

## АНАЛІЗ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ МЕТОДОМ ФІКСОВАНОГО КУТА В ДИНАМІЧНОМУ РЕЖИМІ

Поджаренко В.О., Васілевський О.М., Кучерук В.Ю.

Вінницький національний технічний університет, факультет автоматики та комп'ютерних систем управління, кафедра „Метрологія та промислова автоматика”.

### Abstract

*Podzsharenko V.O., Vasilevsky O.M., Kutcheruk V.Y. The measuring error analysis by means of fixed angle in dynamic mode method. The angular velocity measuring error analysis by means of fixed angle in dynamic mode method. The task of angular velocity measurement error researches by means of fixed angle method was considered. The diagrams of average error of time interval on different excited frequency.*

**Постановка задачі.** Як відомо похибки мають безліч причин, і їх, як правило, важко виявити, тому що при повторенні вимірювань вони не зберігають свою величину. Типових джерел похибок є безліч і визначити та виключити похибки нелегко. Вимірюючи малі кутові швидкості на їх результати найбільше впливають різного роду збурення та завади, які необхідно враховувати при обробці результатів вимірювання.

**Аналіз стану досліджень та публікацій на задану тему.** Метод фіксованого кута для аналізу похибок вимірювання кутових швидкостей розглядався в [1] при використанні дискретних методів вимірювання. Але аналіз похибок вимірювання малих кутових швидкостей в динамічному режимі при врахуванні збурень, ще малодосліджений. Тому виникає необхідність в дослідженні впливу збурень на результати розрахунку усередненої похибки для отримання рекомендацій щодо обробки результатів при вимірюванні малих кутових швидкостей в динамічному режимі.

**Мета даної роботи** полягає у визначенні впливу збурення на результати обчислення усередненої похибки при вимірюванні малих кутових швидкостей у динамічному режимі, побудові їх характеристик та отриманні рекомендацій щодо обробки результатів вимірювання.

**Виклад основного матеріалу.** У випадку кутових швидкостей вимірюється час ( $\Delta t = t_2 - t_1$ ) повороту на відомий кут ( $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ), а його кутова швидкість визначається з виразу:

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (1)$$

Нижче отримані оцінки відносної похибки вимірювань регулярної (систематичної) та випадкової складових швидкості  $\omega$  за цим методом, а також вивчено питання про оптимальний вибір  $\Delta\varphi$ . Розглянемо спочатку похибку вимірювань систематичної складової.

Нехай кут повороту вала змінюється за законом:

$$\varphi = \Phi(t), \quad (2)$$

де  $\Phi(t)$  – достатньо гладка функція, яка допускає обернення:

$$t = T(\varphi). \quad (3)$$

Розклад (3) в ряд Тейлора дає:

$$t_2 - t_1 = \frac{dT}{d\varphi} \Delta\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2T}{d\varphi^2} (\Delta\varphi)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3T}{d\varphi^3} (\Delta\varphi)^3 + \dots \quad (4)$$

Обчислюючи  $\frac{dT}{d\varphi}; \frac{d^2T}{d\varphi^2}; \dots; \frac{d^kT}{d\varphi^k}$ , отримаємо:

$$t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0(t_1)} - \frac{\dot{\omega}(t_1)}{2 \cdot \omega_0^3(t_1)} (\Delta\varphi)^2 + \frac{3 \cdot \dot{\omega}_0^2(t_1) - \omega_0(t_1) \cdot \ddot{\omega}_0(t_1)}{6 \cdot \omega_0^5(t_1)} (\Delta\varphi)^3 + \dots, \quad (5)$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $\omega_0 = \frac{d\Phi}{dt}$ ;  $\dot{\omega}_0 = \frac{d\omega_0}{dt}$ .

Нехай на кутову швидкість  $\omega_0(t)$  накладається мале збурення  $\tilde{\omega}(t)$ :

$$\omega(t) = \omega_0(t) + \tilde{\omega}(t). \quad (6)$$

Введемо наступне позначення:

$$\tau = t_2 - t_1, \quad (7)$$

$$R[\omega_0(t), \Delta\varphi] = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0(t)} - \frac{\dot{\omega}_0(t)}{2 \cdot \omega_0^3(t)} (\Delta\varphi)^2 + \frac{2 \cdot \dot{\omega}_0^2(t) - \omega_0(t) \cdot \ddot{\omega}_0(t)}{6 \cdot \omega_0^5(t)}, \quad (8)$$

$$\tilde{t}_2 - t_1 = R[\omega_0(t_1) + \tilde{\omega}(t_1), \Delta\varphi], \quad (9)$$

$$\tilde{t}_1 - t_2 = R[\omega_0(t_2) + \tilde{\omega}(t_2), -\Delta\varphi], \quad (10)$$

де  $\tilde{t}_2$  - момент часу перетину мітки  $\varphi_2$ , якщо в момент часу проходження мітки  $\varphi_1(t_1)$  кутова швидкість отримала збурення  $\tilde{\omega}(t_1)$ ;

$\tilde{t}_1$  - момент часу перетину мітки  $\varphi_1$ , якщо в момент проходження мітки  $\varphi_2(t_2)$  кутова швидкість  $\omega_0(t_2)$  має збурення  $\tilde{\omega}(t_2)$ .

Найдемо інтервал часу проходження кута з урахуванням збурень. З (8) – (10) маємо:

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = R[\omega_0(t_1) + \tilde{\omega}(t_1), \Delta\varphi] - R[\omega_0(t_2) + \tilde{\omega}(t_2), -\Delta\varphi]. \quad (11)$$

В подальшому будемо позначати  $t_1$  через  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{\tau}$  і  $\tilde{t}_2 = t + \tau$ .

Враховуючи (8) і (11), найдемо:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} = & \left[ \frac{1}{\omega_0(t) + \tilde{\omega}(t)} + \frac{1}{\omega_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)} - \frac{1}{\omega_0(t)} \right] \cdot \Delta\varphi - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\dot{\omega}_0(t) + \tilde{\omega}(t)}{[\omega_0(t) + \tilde{\omega}(t)]^3} + \frac{\dot{\omega}_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)}{[\omega_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)]^3} - \frac{\dot{\omega}_0(t)}{\omega_0^3(t)} \right\} \cdot (\Delta\varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{3 \cdot [\dot{\omega}_0(t) + \tilde{\omega}(t)]^2 - [\omega_0(t) + \tilde{\omega}(t)] \cdot [\ddot{\omega}_0(t)]}{[\omega_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)]^5} + \right. \\ & + \frac{3 \cdot [\dot{\omega}_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)]^2 - [\omega_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)] \cdot [\ddot{\omega}_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)]}{[\omega_0(t + \tau) + \tilde{\omega}(t + \tau)]^5} \\ & \left. - \frac{3 \cdot \dot{\omega}_0^2(t) - \omega_0(t) \cdot \ddot{\omega}_0(t)}{\omega_0^5(t)} \right\} (\Delta\varphi)^3 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Нехай:

$$\omega_0(t) = \omega_n \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (13)$$

де  $\omega_n$  – номінальна кутова швидкість;

$T$  – постійна часу.

Для прикладу візьмемо двигун, який має номінальну кутову швидкість  $\omega_n=3000\text{об/хв}$  та постійну часу  $T = 0,5 \text{ с}$  [2].

Обмежуючись трьома членами розкладу (12) в ряд по степеням і нехтуючи членами степені вище 2-ї, отримаємо:

$$\tilde{\tau} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0(t)} \cdot [1 - \tilde{\delta}(t, \tau)], \tag{14}$$

де  $\tilde{\delta}(t, \tau)$  - відносна похибка визначення інтервалу  $\tilde{\tau}$ , вироджена збуренням  $\tilde{\omega}(t)$ .

Відносна похибка  $\tilde{\delta}(t, \tau)$  дорівнює:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(t, \tau) = & \frac{\tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t + \tau)}{\omega_0(t)} - \frac{\tilde{\omega}^2(t) + \tilde{\omega}^2(t + \tau)}{\omega_0^2(t)} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left[ \dot{\tilde{\omega}}(t) + \dot{\tilde{\omega}}(t + \tau) - \frac{3 \cdot [\dot{\tilde{\omega}}(t) \cdot \tilde{\omega}(t) + \dot{\tilde{\omega}}(t + \tau) \cdot \tilde{\omega}(t + \tau)]}{\omega_0(t)} \right] \cdot \frac{\Delta\varphi}{\omega_0^2(t)} - \\ & - \frac{1}{6} \cdot \left\{ 3 \cdot [\ddot{\tilde{\omega}}^2(t) + \ddot{\tilde{\omega}}^2(t + \tau)] - \omega_0(t) \cdot [\ddot{\tilde{\omega}}(t) + \ddot{\tilde{\omega}}(t + \tau)] + 4 \cdot [\tilde{\omega}(t) \cdot \ddot{\tilde{\omega}}(t) + \tilde{\omega}(t + \tau) \cdot \ddot{\tilde{\omega}}(t + \tau)] \cdot \frac{(\Delta\varphi)^2}{\omega_0^4(t)} \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Перейдемо до визначення відносної похибки  $\tilde{\gamma}(t, \tau)$  регулярного значення кутової швидкості  $\omega$ . Нехтуючи степенями  $\tilde{\delta}^3$  та вище отримаємо вираз для відносної похибки  $\tilde{\gamma}(t, \tau)$  вимірювання  $\omega_0(t)$  за формулою (1):

$$\tilde{\gamma}(t, \tau) = \tilde{\delta}(t, \tau) + \tilde{\delta}^2(t, \tau) \tag{16}$$

Співвідношення (15) і (16) дозволяють обчислити середнє значення відносної похибки, якщо збурення носить випадковий характер.

Нехай  $\tilde{\omega}(t)$  має вигляд:

$$\tilde{\omega}(t) = a \cdot \sin(b \cdot t). \tag{17}$$

Підставляючи (17) в (15) і (16), отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t, \tau) = & \sin\left(b \cdot \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{b \cdot \tau}{2}\right) + [\cos(b \cdot \tau) - \cos(b \cdot (2 \cdot t + \tau))] \cdot \frac{a^2}{\omega_0^2(t)} + \\ & + \frac{a \cdot b}{2} \cdot \left[ 2 \cdot \cos\left(b \cdot \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{b \cdot \tau}{2}\right) + \frac{2 \cdot a}{\omega_0(t)} \cdot \sin(b \cdot (2 \cdot t + \tau)) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \cos(b \cdot \tau)\right) \right] \cdot \frac{\Delta\varphi}{\omega_0^2(t)} + \\ & + \frac{a^2 \cdot b^2}{6} \cdot [\cos^2\left(b \cdot \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \cdot \left(4 - 7 \cdot \cos^2\left(\frac{b \cdot \tau}{2}\right)\right) - \frac{\omega_0(t)}{a} \cdot \sin\left(b \cdot \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{b \cdot \tau}{2}\right)] \times \\ & \times \frac{(\Delta\varphi)^2}{\omega_0^4(t)} - \frac{a^2 \cdot b^2}{3} \cdot \cos^2\left(\frac{b \cdot \tau}{2}\right) \cdot \sin(b \cdot (2 \cdot t + \tau)) \cdot \frac{(\Delta\varphi)^3}{\omega_0^5(t)} + \frac{a^2 \cdot b^4}{9} \cdot \sin^2\left(b \cdot \left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \times \\ & \times \cos^2\left(\frac{b \cdot \tau}{2}\right) \cdot \frac{(\Delta\varphi)^4}{\omega_0^6(t)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Обчислимо середнє значення  $\tilde{\gamma}(t, \tau)$  за формулою:

$$\bar{\tilde{\gamma}}(\tau) = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \tilde{\gamma}(t, \tau) dt \tag{19}$$

Час  $t$  визначимо із співвідношення:

$$\delta = \frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_n} \cdot 100\% = e^{-\frac{t}{T}} \cdot 100\%. \tag{20}$$

де  $\delta$  – похибка при роботі в статичному режимі.

Звідки:

$$t = T \cdot \ln\left(\frac{100}{\delta}\right). \quad (21)$$

Підставивши рівняння (18) в (19) та розв'язавши його, задавшись похибкою  $\delta$ , що не перевищує 2 %, отримано наступні результати розрахунку усередненої похибки  $\bar{\gamma}$  (рисунок 1).

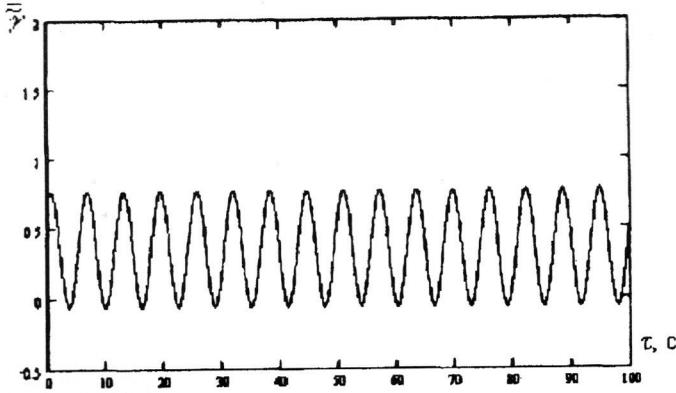


Рис. 1 - Залежність середньої похибки  $\gamma$  при збудженні від величини  $\tau$  коли  $b = 1$  Гц

Вони представлені в графічному вигляді при гармонічній характеристиці  $\tilde{\omega}$  та різних частотах збудрення (рисунок 2 та 3).

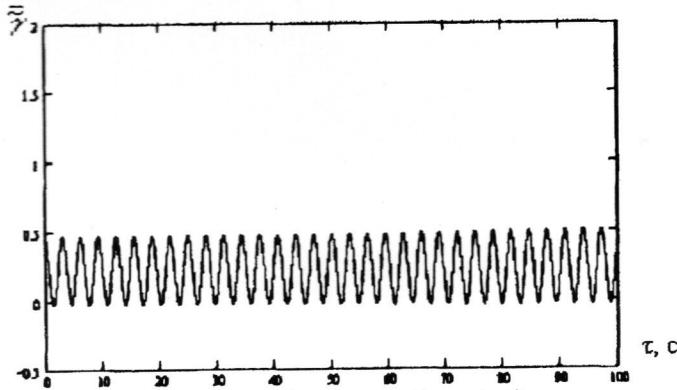


Рис. 2 - Залежність середньої похибки  $\gamma$  при збудженні від величини  $\tau$  коли  $b = 2$  Гц

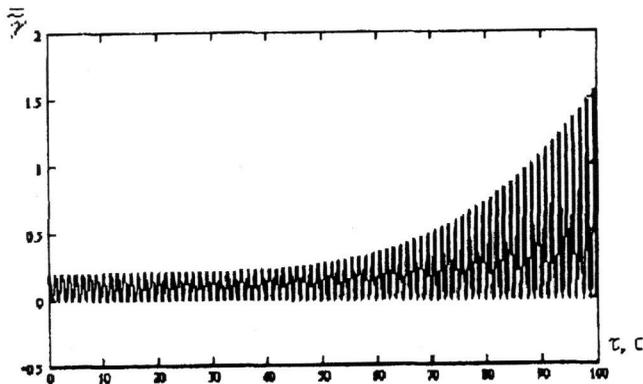


Рис. 3 - Залежність середньої похибки  $\gamma$  при збудженні від величини  $\tau$  коли  $b = 5$  Гц

Графічні залежності, які представлені на рисунках 1, 2 та 3 було одержано з врахуванням того, що:

$$\Delta\varphi = \omega_0(t) \cdot \tau. \quad (22)$$

Таким чином було промодельовано похибки кутової швидкості методом фіксованого кута та отримані графіки залежності усередненої похибки від величини інтервалу часу  $\tau$  при різних частотах збурення  $b$ .

### Висновки.

1. Аналіз результатів моделювання дозволяє зробити висновок про те, що при малих значення коефіцієнту  $b$  (частоти гармонічних коливань рисунок 1) усереднена похибка  $\tilde{\gamma}$  динамічного процесу під час збурення від величини  $\tau$  має більше значення. Менших значень усередненої похибки  $\tilde{\gamma}(\tau)$  на початковій ділянці динамічного процесу розбігу двигуна, можна досягти при збільшенні коефіцієнту  $b$  (рисунок 2). Збільшення значень коефіцієнту  $b$  приводить до зменшення усередненої похибки, але при цьому спостерігається збільшення впливу експоненціальної складової усередненої похибки при досить тривалому часі (рисунок 3).

2. При вимірюванні малих кутових швидкостей в динамічному режимі усереднена похибка набуває менших значень на вищих частот збурення гармонічних коливань, а точність вимірювання при цьому - вища.

3. Подальше вдосконалення вище описаного аналізу полягає у заміні найпростішої функції кутової швидкості  $\omega_0(t)$ , що описує роботу електродвигунів, на реальну (більш складнішу) та побудові її характеристик.

### Література

1. Иванов В.А., Липатов Л.С., Поваренко А.С., Семенова Г.Ф. Автоколлимационная система измерения малых угловых скоростей // В сб. «Новые конструкции точных механизмов и приборов и технология их изготовления». Изд. ЛДНТП, 1974.

2. Поджаренко В.А., Кухарчук В.В., Кучерук В.Ю. Автоматизированная система измерения и контроля параметров электродвигателей. // В кн. «Контроль и управление в технических системах». Тезисы докладов НТК стран СНГ. – Винница, 1992.

1. Иванов В.А., Липатов Л.С., Поваренко А.С., Семенова Г.Ф. Автоколлимационная система измерения малых угловых скоростей // В сб. "Новые конструкции точных механизмов и приборов и технология их изготовления". Изд. ЛДНТП, 1974.

2. Поджаренко В.А., Кухарчук В.В., Кучерук В.Ю. Автоматизированная система измерения и контроля параметров электродвигателей // В кн. "Контроль и управление в технических системах". Тезисы докладом НТК стран СНГ. - Винница, 1992.