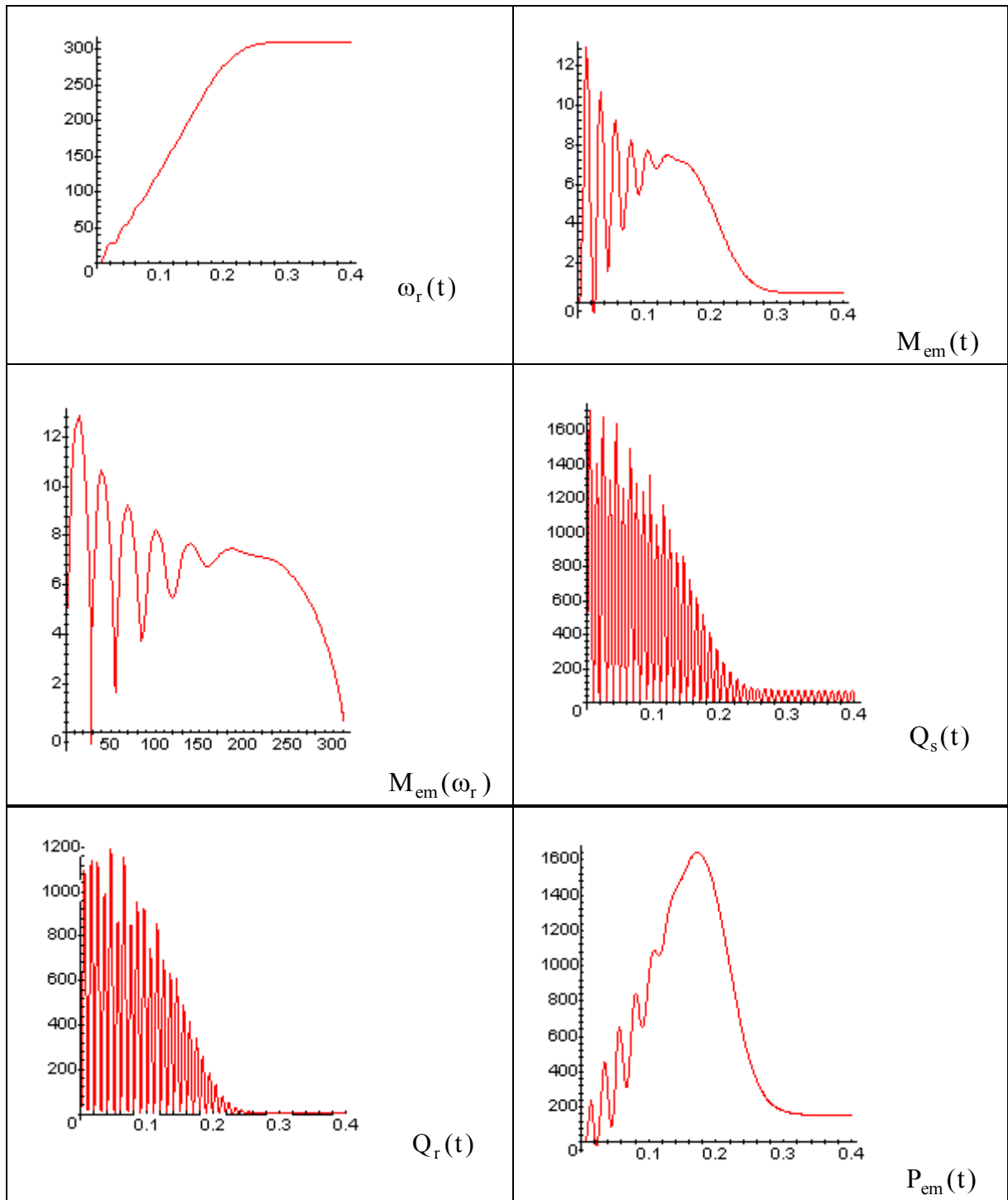


Рис. 4. Результати моделювання асинхронної машини типу 4A71A4

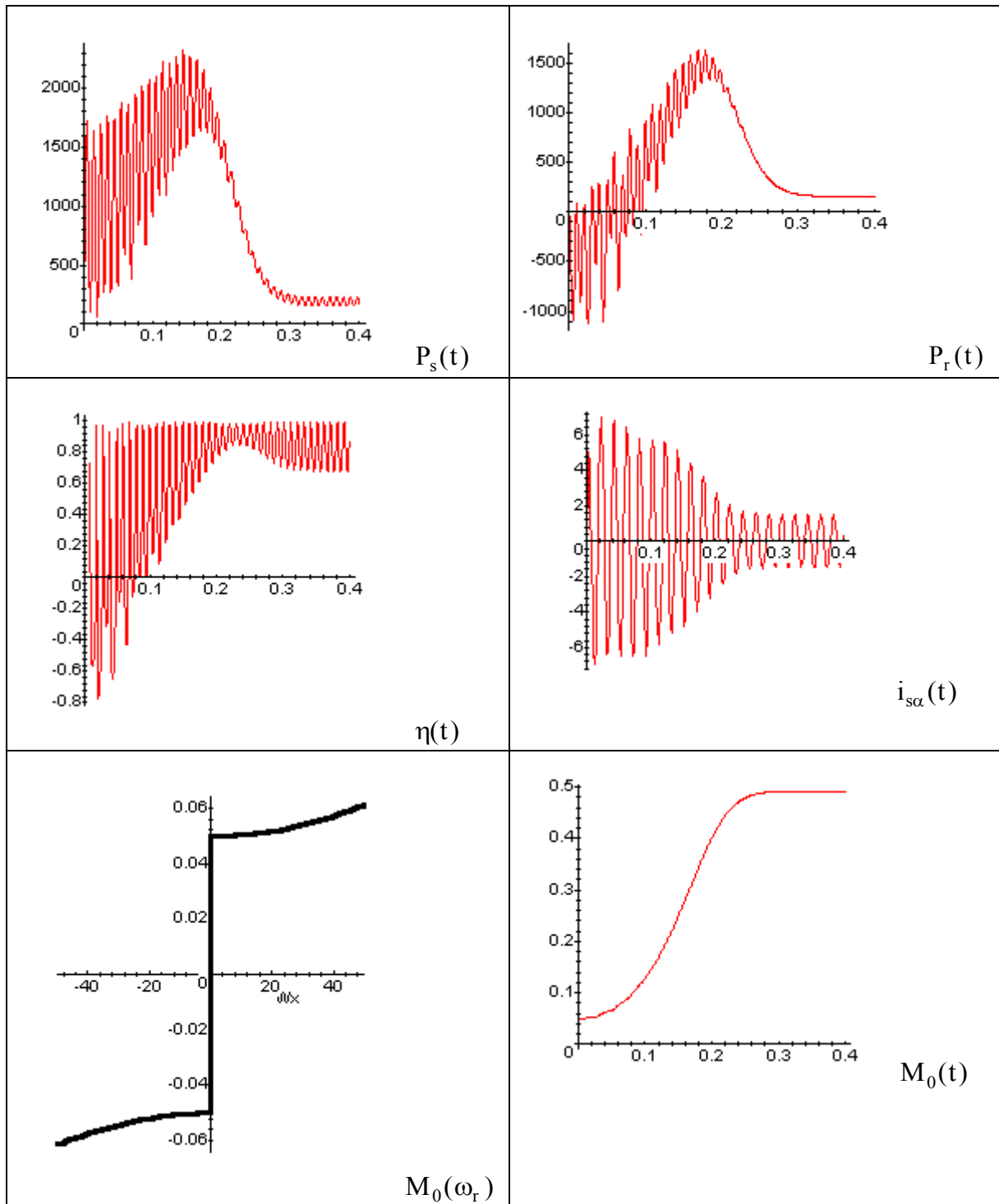


Рис. 4. Продовження

#### Висновки

1. Проведено систематизацію та запропонована узагальнена класифікація математичних моделей електричних машин.
2. При моделюванні електричних машин запропоновано враховувати момент механічних втрат у функції кутової швидкості обертання (8).
3. Показано, що при моделюванні електричних машин можна також отримати їх динамічні енергетичні характеристики, які можуть використовуватися для оцінки їх стану.

## Література

1. Alexandrovitz A. Digital simulation of induction motor represented through space phasors. //Conf.Elec.and Electron. Eng. Is Israel, Tel-Aviv, Apr. 7-9, 1987.
2. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин.-М.: Высш.шк., 1987.-248с.
3. Коробейников Б.А., Ищенко А.И., Тадессе М. Исследование переходных процессов в симметричных асинхронных двигателях с помощью обобщенного вектора.//Электромеханика, 1985, №4, с.31-34.
4. Чабан В.И., Белый Л.А. Единая математическая модель синхронной и асинхронной машин как элементов системы. //Изв. вузов. Электромеханика, 1984, №3, с.24-28.
5. Малиновский А.Е., Галюко В.В. Дифференциальные уравнения несимметричного асинхронного двигателя, не содержащие периодических коэффициентов.//Электричество, 1981, №7, с.64-66.
6. Сторожко С.П. Расчет переходных электромагнитных процессов в асинхронном двигателе с индукционными сопротивлениями в цепи ротора.//Изв.вузов.Электромеханика, 1980, №1, с.66-72.
7. Домбровский В.В., Зайчик В.М. Асинхронные машины: Теория, расчет, элементы проектирования.-Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990.-368с.
8. Чучман Ю.И. Многоцелевая математическая модель электрической машины.//Электротехника, 1990, №9, с.26-29.
9. Сипайлов Г.А., Кононенко Е.В., Хорьков К.А. Электрические машины (специальный курс).-М.: Высш.шк., 1987.
10. J.Roger Folch, V.J.Lasaro Joares Modelling of induction motors in transient operation using finite element method./ Int. Conf. «Electrical Drives and Power Electronics» EDPE'96, Proceeding volumes 1, the High Tatras, Slovakia, pp.221-226.
11. Сакая Ямамура Спирально-векторная теория электрических машин переменного тока. //Электротехника, 1996, №10, с.7-15.
12. М.Менаа, О.Тухами, М.Бенхаддди, Р.Ибтиуен Analysis of induction motor by a spiral vector theory.// Second Int. Scientific Conf. «Unconventional Electromechanical and Electrotechnical Systems» UEES'96, Proceeding volumes 2, 1996, Szczecin, Poland, pp.527-532.
13. Трещев И.И. Исследование динамических режимов в машинах переменного тока по переходным функциям. //Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1991, №2, с.46-50.
14. Арменский Е.В., Кузина И.В., Фалк Г.Б. Электромашинные устройства автоматики.- М.: Высш. шк., 1986.-247с.
15. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах.- М.: Высш.шк., 1985.-536с.
16. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. – М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 1998.- 240с.

УДК 621.317

**Обзор методов математического моделирования электрических машин / В.Ю.Кучерук//**  
Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.-1999.-№ ,С.

Проведено систематизацию и предложена обобщённая классификация математических моделей электрических машин. При моделировании электрических машин предложено учитывать момент механических потерь в функции угловой скорости вращения. Показано, что при моделировании электрических машин можно также получить их динамические энергетические характеристики, которые могут использоваться для оценки их состояния.

**The review of methods of mathematical simulation of electrical machines / V.Y.Kucheruk // МСТТР.-**  
1999.- № .-Р.

Is conducted systematization and the generalized classification of mathematical models of electrical machines is offered. For want of simulation of electrical machines it is offered to take into account a moment of mechanical losses in function of an angular velocity of rotation. Is shown, that for want of simulation of electrical machines it is possible also to receive their dynamic power performances, which can be used for an evaluation of their condition.