

# АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТАХОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

В.В.Кухарчук, В.Ю.Кучерук, А.В.Поджаренко, В.Б.Дудикевич  
Вінницький державний технічний університет  
Кафедра метрології та промислової автоматики  
21021 Україна, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95  
Тел. +38(0432) 44-06-72

**Annotation** - The problems of application of linear model of an asynchronous motor to the analysis of a measurement channel of an angular velocity of rotation are considered. The analytical expression for an angular velocity and dynamic moment, angular velocity on an output of the coupler is obtained. Represented, that the coupler essentially influences on an initial part of running, and error of quantization - in static mode of operation. The analytical expressions for a surge characteristic and transient period in the coupler are obtained. The algorithm of correction of a dynamic error of the coupler is offered. The equations for the basic metrology performances of a measurement channel of an angular velocity on the basis of digital frequency counter of instantaneous values are obtained.

**Key words** – angular velocity measurement, coupler, asynchronous motor, linear model, correction algorithm

Асинхронні двигуни (АД) знайшли широке використання у промисловості. Тому задачам дослідження фізичних явищ, які виникають в процесі роботи АД, задачам вимірювання їх характеристик і параметрів приділяється велика увага.

Залежність кутової швидкості  $\omega_r$  в часі  $t$  є досить важливим параметром, тому що дана фізична величина є вихідною для опосередкованих вимірювань кутового прискорення  $d\omega_r/dt$ , моменту інерції ротора  $J$ , динамічного моменту  $J \cdot d\omega_r/dt$ .

Досить важливим елементом засобів вимірювань кутової швидкості є тахометричний перетворювач (ТП), основними складовими якого є: об'єкт вимірювання, муфта спряження (МС), фотоелектричний сенсор, аналого-цифровий перетворювач.

Для динамічних вимірювань кутової швидкості в перехідних режимах роботи АД як сенсори застосовують фотоелектричні вимірювальні перетворювачі з великою розрізняльною здатністю ( $Z \geq 1000$ ). Спряження фотоелектричного сенсора (ФС) з вихідним валом об'єкту вимірювань здійснюють за допомогою пружних муфт, тому що галузь застосування безконтактних вимірювань даного інформативного параметра – статичні вимірювання. Як аналого-цифровий перетворювач в такій архітектурі побудови тахометричних перетворювачів доцільне застосування цифрових частотомірів миттєвих значень.

Вирішальним елементом, інерційні властивості якого суттєво впливають на результати вимірювань і викликають появу значної динамічної похибки є МС.

Для оцінки цього впливу використовується чисельне рішення системи диференціальних рівнянь АД і МС [1], але такі дослідження не дозволяють явно відтворити фізичні процеси, які виникають у вимірювальному каналі  $\omega_r(t)$ . Дослідження перехідних режимів пов'язані з великими труднощами, що зумовлені суттєвою нелінійністю та великою жорсткістю системи диференціальних рівнянь АД. Разом з цим, для практичних розрахунків суттєво необхідно є розробка методів для аналітичного динамічного аналізу, які відображають з необхідною точністю реальні процеси.

Одним із напрямків такого роду досліджень є використання лінеаризованих динамічних характеристик

АД, які отримані в результаті різноманітних спрощень. В практиці динамічних розрахунків використовується спрощена лінеаризована характеристика АД у вигляді [2]

$$\left( T_{eo} \frac{dM_d(t)}{dt} + M_d(t) \right) \gamma_0 = 1 - \frac{\omega_r(t)}{\omega_0}, \quad (1)$$

де  $M_d$  - електромагнітний обертальний момент АД;  $T_{eo} = 1/(\omega_c S_k)$  - електромагнітна постійна часу;  $\gamma_0 = S_k/(2M_k)$  - крутизна статичної характеристики;  $\omega_r$  - частота обертання ротора;  $\omega_0$  - частота обертання для ідеального холостого ходу;  $\omega_c = 2\pi f_c$  - частота обертання поля статора;  $S_k, M_k$  - критичні значення ковзання та обертального моменту.

Аналіз перехідних режимів АД показав, що розрахунки, виконані з використанням характеристики (1), дають задовільні за точністю результати в діапазоні ковзання  $S < 0.08 \div 0.10$  [3]. Як було показано в [1], саме в цьому діапазоні проявляється найбільший вплив МС. Тому для проведення подальших досліджень вибрано модель (1). Для визначення  $\omega_r(t)$  використовується рівняння руху ротора

$$J \frac{d\omega_r(t)}{dt} = M_d(t) - M_c, \quad (2)$$

де  $J$  - момент інерції;  $M_c$  - момент механічних втрат.

Аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1)-(2) відносно  $\omega_r(t)$  та  $M_d(t)$  при нульових початкових умовах  $M_d(0) = 0, \omega_r(0) = 0$ , отриманий за допомогою пакету символічної математики Maple V Release 5 [4], представлений у вигляді

$$\omega_r(t) = \omega_0 \left( 1 - \gamma_0 M_c - F_1 e^{-t/2T_{eo}} \cos\left(\frac{F}{2}t\right) + F_2 e^{-t/2T_{eo}} \sin\left(\frac{F}{2}t\right) \right), \quad F = \frac{1}{T_{eo}} \sqrt{\frac{4T_{eo}}{\omega_0 J \gamma_0} - 1}, \quad (3)$$

$$F_1 = 1 - \gamma_0 M_c + \frac{\omega_0 J \gamma_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{T_{eo}} \right),$$

$$F_2 = \frac{\gamma_0 T_{eo}^2 (\omega_0 J + 2T_{eo} F M_c - F \omega_0 J \gamma_0 M_c)}{4T_{eo} - \omega_0 J \gamma_0},$$

$$M_d(t) = M_c - F \frac{T_{eo}^2 \omega_0 J (\gamma_0 M_c - 2)}{4T_{eo} - \omega_0 J \gamma_0} \sin\left(\frac{F}{2}t\right) - M_c \cos\left(\frac{F}{2}t\right). \quad (4)$$

Щоб з'ясувати вплив МС на результати вимірювання  $\omega_r(t)$ , розглянемо її як пружну муфту [4]. Кути повороту АД і валу ТП позначимо відповідно  $\varphi_r$  і  $\varphi_m$  (рис. 1). Приведений до ротора АД момент інерції муфти і сенсора  $J_m$  вважається постійним. Тоді рівняння руху для узагальнених координат  $\varphi_r(t)$  та  $\varphi_m(t)$  мають вигляд [1, 5]:

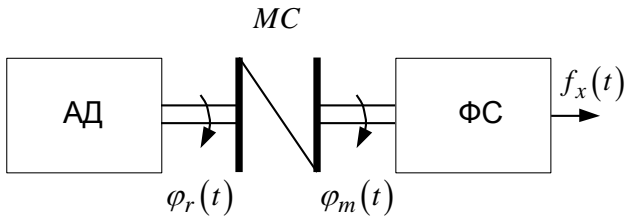


Рис. 1. Динамічна модель вимірювального каналу  $\omega_r(t)$

$$\begin{cases} J \cdot \frac{d^2 \varphi_r(t)}{dt^2} + b \cdot \left( \frac{d\varphi_r(t)}{dt} - \frac{d\varphi_m(t)}{dt} \right) + \\ + c \cdot (\varphi_r(t) - \varphi_m(t)) = M_d(t); \\ J_m \cdot \frac{d^2 \varphi_m(t)}{dt^2} - b \cdot \left( \frac{d\varphi_r(t)}{dt} - \frac{d\varphi_m(t)}{dt} \right) - \\ - c \cdot (\varphi_r(t) - \varphi_m(t)) = -M_c, \end{cases} \quad (5)$$

де  $c$  - коефіцієнт жорсткості МС;  $b$  - коефіцієнт демпфування МС.

При достатньо великій потужності АД закон руху його ротора  $\omega_r(t)$  може вважатися не залежним від впливу МС. Тому для подальшого аналізу використовується лише друге рівняння системи (5).

Для визначення  $\varphi_r(t)$  проінтегруємо вираз (3):

$$\varphi_r(t) = \omega_0 \left( t - \gamma_0 M_c t - F_1 F_3 e^{-t/2T_{eo}} \left( F \sin\left(\frac{F}{2}t\right) - \frac{\cos\left(\frac{F}{2}t\right)}{T_{eo}} \right) + F_2 F_3 e^{-t/2T_{eo}} \left( F \cos\left(\frac{F}{2}t\right) + \frac{\sin\left(\frac{F}{2}t\right)}{T_{eo}} \right) \right) + C, \quad C = -\omega_0 F_3 \left( \frac{F_1}{T_{eo}} + F_2 F \right), \quad F_3 = \frac{1}{8 \left( \frac{1}{T_{eo}^2} + F^2 \right)}. \quad (6)$$

З урахуванням (3) і (6) знайдене аналітичне рішення відносно  $\omega_m(t)$  другого рівняння системи (5) при нульових початкових умовах  $\varphi_m(0) = 0$ ,  $\frac{d\varphi_m(0)}{dt} = 0$  за допомогою пакету символьної математики Maple V Release 5:

$$\omega_m(t) = ce^{-ct/b} \left( c\omega_0 F_1 F_3 F T_{eo} F_9 - CT_{eo} e^{ct/b} - c\omega_0 F_1 F_3 F_8 + \frac{\omega_0 \gamma_0 M_c T_{eo} b^2}{c} e^{ct/b} \left( \frac{ct}{b} - 1 \right) - \frac{\omega_0 T_{eo} b^2}{c} e^{ct/b} \left( \frac{ct}{b} - 1 \right) - c\omega_0 F_2 F_3 F T_{eo} F_8 - c\omega_0 F_2 F_3 F_9 + \omega_0 F_2 b T_{eo} F_9 + \frac{\omega_0 b^2 T_{eo}}{c} e^{ct/b} (\gamma_0 M_c - 1) + \omega_0 F_1 b T_{eo} F_8 \right) \frac{1}{b^2 T_{eo}} + e^{-ct/b} \left( c\omega_0 t T_{eo} e^{ct/b} - c\omega_0 F_1 F_3 F T_{eo} F_7 + cCT_{eo} e^{ct/b} - c\omega_0 \gamma_0 M_c t T_{eo} e^{ct/b} + c\omega_0 F_1 F_3 F_6 + c\omega_0 F_2 F_3 F T_{eo} F_6 + c\omega_0 F_2 F_3 F_7 - \omega_0 F_2 b T_{eo} F_7 - \omega_0 \gamma_0 M_c b T_{eo} e^{ct/b} + \omega_0 b T_{eo} e^{ct/b} - \omega_0 F_1 b T_{eo} F_6 \right) \frac{1}{b T_{eo}} - \frac{c}{b} e^{-ct/b} C_1, \quad (7)$$

$$C_1 = - \left( \frac{c\omega_0 F_1 F_3 F^2 T_{eo}}{2F_5} + CT_{eo} b + \frac{c\omega_0 F_1 F_3 F_4}{F_5} + \frac{c\omega_0 F_2 F_3 F T_{eo} F_4}{F_5} - \frac{c\omega_0 F_2 F_3 F \cos\left(\frac{F}{2}t\right)}{2F_5} + \frac{\omega_0 F_2 b T_{eo} F}{F_5} - \frac{\omega_0 F_1 b T_{eo} F_4}{F_5} \right) \frac{1}{b T_{eo}},$$

$$F_4 = \left( \frac{c}{b} - \frac{1}{2T_{eo}} \right)^2 + \frac{F^2}{4}, \quad F_5 = \exp\left( \left( \frac{c}{b} - \frac{1}{2T_{eo}} \right) t \right),$$

$$F_6 = \frac{F_5}{F_4} \cos\left(\frac{F}{2}t\right) \left( \left( \frac{c}{b} - \frac{1}{2T_{eo}} \right)^2 + \frac{1}{4} F^2 \right),$$

$$F_7 = \frac{F_5}{F_1} \sin\left(\frac{F}{2}t\right) \left( \frac{1}{4} F^2 + \left( \frac{c}{b} - \frac{1}{2T_{eo}} \right)^2 \right),$$

$$F_8 = \frac{F_5}{F_4} \left( \left( \frac{c}{b} - \frac{1}{2T_{eo}} \right) \cos\left(\frac{F}{2}t\right) + \frac{F}{2} \sin\left(\frac{F}{2}t\right) \right),$$

$$F_9 = \frac{F_5}{F_4} \left( \left( \frac{c}{b} - \frac{1}{2T_{eo}} \right) \sin\left(\frac{F}{2}t\right) - \frac{F}{2} \cos\left(\frac{F}{2}t\right) \right).$$

Задаючи різні значення коефіцієнтів  $c$  і  $b$ , оцінимо їх вплив на відносну динамічну похибку вимірювання кутової швидкості  $\delta_\omega(t)$ :

$$\delta_\omega(t) = \frac{\omega_r(t) - \omega_m(t)}{\omega_r(t)} \times 100\%. \quad (8)$$

На рис. 2 представлено результати розрахунку  $\delta_\omega(t)$  для АМ 4А71А4 ( $J_m = 0.0006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ) в процесі розбігу при різних значеннях коефіцієнтів  $c$  і  $b$ .

Вирішивши друге рівняння системи (5) при  $\varphi_r(t) = 1(t)$  і нульових початкових умовах ( $\varphi_m(0) = 0$ ,  $\frac{d\varphi_m(0)}{dt} = 0$ ), знайдемо перехідну функцію МС (рис. 3):

$$h(t) = \frac{1}{c} \left[ c - M_c + (M_c - c) e^{-\frac{bt}{2M_c}} \cos\left(\frac{G_1}{2}t\right) + \frac{(M_c + c) b J_m G_1}{c(4cJ_m - b^2)} e^{-\frac{bt}{2M_c}} \sin\left(\frac{G_1}{2}t\right) \right],$$

$$G_1 = \frac{1}{J_m} \sqrt{b^2 - 4cJ_m}.$$

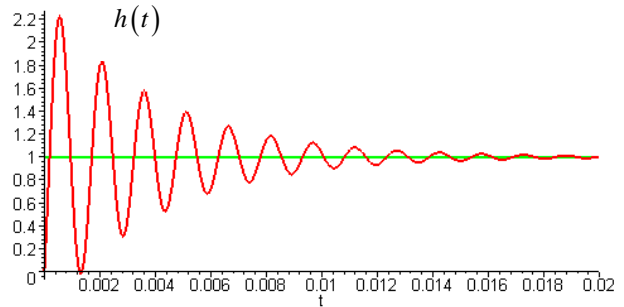


Рис. 3. Перехідна функція МС

Визначимо час перехідного процесу  $t_{пер}$  із умови

$$e^{-\frac{bt_{пер}}{2M_c}} = \delta_{норм}, \quad (10)$$

де  $\delta_{норм}$  - нормоване значення динамічної похибки.

Вирішивши рівняння (10) відносно  $t_{пер}$ , отримаємо:

$$t_{пер} = \frac{2M_c}{b} \cdot \ln \left[ \frac{1}{\delta_{норм}} \right]. \quad (11)$$

На рис. 4 наведена поверхня, яка ілюструє залежність часу  $t_{пер}$  від параметрів МС.

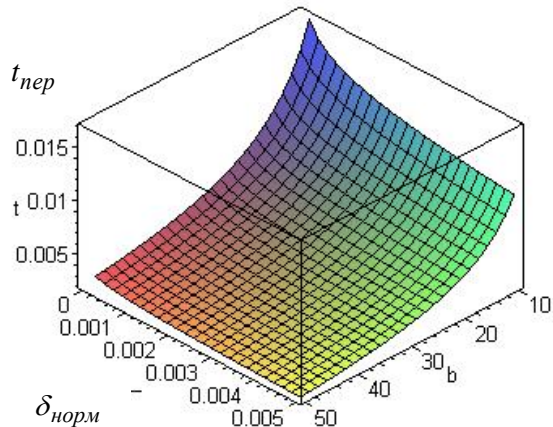


Рис. 4. Залежність  $t_{пер}(b, \delta_{норм})$

Аналіз результатів моделювання дозволяє зробити висновки про великі значення похибки  $\delta_{\omega}(t)$  на початковій ділянці процесу розбігу  $t \in [0, 0.02]$ , яка суттєво спотворює дійсні значення  $\omega_r(t)$ . Збільшення значень коефіцієнту  $b$  (наближення пружних муфт до жорстких) приводить до зменшення коливань, але при цьому виявляється більший вплив ексцентриситету.

Знешкодити динамічну похибку МС можна двома шляхами:

1) відкиненням вимірних значень кутової швидкості при  $t \in [0, 0.02]$ ;

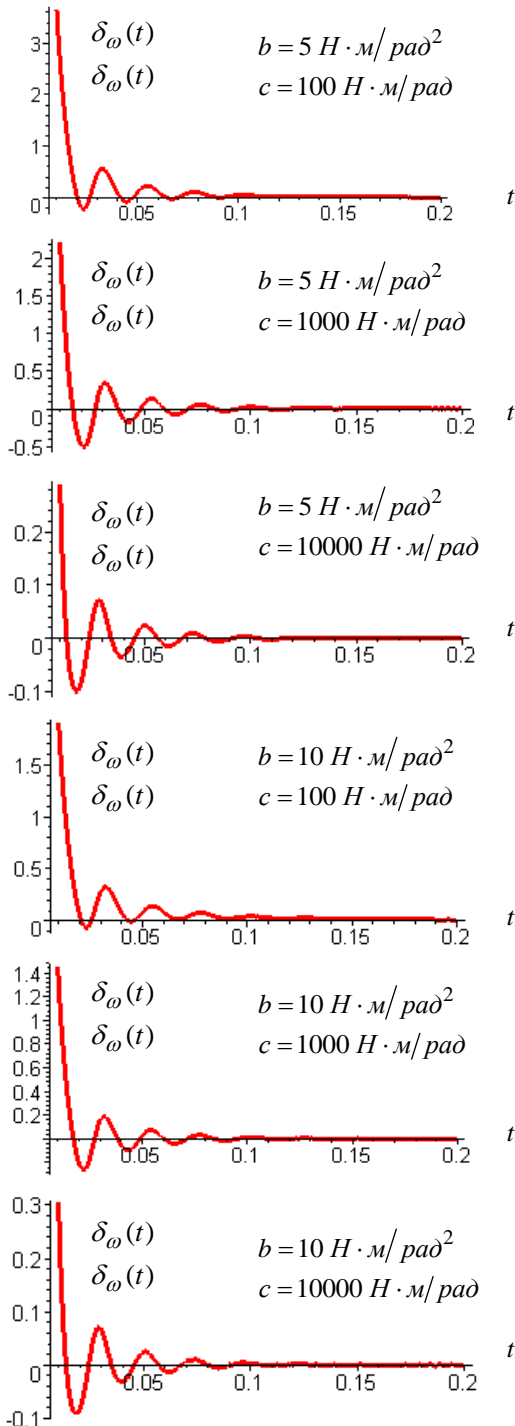


Рис. 2. Залежності  $\delta_{\omega}(t)$  при різних значеннях коефіцієнтів  $c$  і  $b$

2) введенням корекції результатів вимірювань з метою виключення динамічної похибки (“редукцією до ідеального приладу”).

Скоректувати динамічні похибки (при відсутності статичних похибок) можна, визначивши розв’язок операторного рівняння динаміки МС

$$\varphi_r(t) = \Psi^{-1}[\varphi_m(t)]. \quad (12)$$

При цьому значення  $\varphi_m(t)$ ,  $\frac{d\varphi_m(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2\varphi_m(t)}{dt^2}$  вважаються відомими (вимірними або обчисленими).

З урахуванням цих обставин знайдемо рішення другого рівняння системи (5) відносно  $\varphi_r(t)$  при нульових початкових умовах:

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) = & \frac{J_m}{b} \int_0^t \left[ \frac{d^2\varphi_m(U)}{dU^2} \right] e^{-\frac{c}{b}(t-U)} dU + \\ & + \int_0^t \left[ \frac{d\varphi_m(U)}{dU} \right] e^{-\frac{c}{b}(t-U)} dU + \\ & + \frac{c}{b} \int_0^t \varphi_m(U) e^{-\frac{c}{b}(t-U)} dU + \frac{M_c}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{b}(t-U)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Визначимо нижню межу вимірювання цифрового частотоміра миттєвих значень (періодоміра), рівняння перетворення якого має вигляд

$$N_\omega(t) = \frac{2\pi \cdot f_0}{\omega_r(t) \cdot z}, \quad (14)$$

а похибка квантування визначається

$$\delta_{k\omega}(t) = \frac{\omega_r(t) \cdot z}{2\pi \cdot f_0} \times 100\%, \quad (15)$$

де  $f_0$  - частота імпульсів квантування;  $z$  – розрізнявальна здатність сенсора швидкості.

Максимальна ємність бінарного лічильника складає

$$N_\omega = N_{\max} = 2^n, \quad (16)$$

де  $n$  – розрядність лічильника.

Враховуючи (16), рівняння (14) запишемо

$$2^n = \frac{2\pi \cdot f_0}{z \cdot \omega_{r \min}}. \quad (17)$$

Тоді з рівняння (17) визначимо нижню межу вимірювання

$$\omega_{r \min} = \frac{2\pi \cdot f_0}{z \cdot 2^n}. \quad (18)$$

Верхня межа вимірювання  $\omega_{r \max}$  для частотоміра миттєвих значень визначається із рівняння похибки квантування (15)

$$\omega_{r \max} = \frac{2\pi \cdot \delta_{kn} \cdot f_0}{z \cdot 100\%}, \quad (19)$$

де  $\delta_{kn}$  - нормоване значення похибки квантування.

Задаючись величиною  $\delta_{kn} = 1\%$ , отримаємо

$$\omega_{r \max} = 314 \text{ рад/сек} \left| \begin{array}{l} f_0 = 5 \text{ МГц} \\ n = 16 \\ z = 1000 \end{array} \right|.$$

На рис. 5 представлено розраховану залежність  $N_\omega(t)$  для значень  $c=10000$ ,  $b=10$  в режимі пуску АД, а на рис. 6 – похибку квантування  $\delta_{k\omega}(t)$ .

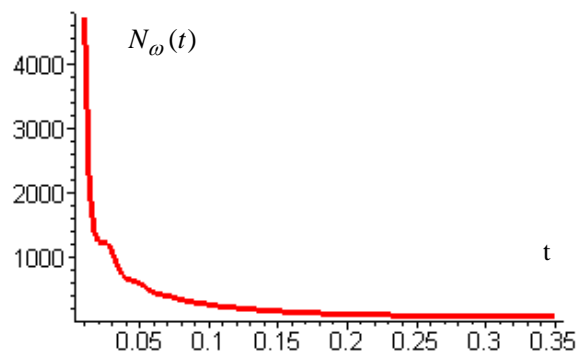


Рис. 5. Залежність  $N_\omega(t)$

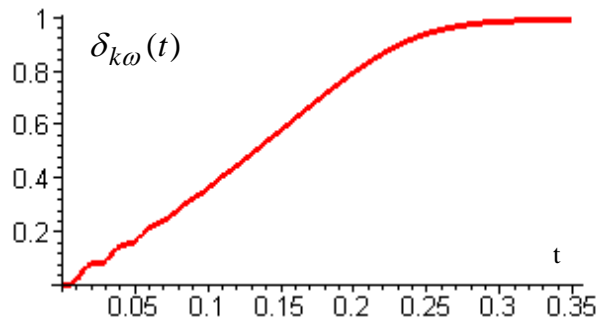


Рис. 6. Залежність  $\delta_{k\omega}(t)$

З рис. 6 видно, що значення похибки квантування при  $f_0=5$  МГц та  $z=1000$  не перевищує 1%. Характер зміни сумарної похибки вимірювального каналу кутової швидкості  $\delta_{\text{сум}}(t) = \delta_\omega(t) + \delta_{k\omega}(t)$  наведений на рис. 7.

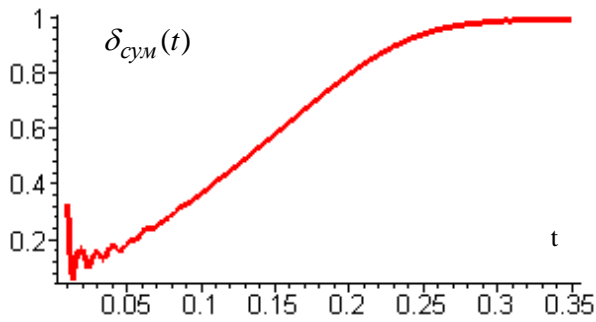


Рис. 7. Залежність сумарної похибки вимірювального каналу кутової швидкості від часу

Таким чином, для вимірювання кутової швидкості як в перехідних режимах роботи АД, так і в статичному режимі можна використовувати схему частото-міра миттєвих значень з наперед заданою похибкою квантування.

Для зменшення похибки квантування в статичному режимі роботи АД (верхня межа вимірювання) запропоновано наступний алгоритм. Задають нормоване значення похибки квантування  $\delta_{kn}$  і визначають  $\omega_{r \max}$ . В залежності від типу АД задають величину його синхронної кутової швидкості  $\omega_0$  і визначають коефіцієнт масштабування

$$k_m = \frac{\omega_{r \max}}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot \delta_{kn} \cdot f_0}{z \cdot 100\% \cdot \omega_0} \quad (20)$$

Величину коефіцієнта  $k_m$  записують у передвключений подільник частоти. В результаті зменшується величина періоду і саме значення синхронної кутової швидкості  $\omega_0$ , що призводить до зменшення похибки квантування.

#### Висновки

1. Отримано аналітичний розв'язок лінеаризованої математичної моделі асинхронного двигуна відносно кутової швидкості, динамічного моменту і ди-

ференціального рівняння муфти спряження. Доведено, що інерційні властивості виділених елементів тахометричних перетворювачів суттєво впливають на результати вимірювання кутової швидкості і викликають появу динамічної похибки ( $\delta_{\omega}(t) \leq 5\%$ ).

2. Виведено аналітичну залежність для перехідної характеристики муфти спряження. В результаті моделювання встановлено, що за рахунок її пружних властивостей виникає перехідний процес, тривалість якого може досягати 0.02 с. Для визначення тривалості перехідного процесу одержано аналітичну залежність і запропоновано алгоритм корекції результатів динамічного вимірювання кутової швидкості на протязі перехідного процесу, що триває у муфті спряження.

3. Одержано рівняння для визначення основних метрологічних характеристик вимірювального каналу кутової швидкості на основі цифрового частото-міра миттєвих значень з метою нормування похибки вимірювань.

[1] Кучерук В.Ю., Кухарчук В.В. Аналіз та практична реалізація мікропроцесорного засобу вимірювання кутової швидкості обертання електричних машин.// Вісник Вінницького політехнічного інституту, №2(7), 1995, с.12-17.

[2] Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов.-Л.: Машиностроение, 1969.-370с.

[3] Вейц В.Л., Куценко Б.Н. Динамическая характеристика асинхронного двигателя // Регулируемые асинхронные двигатели: Сб. науч. тр. ИЭД АН УССР.-К.:Наук. думка.-1983.-с.3-12.

[4] Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5.-М.: Солон, 1998, 400с.

[5] Левитский Н.И. Колебания в механизмах.-М.: Наука, 1988.-336с.