УДК 538.955+538.975

В.М.Бурдейний,
О.В.Бурдейна,
М.В.Скрипник

МИТТЄЄВЕ РОЗШИРЕННЯ ДВОМІРНОГО ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Досліджується багатоступінчасте розширення ізотропного двомірного квантового осцилятора, який моделює квантову точку з м'яким конфайнментом. Застосуванням стандартних методів квантової механіки встановлено рекурентну формулу для амплітуд і одержано замкнену форму для матричних елементів квантових переходів чим розв'язано проблему нестаціонарних хвильових функцій.

Ключові слова: осцилятор, конфайнмент, нестаціонарне рівняння Шредінгера, амплітуди переходів, матричні елементи.

Abstract

The multi-stage expansion reduced to abrupt frequencies changes of isotropic two-dimensional harmonic oscillator which serves as a soft confinement of quantum dot model has been investigated. By applying of Quantum Mechanics standard methods the amplitudes and matrix entrances were established. Compact expression for the dependent on time wave function has been found.

Key words: oscillator, confinement, general Shrëdinger equation, transition amplitude, matrix entrances.

Розвиток технології збудження і реєстрації швидкоплинних процесів привертає увагу до задач квантової механіки, які ще три-чотири десятки років тому викликали лише академічний інтерес. В першу чергу це стосується розширення чи стиск електронного газу під дією фемтосекундного лазерного випромінювання. Тривалість імпульсу настільки мала, що має місце адіабатична зміна квантового стану частинок. Динаміка частинки стає суттєво нестаціонарною, а тому її рух має бути описаний у термінах нестаціонарного рівняння Шредінгера.

Слід зауважити, що навіть у стаціонарному випадку для дослідження квантових станів необхідно звертатись до наближених методів. Тим більший інтерес становлять ті задачі, в яких динаміка описуються точними результатами.

Однією із таких задач, яка розв'язується у даній роботі, стосується імпульсного кілька кратного послідовного розширення квантового осцилятора, яким моделюється квантова точка з м'ягким конфайнментом з параболічним потенціалом[1]. При цьому середній розмір квантової точки залежить від коефіцієнта квазіпружної сили, яка, в свою чергу визначає частоту власних коливань осцилятора. Тому у моделі, яка тут розглядається, миттєве розширення квантового газу досягається імпульсною зміною частоти в послідовні моменти часу. Таким чином, у моменти часу $t = t_j$, $j = 1,2,3...$ має місце ступінчастий стрибок частоти:

$$\omega = \begin{cases} \omega_{j-1}, & t < t_j; \\ \omega_{j-1}\lambda_j, & t \geq t_j. \end{cases} \tag{1}$$

В силу відзначеної зміни частоти з часом динаміка електронів повинна описуватися нестаціонарним рівнянням Шредінгера[2]:

$$i\hbar\partial_t \Phi = \hat{H}(\lambda)\Phi \tag{2}$$

Рівняння (2) розв'язується стандартним методом, а саме, розділенням часової і просторових змінних з подальшим вибором загального розв'язку у формі розкладу по власних функціях стаціонарного хвильового рівняння. Відповідний ряд має вигляд нижче поданого співвідношення:

$$\Phi_s = \sum_{s_{j+1}} e^{-i\omega(m,s_{j+1};\lambda_{j+1})t} C(s;s_{j+1}) \Psi_{s_{j+1}m}(\lambda_{j+1};r,\varphi) \tag{3}$$

Важливо відзначити, що двомірний осцилятор описується однією єдиною частотою, що свідчить про осьову симетрію утримуючого потенціалу..В силу цієї ізотропності в системі полярних координат кутова змінна залишається циклічною. Це означає, що миттєве розширення чи стиснення не впливають на проекцію орбітального моменту на вісь симетрії. Асоційоване з нею магнітне квантове число m не змінюється при деформації потенціалу, що дозволяє у розкладі (3) , як і у подальших співвідношеннях, опустити відповідний індекс.

Представлення рядом (3) має місце при $t \geq t_j$. Цілком очевидно, що співвідношення з такою ж структурою, але відповідною іншому значенню масштабного фактору λ_j, можна записати і для моментів часу $t < t_j$. Неперервність хвильової функції при $t = t_j$ приводить до рекурентного співвідношення між коефіцієнтами $C(s; s_{j+1})$. Для цього слід прирівняти хвильові функції справа і зліва від точки розриву і використати ортонормованість власних функцій ізотропного осцилятора[2]

$$\Psi_{nm}(r,\varphi) = \frac{1}{L\sqrt{\pi}}\left[\frac{n!}{(m+n)!}\right]^{1/2} e^{il\varphi}\left(\frac{r}{L}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{2L^2}\right) L_n^{(m)}\left(\frac{r^2}{L^2}\right) \tag{4}$$

Тут $L = \sqrt{\hbar / M\omega}$ - характерна довжина згасання осциляторних хвильових функцій.

Процедура проектування на систему функцій (4) дійсно приводить до рекурентної формули, яка має такий вигляд:

$$C(s; s_{j+1}) = \sum_{s_j} e^{-i\left[\omega(m,s_j;\lambda_j) - \omega(m,s_{j+1};\lambda_{j+1})\right]t_j} C(s; s_j) T(s_j; s_{j+1}) \tag{5}$$

де матричний елемент переходу визначено співвідношенням:

$$T(s_j; s_{j+1}) = \int \Psi_{s_j m}(\lambda_j; r,\varphi) \Psi^*_{s_{j+1} m}(\lambda_{j+1}; r,\varphi) d^2\vec{r} \tag{6}$$

Підстановка хвильових функцій (4) після інтегрування по кутовій координаті дає результат, який зводиться до інтегрування з узагальненими поліномами Лаггера $L_j^{(m)}(\xi)$ [3]:

$$\begin{aligned} T(s_j; s_{j+1}) &= \frac{2}{L_j L_{j+1}}\left[\frac{s_j!}{(s_j+m)!}\right]^{1/2}\left[\frac{s_{j+1}!}{(s_{j+1}+m)!}\right]^{1/2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left\{\left[\frac{r}{L_j}\right]^m \left[\frac{r}{L_{j+1}}\right]^m L_{s_j}^{(m)}\left(\frac{r^2}{L_j^2}\right) L_{s_{j+1}}^{(m)}\left(\frac{r^2}{L_{j+1}^2}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{L_j^2} + \frac{1}{L_{j+1}^2}\right)\right]\right\} rdr \end{aligned} \tag{7}$$

Переходом до безрозмірної радіальної координати можна одержати:

$$\begin{aligned} T(s_j; s_{j+1}) &= \left(\frac{L_j}{L_{j+1}}\right)^{m+1} \left[\frac{s_j!}{(s_j+m)!}\frac{s_{j+1}!}{(s_{j+1}+m)!}\right]^{1/2} \times \\ &\times \int_0^\infty \xi^m L_{s_j}^{(m)}(\xi) L_{s_{j+1}}^{(m)}\left(\xi \frac{L_j^2}{L_{j+1}^2}\right) \exp\left[-\frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{L_j^2}{L_{j+1}^2}\right)\right] d\xi \end{aligned} \tag{8}$$

Формула (8) містить інтеграл, який зводиться до табличного [4]. Результатом інтегрування є остаточне співвідношення:

$$T(s_j;s_{j+1})=\left(\frac{L_j}{L_{j+1}}\right)^{m+1}\left[\frac{\left(s_j+m\right)!}{s_j!}\frac{\left(s_{j+1}+m\right)!}{s_{j+1}!}\right]^{1/2}\frac{2^{m+1}}{m!}\frac{\left(1-L_j^2/L_{j+1}^2\right)^{s_{j+1}}\left(L_j^2/L_{j+1}^2-1\right)^{s_j}}{\left(1+L_j^2/L_{j+1}^2\right)^{s_{j+1}+s_j+m+1}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left[-s_{j+1},-s_j;m+1,-\frac{4L_j^2/L_{j+1}^2}{\left(1-L_j^2/L_{j+1}^2\right)^2}\right] \qquad (9)$$

Тут ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)-$узагальнена гіпергеометрична функція[3]. З врахуванням того, що $L_{j+1}=L_j/\sqrt{\lambda_{j+1}}$ формула (9) зводиться до такого вигляду:

$$T(s_j;s_{j+1})=\left(\lambda_{j+1}\right)^{(m+1)/2}\left[\frac{\left(s_j+m\right)!}{s_j!}\frac{\left(s_{j+1}+m\right)!}{s_{j+1}!}\right]^{1/2}\frac{2^{m+1}}{m!}\frac{\left(1-\lambda_{j+1}\right)^{s_{j+1}}\left(\lambda_{j+1}-1\right)^{s_j}}{\left(1+\lambda_{j+1}\right)^{s_{j+1}+s_j+m+1}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left[-s_{j+1},-s_j;m+1,-\frac{4\lambda_{j+1}}{\left(1-\lambda_{j+1}\right)^2}\right] \qquad (10)$$

Відомо[3], що вироджена гіпергеометрична функція, в якій один із верхніх індексів, а саме це має місце у формулі(10), дорівнює цілому від'ємному числу зводиться до поліному, що стосовно матричних елементів приводить до остаточного результату:

$$T(s_j;s_{j+1})=\left(\lambda_{j+1}\right)^{(m+1)/2}\sum_{k=0}^{\min(s_{j+1},s_j)}\frac{\left[s_j!\left(s_j+m\right)!s_{j+1}!\left(s_{j+1}+m\right)!\right]^{1/2}}{\left(s_{j+1}-k\right)!\left(s_j-k\right)!}\times$$

$$\left.\times\frac{(-1)^{s_j+k}2^{2k+m+1}}{k!}\frac{\lambda_{j+1}^k\left(1-\lambda_{j+1}\right)^{s_{j+1}+s_j-2k}}{\left(1+\lambda_{j+1}\right)^{s_{j+1}+s_j+m+1}}\right] \qquad (11)$$

Отже, при будь-якій кількості каскадних розширень чи стиснень гармонічного осцилятора з відомим у кожному каскаді масштабуванням частоти за формулою (11) обчислюються матричні елементи переходів, після чого за рекурентними формулами (5) знаходяться амплітуди переходів. За відомими амплітудами встановлюється нестаціонарна хвильова функція (3), яка дозволяє обчислити середні значення динамічних операторів, зокрема енергії, дипольних моментів переходу як і моментів вищих порядків. Для випадку однократного адіабатичного розширення приклади таких обчислень приведені у повідомленні[5]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Hartmann Uwe, Fasgination Nanotechnologies, Verlag, 2006, pp.173

2.Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М., Квантовая механика, нерелятивистская теория, Физматиздат, М., 1963. 702

3.Abramovitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions,National Bureau of Standarts, N.-Y., 1964, 830

4.Прудников А.П..Брычков Ю.А.,Маричев О.И., Интегралы и яды, специальные функции,Физатгиз, М.-1983, 750

5.Burdeynyy V.- Chernysh V., Expanção instantânea de um ponto quaníco, Resumos de Conferencia International “Ciência e Technologias”,Maputo,Moçambique, 2016, 21-34.

Бурдейний Володимир Мефодійович,*кандидат фізико-математичних наук,доцент, професор кафедри загальної фізики, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця.* brdnvldmr@ukr.net

Бурдейна Олена Володимирівна*, магістр, старший викладач кафедри інтеграції навчання з виробництвом, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця,*

***Скрипник Микола Володимирович**,студент 2-го курсу, гр..2АКІТ-20б, ФАКСА, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця*

***Burdeinyy Volodymyr Mefodiyovych,** PhD in Physics and Mathematics, associated professor of General Physics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia , brdnvldmr@ukr.net*

***Burdyna Olena Volodumurivna,** M.S., senior lecturer, Department of integration of training with production, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia ,*

***Skrypnick Mukola Volodymyrovuch,** Second year student, gr.2AKIT-20b of FACSA, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia /*