Volodymyr Derech, Ph.D.
Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine
e-mail: derech@vntu.edu.ua

THE INVERSE MONOID OF LOCAL AUTOMORPHISMS OF THE QUATERNION GROUP

Abstract

A local automorphism of the semigroup S is defined as an isomorphism between its two subsemigroups. The set of all local automorphisms of the semigroup S relative to the operation of composition forms an inverse monoid of local automorphisms. In the current theses we present some properties of the inverse monoid of local automorphisms of the quaternion group.

Keywords: inverse monoid of local automorphisms,factorizable semigroup, variants of semigroup.

Напівгрупа називається інверсною, якщо для будь-якого елемента $x \in S$ існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо (див. КЛифорд Престон), що напівгрупа S є інверсною тоді і лише тоді, коли кожний її елемент є регулярним і будь-які два ідемпотенти комутують. Далі, нехай C – довільна математична структура. Ізоморфізм між двома підструктурами $A \in Sub(C)$ і $B \in Sub(C)$ називають локальним автоморфізмом математичної структури C. Множина всіх локальних автоморфізмів структури C відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів математичної структури C і позначається через $LAut(C)$. Відомо, що автоморфізм математичної структури C визначає глобальну симетрію цієї структури. До того ж множина всіх автоморфізмів відносно композиції утворює групу автоморфізмів (глобальних симетрій) математичної структури C. Ця група позначається через $Aut(C)$. Можна стверджувати, що основним джерелом груп є групи автоморфізмів тих чи інших математичних структур. Аналогічно, основним джерелом інверсних моноїдів є інверсні моноїди локальних автоморфізмів (локальних симетрій) математичних структур. Знаходження всіх глобальних симетрій і вивчення властивостей відповідної групи автоморфізмів математичної структури C є класичною і актуальною проблемою. Аналогічно, знаходження всіх локальних автоморфізмів і вивчення структури інверсного моноїда $LAut(C)$ є актуальною задачею в теорії інверсних напівгруп.

В пропонованих нотатках ми розглядаємо мініатюрну конструкцію, а саме – інверсний моноїд $LAut(Q_8)$ локальних автоморфізмів групи кватерніонів Q_8. Зокрема ми обчислюємо кількість елементів напівгрупи $LAut(Q_8)$, доводимо, що інверсний моноїд $LAut(Q_8)$ є подільним (factorisable). Ціла низка інших властивостей моноїда $LAut(Q_8)$ випливає з більш загальних результатів (див Дереч).

1. Означення. Термінологія. Формулювання потрібних результатів.

The group $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ in which multiplication is specified by the rule $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$ is called a **quaternion group**. It is well known (see, for example, [11]) that the group of quaternions is the smallest (in terms of the number of elements) non-commutative group in which each subgroup is normal.

A semigroup S is called structurally uniform if any two its subsemigroups of the same height in the lattice $Sub(S)$ are isomorphic. It is known (see [6], Theorem 1) that a finite semigroup is structurally uniform if and only if the set of ideals of the inverse monoid $LAut(S)$ is linearly ordered by inclusion.

An inverse monoid S is called factorizable if $S = GE$; where G and E are, respectively, a group of invertible elements and a semilattice of idempotents of the monoid S. It is known that an inverse monoid is factorizable if and only if, for any element x there exists an element $g \in G$ such that $x \leq g$.

Let $S = (S, \cdot)$ be an arbitrary semigroup. We fix an element $a \in S$ and define a new operation $*_a$ on S by the rule $x *_a y = x \cdot a \cdot y$. It is easy to see that the operation $*_a$ is associative. The semigroup $(S, *_a)$ is called a variant of semigroup $(S, \cdot)$.

2. Some propositions

Proposition 1. $|LAut(Q_8)| = 44$.

Proposition 2. *The inverse monoid $LAut(Q_8)$ is factorizable.*

Proposition 3 (see [7], Theorem 1)**.** *The ideals of $LAut(Q_8)$ form a chain with respect to containment.*

Proposition 4 (див. [6], теорема 1)**.** *Let $\alpha, \beta \in LAut(Q_8)$. The variants $(S, *_\alpha)$ and $(S, *_\beta)$ are isomorphic if and only if $rank(\alpha) = rank(\beta)$.*

In the proposed note, we consider a miniature construction, namely, the inverse monoid $LAut(Q_8)$ of local automorphisms of the quaternion group. In particular, we calculate the number of elements of the semigroup $LAut(Q_8)$, prove that the inverse monoid $LAut(Q_8)$ is factorizable. A number of other properties of the monoid $LAut(Q_8)$ follow from more general results (see Derech).

Література

[1] East J., Mitchell J., Ruškuc N., Torpey M. Congruence lattices of finite diagram monoids. Advances in Mathematics. 333, 931 – 1003 (2018)

[2] Ganyushkin O., Mazorchuk V.: Classical finite transformation semigroups, an introduction, volume 9 of Algebra and Applications. Springer-Verlag London, Ltd., London (2009)

[3] Ganyushkin O., Mazorchuk V. On the structure of $\mathcal{IO}_n$. Semigroup Forum. 66, $455 - 483$ (2003)

[4] Liber A.E. On symmetric generalized groups. Mat. Sbornic N.S.33, $531 - 544$ (1953)

[5] Lawson M.: Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (1998)

[6] V.D. Derech. Structure of a finite commutative inverse semigroup and a finite bundle for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable // Ukrainian Mathematical Journal, 63, pages 1390–1399 (2012)

[7] Derech V.D. Finite structurally uniform groups and commutative nilsemigroups // Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 70, No. 8, January, (2019)

[8] Derech V.D. Characterization of the semilattice of idempotents of a finite-rank permutable inverse semigroup with zero. Ukrainian Mathematical Journal. 59, $1517 - 1527$ (2007)

[9] Derech V.D. Classification of finite commutative semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a Δ-semigroup. Ukrainian Mathematical Journal. 67, $981 - 988$ (2015)

[10] Sædén Ståhl G., Laine J., Behm G.: On p-groups of low power order. Master thesis, Department of Mathematics, KTH (2010). Published electronically at https://people.kth.se/ boij/kandexjobbVT11/Material/pgroups.pdf

[11] Kurosh, Alexander G. (1979), Theory of Groups, AMS Bookstore, ISBN 0-8284-0107-1

[12] Fernandes V. H. The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain. Semigroup Forum. 62, $178 - 204$ (2001)

[13] Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups. Semigroup Forum. 10, $55 - 66$ (1975)