УДК 517(075.8)

І. І. Лисак[1]
Н. В. Сачанюк-Кавецька[2]

ОПЕРАЦІЇ НАД ЛАТИНСЬКИМИ КВАДРАТАМИ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

[1] Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради
[2] Вінницький національний технічний університет

Анотація
Латинські квадрати широко застосовуються у плануванні експериментів, у сільському господарстві, криптографії, в іграх для розвитку ерудованості, в комбінаториці і ін. Математичний опис операцій над ними дозволить спростити застосування латинських квадратів. В даній роботі розглянуто можливість виконання операцій над латинськими квадратами у матричній формі та особливості цих операцій.

Ключові слова: латинський квадрат, ортогональний латинський квадрат, матриця, множення матриць, додавання матриць, обернена матриця.

Abstract
Latin squares are widely used in planning experiments, in agriculture, cryptography, in games for the development of erudition, in combinatorics, etc. A mathematical description of operations on them will simplify the application of Latin squares. This paper considers the possibility of performing operations on Latin squares in matrix form and the features of these operations.

Key words: Latin square, orthogonal Latin square, matrix, matrix multiplication, matrix addition, matrix inverse.

Вступ

Швидкість розвитку сучасних технологій вражає своїми масштабами, однак у багатьох аспектах життя залишилось чимало невирішених питань. Наприклад, латинський квадрат, про який відомо багатьом від школярів до дорослих, насправді приховує чимало таємниць. Питання щодо проблем латинських квадратів посідає одне з центральних місць серед проблем сучасної статистики.

У 1925 році Р. Фішер запропонував використання латинських квадратів для планування сільськогосподарських експериментів. Латинський квадрат з тих пір часто використовувався в плані експерименту, а результати були обчислені та інтерпретовані за допомогою дисперсійного аналізу. Дослідна конструкція з латинськими квадратами була впроваджена під керівництвом Р. Фішера в агрономічні дослідження на Ротамстедській експериментальній станції (Велика Британія), а згодом його використання поширилося на всі інші наукові галузі, які потребують експериментальних досліджень [1, 2].

Латинські квадрати є не тільки фундаментом у плануванні експериментів, але широко застосовуються у сільському господарстві, криптографії, є основою багатьох ігор для розвитку ерудованості, використовуються в комбінаториці, тому математичний опис операцій над латинськими квадратами (зокрема і у матричній формі) буде цікавим для подальших теоретичних досліджень та може знайти широке практичне застосування.

Результати дослідження

Латинським квадратом в математиці називається таблиця розміру $n \times n$ заповнена n різними елементами так, що в кожному стовпці і кожному рядку всі елементи зустрічаються по одному разу. Кожен латинський квадрат розмірності n може бути записаний за допомогою трійок *(r,c,s)*, де r – номер рядка, c – номер стовпця, s – елемент [3, 4]. Зрозуміло, що латинські квадрати можна зображувати квадратними матрицями n-го порядку.

Розглянемо латинський квадрат третього порядку поданий у вигляді матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сума двох матриць A , знову дасть матрицю латинського квадрату:

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Цікаво, чи одержимо матрицю латинського квадрату, якщо будемо додавати матриці, що відповідають різним латинським квадратам і мають однакову розмірність. Нехай маємо матриці латинських квадратів:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тоді за означенням операції додавання матриць отримуємо: $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ – матриця латинського квадрату.

Два латинських квадрати називаються ортогональними, якщо всі пари символів (a, b) різні, де a — символ в деякій комірці першого квадрата, а b — символ в тій же комірці другого квадрата. Прикладом ортогональних квадратів є матриці B та C . Неважко переконатись, що всі пари відповідних елементів є різними:

$$\begin{bmatrix} 33 & 44 & 55 \\ 45 & 53 & 34 \\ 54 & 35 & 43 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо суму ортогональних матриць B та C :

$$B + C = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 9 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ми одержали матрицю із визначником рівним 0, яка не є матрицею латинського квадрата. Отже, можна зробити припущення, що сума ортогональних матриць латинських квадратів на є латинським квадратом.

Розглянемо операцію піднесення матриці латинського квадрата до n-го ступеня, надаючи показнику ступеня значень $n = 2,3,4,...$ і з'ясуємо, який вигляд буде набувати результат.

При $n = 2$ маємо:

$A^2 = \begin{bmatrix} 50 & 47 & 47 \\ 47 & 50 & 47 \\ 47 & 47 & 50 \end{bmatrix}$ -не матриця латинського квадрату;

$n = 3$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 573 & 576 & 579 \\ 576 & 579 & 573 \\ 579 & 573 & 576 \end{bmatrix}$$ – матриця латинського квадрату.

Продовжуючи підносити до ступеня матрицю помічаємо, що:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 6918 & 6909 & 6909 \\ 6909 & 6918 & 6909 \\ 6909 & 6909 & 6918 \end{bmatrix}, \qquad A^5 = \begin{bmatrix} 82935 & 82944 & 82953 \\ 82944 & 82953 & 82935 \\ 82953 & 82935 & 82944 \end{bmatrix}.$$

Можна припустити, що непарні степені матриці латинських квадратів є латинськими квадратами, а парні степені – ні. Дане припущення вимагає доведення в подальшому, як лема чи, можливо, теорема.

Можна відмітити, що матриця, обернена до матриці латинських квадратів, також є латинським квадратом. Зокрема, для матриці A маємо:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{36} & \frac{1}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{13}{36} & -\frac{11}{36} \\ \frac{13}{36} & -\frac{11}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}.$$

З'ясуємо, чи буде розв'язок матричного рівняння в якому коефіцієнт і вільний член є матрицею латинського квадрата латинським квадратом? Наприклад, побудуємо і розв'яжемо матричне рівняння: $AX = C$,

де $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Зрозуміло, що $X = A^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} -\frac{11}{36} & \frac{1}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{13}{36} & -\frac{11}{36} \\ \frac{13}{36} & -\frac{11}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Одержана матриця нагадує латинський квадрат, але не виконується основна умова, що в кожному рядку і кожного стовпці елементи різні. Можливо існують такі комбінації латинських матриць коефіцієнту та вільного члену при якому розв'язок також буде латинським квадратом? Якого порядку будуть ці матриці? Це перспективні запитання подальшого розгляду.

Розглянуті операції можуть знайти широке практичне застосування в дизайні. Зокрема, якщо пронумерувати відтінки одного кольору в межах від 0 до 9, то застосовуючи латинський квадрат можна утворювати суміші відтінків і як результат – одержати ще інші цікаві відтінки, або побудувати мозаїчну картину і т. ін.

Висновки

В роботі розглянуто можливість виконання операцій над латинськими квадратами у матричній формі та з'ясовано особливості цих операцій. Зокрема, висунуто гіпотезу, що непарні степені матриці латинського квадрату є латинським квадратом, а парні степені – ні. Дана гіпотеза потребує подальшого математичного підтвердження чи спростування. Одержано результат, який демонструє, що обернена матриця латинського квадрату є латинським квадратом, однак розв'язок матричного рівняння, в якому коефіцієнт і вільний член є матрицею латинського квадрату не є латинським квадратом. Сформульовано перспективні запитання подальшого розгляду таких рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. CD BioSciences, Режим доступу: https://www.cd-clintrial.com/latin-square-design/ (дата звернення 02.12.2022).
2. Nada Lakic The application of latin square in agronomic research / Journal of Agricutural Sciences, Vol. 46, No 1. – 2001, P. 71-77.
3. LATIN SQUARE DESIGN (LS), Режим доступу: https://www.ndsu.edu/faculty/horsley/Latin_Square_(revised).pdf (дата звернення: 09.12.2022).
4. Latin Square Designs, Режим доступу: https://math.montana.edu/jobo/st541/sec3c.pdf (дата звернення: 13.12.2022)

Лисак Іван Іванович, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, 1234509876ivannn@gmail.com
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com
Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна -*** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Lysak Ivan I., municipal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, 1234509876ivannn@gmail.com
Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com
Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com