

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 530

Г.П. ГОРСЬКИЙ, В.Г. ДЕЙБУК

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЧОТИРИСПНОВА МОДЕЛЬ УНІВЕРСАЛЬНОГО КВАНТОВОГО ВЕНТИЛЯ ФРЕДКІНА

Анотація. Розглянуто роботу квантового логічного вентиля Фредкіна на ядерному магнітному резонансі у випадку 4-х квантових бітів (КвБ), репрезентованих ядерними спінами. Знайдено оптимальні закони обмінної взаємодії між ядерними спінами, необхідні для чіткої роботи вентиля Фредкіна на суперпозиційних станах. Проаналізовано вплив на роботу вентиля Фредкіна частотного шуму та декогерентизації, зумовленої уширенням енергетичних рівнів системи КвБ за рахунок взаємодії з оточенням.

Ключові слова: спин, ядерний магнітний резонанс, квантовий біт, зворотний логічний вентиль Фредкіна, чіткість, декогерентизація.

Аннотация. Рассмотрена работа квантового логического вентиля Фредкина на ядерном магнитном резонансе в случае 4-х квантовых битов (КвБ), представленных ядерными спинами. Найдены оптимальные законы изменения обменного взаимодействия с расстоянием, необходимые для четкой работы вентиля Фредкина на суперпозиционных состояниях. Проанализировано влияние на работу вентиля Фредкина частотного шума и декогерентизации, обусловленной уширением энергетических уровней системы КвБ за счет взаимодействия с окружением.

Ключевые слова: спин, ядерный магнитный резонанс, квантовый бит, обратимый логический вентиль Фредкина, четкость, частотный шум, декогерентизация.

Abstract. There is considered the functioning of quantum logical Fredkin gate on nuclear magnetic resonance for case of 4 quantum bytes (QB) represented by nuclear spins. Optimal laws of nuclear spins coupling interaction distance variation which are necessary for accurate Fredkin gate functioning with superpositional states of QBs-system are ascertained. The influence of frequency noise and decoherentization due to broadening of energy levels caused by interaction with environment on Fredkin gate functioning are investigated.

Keywords: spin, nuclear magnetic resonance, quantum byte, reversible logical Fredkin gate, fidelity, frequency noise, decoherentization.

Вступ

Квантова інформатика є однією з найдинамічніших галузей сучасних знань [1,2]. Практична ж реалізація квантових обчислень гальмується проблемою пошуку оптимальних фізичних об'єктів, на яких можна було б реалізувати квантові логічні вентиля – ядро квантового процесора. Найбільш вивченими і практично реалізованими на сьогодні є квантові вентиля на основі ядерного магнітного резонансу (ЯМР) в твердих тілах, що виготовляються з використанням добре розроблених напівпровідникових нанотехнологій. Розсіяння тепла є важливим чинником при їх конструюванні, оскільки йдеться про зміну стану атомної системи. Звичайні логічні кола розсіюють тепло $\sim kT \ln 2$ Дж на кожен біт втраченої інформації, де k - стала Больцмана і T – абсолютна температура. Втрата інформації має місце у випадку, коли вихідна функція такого незворотного кола не бієктивна, тобто вхідний вектор не може бути відновлений за вихідним. Зворотні логічні кола теоретично розсіюють нульову енергію, оскільки вхідні стани однозначно визначаються вихідними станами. Зворотна логіка [2] використовується не лише в квантовому комп'ютингу, але й у низькопотужній (КМОН) схемотехніці, нанотехнології, оптичній обробці інформації та біоінформатиці. В даній роботі досліджується робота зворотного вентиля Фредкіна, який порівняно з іншими зворотними елементами зберігає парність і є універсальним. Різні аспекти роботи вентиля Фредкіна на 3-х КвБ розглянуто нами в статті [3]. В ній, зокрема, показано, що вентиль Фредкіна на 3-х КвБ чітко працює на суперпозиційних станах, якщо обмінна взаємодія між 1-м і 3-м спінами складає не менше 0.02 від обмінної взаємодії найближчих КвБ. Цей результат збігається з одержаним для вентиля Тоффоли [4], що не дивно, оскільки дію вентиля Фредкіна при різному вмісті обмінюваних КвБ можна розглядати, як послідовну дію двох вентилів Тоффоли. Однак при більшій кількості розрядів (КвБ) виникає питання про оптимальний закон взаємодії між ядерними спінами, що репрезентують КвБ, а, отже, і про вибір матеріалів, в яких цей закон реалізується. Окрім того, залишається актуальним питання про точність керування системою за допомогою радіочастотного магнітного поля (РЧМП), тобто питання про вплив частотного шуму і декогерентизації на роботу вентиля Фредкіна як універсального логічного елемента.

Нагадаємо, що вентиль Фредкіна – це вентиль, котрий обмінює вміст 2-х КвБ у випадку, коли 3-й КвБ (контролюючий) перебуває в стані логічної 1. В системі з 4-х КвБ розглянемо лише випадки обміну вмісту найстаршого КвБ з будь-яким із трьох інших, у випадках, коли принаймні один з 2-х КвБ, які не беруть участь в операції обміну, і, отже, можуть розглядатись як контролюючі, перебуває в стані логічної 1. А це такі переходи: $0011 \rightarrow 1010$ ($3 \rightarrow 10$), $0011 \rightarrow 1001$ ($3 \rightarrow 9$), $0101 \rightarrow 1100$ ($5 \rightarrow 12$), $0101 \rightarrow 1001$ ($5 \rightarrow 9$), $0110 \rightarrow 1100$ ($6 \rightarrow 12$), $0110 \rightarrow 1010$ ($6 \rightarrow 10$), $0111 \rightarrow 1110$ ($7 \rightarrow 14$), $0111 \rightarrow 1101$ ($7 \rightarrow 13$), $0111 \rightarrow 1011$ ($7 \rightarrow 11$).

Спектр і динаміка системи

Сформульована задача розв'язується в рамках квантовомеханічної моделі Ізінга[1] для системи взаємодіючих між собою чотирьох спінів $\frac{1}{2}$, котрі перебувають під дією сильного статичного магнітного

поля (СМП) і керуючого слабкого поперечного РЧМП з круговою поляризацією. Гамільтоніан системи, тобто оператор повної енергії, має вигляд [4]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \tag{1}$$

де:

$$\hat{H}_0 = -\hbar \left\{ \sum_{k=0}^3 \omega_k I_k^z + 2J [I_0^z I_1^z + I_1^z I_2^z + I_2^z I_3^z + \alpha (I_0^z I_2^z + I_1^z I_3^z) + \alpha' I_0^z I_3^z] \right\}, \tag{2}$$

$$\hat{W} = -\hbar \Omega \sum_{k=0}^3 [I_k^+ \exp(i\omega t) + I_k^- \exp(-i\omega t)]. \tag{3}$$

У формулах (1) – (3) введено такі позначення: \hbar – стала Планка, поділена на 2π , I_k^z – оператор проєкції спіну k -го ядра на напрямок СМП, $\omega_k = \gamma B(z_k)$ – частота його прецесії у СМП з індукцією $B(z_k)$, J – вимірний в одиницях частоти параметр обмінної взаємодії найближчих сусідів, α та α' – відносні внески взаємодії сусідів через одного і через два, відповідно, $\Omega = \gamma b$ – частота осциляцій Рабі, b та ω – амплітуда та частота РЧМП, відповідно, I_k^+ та I_k^- – так звані оператори «підвищення» і «пониження» k -го спіну [3]. Така модель має 16 станів, які можуть бути занумеровані десятковими числами $n = 0, 1, \dots, 15$, кожному з яких поставимо у відповідність його двійкове зображення $(i_3 i_2 i_1 i_0)$, де вміст кожного розряду дорівнює 0 або 1, що відповідає орієнтації спіну за або проти напрямку СМП. Аналогічно до випадку 3-х КвБ [3,4] енергії, які відповідають базисним станам системи з 4-х КвБ, дорівнюють:

$$E_n \equiv E_{i_3 i_2 i_1 i_0} = -0.5\hbar \left\{ \sum_{k=0}^3 (-1)^{i_k} \omega_k + J [(-1)^{i_0+i_1} + (-1)^{i_1+i_2} + (-1)^{i_2+i_3} + \alpha ((-1)^{i_0+i_2} + (-1)^{i_1+i_3}) + \alpha' (-1)^{i_0+i_3}] \right\} \tag{4}$$

Енергетичну діаграму системи з можливими переходами під дією РЧМП та схеми розглянутих алгоритмів зображено на рис. 1а, а розглянуті алгоритми – на рис. 1б.

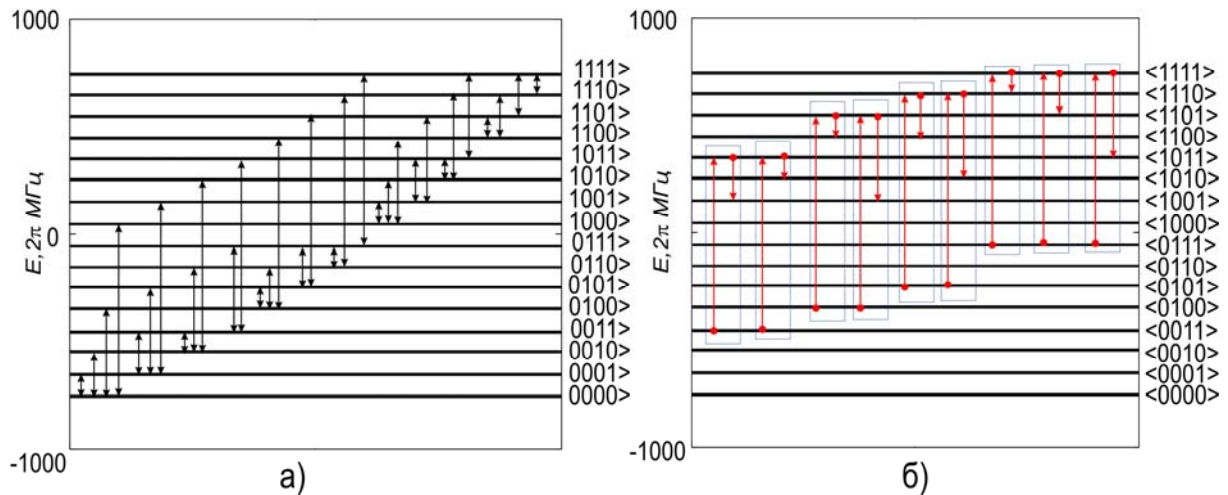


Рисунок 1 – Енергетична діаграма системи з можливими переходами при, $\omega_0 = 100$, $\omega_1 = 200$, $\omega_2 = 400$, $J = 5$ (в одиницях 2π МГц), $\alpha = \alpha' = 0,02$ (а) і схеми розглянутих алгоритмів (б)

Динаміка системи описується нестационарним (залежним від часу t) рівнянням Шредінгера (НРШ), яке має вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (5)$$

Враховуючи повноту системи функцій базисних станів, $|m\rangle \equiv |i_3 i_2 i_1 i_0\rangle$ розв'язок (5) подамо у вигляді:

$$\Psi = \sum_{m=0}^{15} C_m |m\rangle. \quad (6)$$

Тоді отримаємо таку систему 16-ти рівнянь відносно коефіцієнтів C_m :

$$i\hbar \dot{C}_n = E_n C_n + \sum_{m=0}^{15} W_{mn} C_m, \quad n = 0, 1, \dots, 15. \quad (7)$$

Матриця W_{mn} має такий вигляд:

$$W_{mn} = -\frac{\hbar\Omega}{2} [\exp(i\omega t) (\delta_{m,n-1} + \delta_{m,n-2} + \delta_{m,n-4} + \delta_{m,n-8}) + \text{e.c.}], \quad (8)$$

де скорочення «e.c.» означає операцію ермітового спряження.

У формулі (5) аргументи δ -символів Кронекера мають бути додатними, причому член з $\exp(i\omega t)$ відповідає інверсії будь-якого одного з розрядів з 0 в 1, а ермітово-спряжений член – навпаки. Така структура даної матриці пояснюється тим, що під дією РЧМП можливі лише переходи з інверсією будь-якого одного з розрядів (КвБ), причому переходи з нижчих рівнів на вищі – це переходи з поглинанням енергії РЧМП, а обернені переходи – це переходи з її випромінюванням. Система рівнянь (7) чисельно розв'язується при заданому початковому стані повністю аналогічно, як це робилось у статті [3], де показується, що вентиль Фредкіна між чіткими «цифровими» станами при настроюванні частоти РЧМП у резонанс відповідно до схеми на рис.1б спрацьовує за два π -імпульси тривалістю π/Ω .

Визначення оптимального закону взаємодії між КвБ

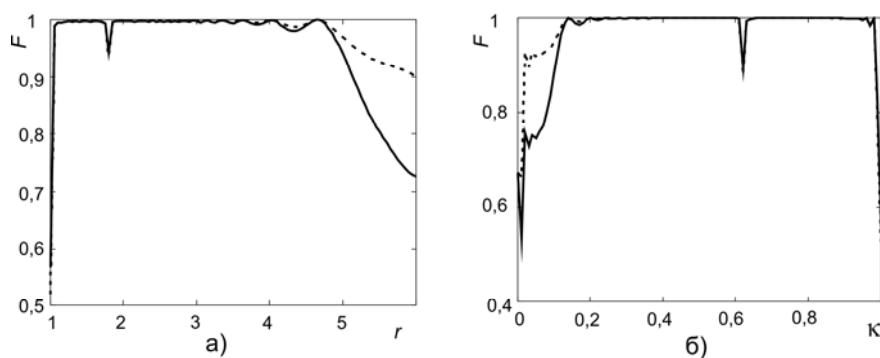
Зовсім інша ситуація має місце у випадку суперпозиційних станів, використання котрих вкрай необхідне для реалізації переваг квантового паралелізму [6,7]. Як і у випадку 3-х КвБ [3,5] можна показати, що вентиль Фредкіна спрацьовує чітко за два π -імпульси, якщо тільки $\alpha = \alpha' \geq 0.02$ (при параметрах системи, зазначених на рис.1). Однак враховуючи екранування обмінної взаємодії, рівність α і α' неможлива. Тому виникає питання про оптимальний закон взаємодії між КвБ і про вибір матеріалів, при використанні яких для фізичної реалізації квантового регістру (КР) цей закон забезпечується. У даній роботі ми розглянули три варіанти закону взаємодії: степеневий, при якому $\alpha = 2^{-r}, \alpha' = 3^{-r}$ (r – безрозмірний показник зміни обмінної взаємодії з відстанню), експоненціальний, при якому $\alpha = \exp(-\mu), \alpha' = \exp(-2\mu)$, причому $\mu = d/r_0$, де d – відстань між найближчими КвБ, r_0 – радіус екранування обмінної взаємодії, і комбінований, при якому $\alpha = 2^{5/2} \exp(-2\chi), \alpha' = 3^{5/2} \exp(-4\chi)$, де $\chi = d/a_B$, a_B – перший Борівський радіус у напівпровіднику [8,9]. Оскільки $\alpha' < \alpha < 1$, то мінімальне значення χ , при якому комбінований закон справедливий, дорівнює 0.867. Таке значення χ отримується з вимоги рівності α одиниці, що відповідає, по суті, відсутності екранування взаємодії на мінімальній відстані між КвБ.

Можна показати [3,5], що у випадках степеневого та експоненціального законів при належному виборі параметрів r або μ ми маємо достатньо чітко визначений вентиль Фредкіна для більшості алгоритмів, зображених на рис.1б. Це ілюструється таблицею 1, де r_{\max} і μ_{\max} – відповідно найбільші показники степеня та експоненти, при яких досягається максимальна чіткість, $F_{1\max}$ та $F_{2\max}$ для рівномірної та нерівномірної суперпозиції початкових станів. (Під чіткістю розуміють модуль скалярного добутку комплексних векторів очікуваного і реального станів системи [4]; якщо вони співпадають, чіткість дорівнює 1, в іншому випадку вона менша за 1). У випадку рівномірної суперпозиції всі стани заповнені з однаковою імовірністю рівною 1/16. В якості нерівномірної суперпозиції вибрано таку, при якій для кожного алгоритму вигляду $A \rightarrow B \rightarrow C$ стани B і C вільні, а решта, включаючи A – заповнені з однаковою імовірністю рівною 1/14.

Таблиця 1 – Залежність чіткості F спрацювання вентиля Фредкіна на 4-х КвБ від законів зміни обмінної взаємодії

Алгоритм	Степеневий закон			Експоненціальний закон		
	r_{\max}	$F_{1\max}$	$F_{2\max}$	μ_{\max}	$F_{1\max}$	$F_{2\max}$
3-11-10	3.60	0.998809	0.999136	1.966	0.999877	0.999924
3-11-9	3.55	0.886824	0.870311	1.897	0.884489	0.868859
5-13-12	3.60	0.998800	0.999124	1.897	0.999874	0.999922
5-13-9	3.50	0.886694	0.872868	1.897	0.881176	0.866486
6-14-12	3.55	0.887451	0.871004	1.966	0.886527	0.871232
6-14-10	3.60	0.999285	0.999190	1.966	0.999941	0.999932
7-15-14	3.60	0.999141	0.999487	1.966	0.999885	0.999927
7-15-13	3.60	0.999407	0.999486	1.966	0.999942	0.999938
7-15-11	3.60	0.999598	0.999546	1.966	0.999945	0.999939

Типову залежність чіткості від показника r при степеневому законі та від параметру $\kappa = \exp(-\mu)$ при експоненціальному законі зображено на рис.2. Ідеально чіткому спрацюванню вентиля Фредкіна відповідає $F=1$. При цьому суцільна лінія на кожному з графіків відповідає рівномірній суперпозиції, а пунктирна – нерівномірній.

Рисунок 2 – Типова залежність чіткості F спрацювання вентиля Фредкіна від показника r при степеневому законі зміни обмінної взаємодії з відстанню (а) і від параметра $\kappa = \exp(-\mu)$ при експоненціальному законі (б)

Таким чином, ми бачимо, що задовільну чіткість роботи елемента Фредкіна при степеневому законі зміни обмінної взаємодії з відстанню можна забезпечити лише при $r \leq 3.6$, в той час, як зазвичай вважається, що для обмінної взаємодії між спінами у диполь-дипольному наближенні $r=6$ [7]. Тому навіть при 3-х КвБ для комп'ютера на ЯМР виникає необхідність проміжної корекції похибок, оскільки $2^{-6} < 0.02$. У випадку експоненціального характеру взаємодії ситуація краща, оскільки, для матеріалів, де цей закон реалізується, $\mu \ll 1$, оскільки за самим змістом сталої екранування як макроскопічного параметру повинно бути $r_0 \gg d$, тоді обмінна взаємодія може спадати досить повільно. З рис.2б видно, що ми можемо мати $F \approx 1$ не лише при $\mu = 1.897 \div 1.966$, тобто при $r_0 = 0.509 \div 0.527d$, як це зазначено в табл.1, але й при $\mu = 0.223$, тобто при $r_0 = 4.48d$. Однак навіть у цьому випадку для деяких алгоритмів необхідні процедури корекції.

Типовий графік залежності чіткості спрацювання вентиля Фредкіна від χ при комбінованому законі обмінної взаємодії для алгоритмів, для яких з вибраною точністю обчислень досягається чіткість, рівна 1, зображено на рис.3а, а для інших – на рис.3б.

Аналіз, виконаний для розглянутих алгоритмів з врахуванням області справедливості комбінованого закону ($\chi \geq 0.867$), показує, що для алгоритмів максимальної чіткості $\chi = 1.675$ – найбільше значення при якому чіткість спрацювання дорівнює 1 для обох суперпозицій. Отже, для іонів фосфору в кремнії при $a_B = 3$ нм $d = 5.03$ нм. Для решти алгоритмів при цьому ж значенні χ вона дорівнює 0.882 при рівномірній і 0.867 при нерівномірній суперпозиції.

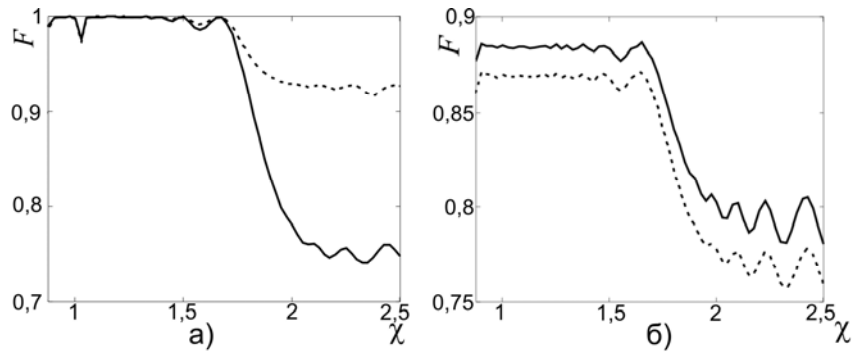


Рисунок 3 – Типові залежності чіткості спрацювання вентиля Фредкіна від параметру χ при комбінованому законі обмінної взаємодії для рівномірної (суцільна крива) і нерівномірної (пунктирна крива) суперпозицій: а) – для алгоритмів 3-11-10, 5-13-12, 6-14-10, 7-15-11, 7-15-13, 7-15-14 б) – для алгоритмів 3-11-9, 5-13-9, 6-14-12)

Вплив частотного шуму на роботу елемента Фредкіна

Аналіз впливу частотного шуму на роботу елемента Фредкіна на 4-х КвБ виконувався для трьох видів шуму[3]: 1) неточності настроювання частоти генератора РЧМП, коли $\omega = |\omega_{LM}|(1 + \eta_1)$, де ω_{LM} – резонансна частота переходу між рівнями L і M , η_1 – відносна похибка настроювання; 2) неконтрольованого зсуву енергетичних рівнів системи під дією взаємодії з оточенням, коли енергії рівнів $E'_k = E_k + \eta_2(E_k - E_{k-1})$, причому ми вважали, що рівень з $k = 0$ не зсувається; 3) скінченої ширини смуги керуючого сигналу, коли $\omega = |\omega_{LM}|Ga(1, \eta_3)$, де $Ga(1, \eta_3)$ – функція генерування нормально розподілених випадкових чисел з центром 1 і стандартним відхиленням (СтВ) η_3 . Типові графіки, що ілюструють вплив параметрів η_1, η_2 на ймовірність правильного спрацювання вентиля Фредкіна за 2π -імпульси наведено на рис. 4 а,б.

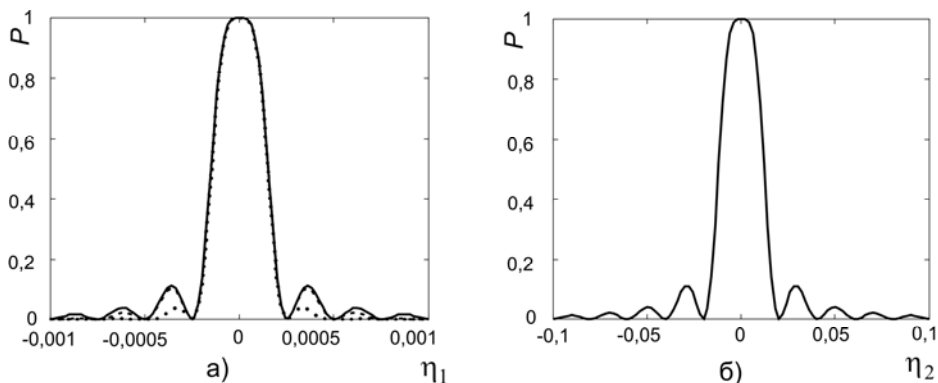


Рисунок 4 – а) – залежність ймовірності отримання правильної відповіді від η_1 для алгоритмів максимальної чіткості 7→15→14 (суцільна крива), 7→15→13 (пунктирна крива), та 7→15→11 (точкова крива) при $\Omega = 0.1$ (в одиницях 2π МГц), б) – типова залежність ймовірності правильної відповіді від η_2 для алгоритмів, для яких не досягається максимальна чіткість.

З рисунка 4а видно, що для алгоритмів з максимальною чіткістю ймовірність правильної відповіді спадає до 0.5 при $\eta_1 \approx \pm 1.25 \cdot 10^{-4}$. Побічні максимуми для них відповідно досягаються при значеннях η_1 , рівних $\pm 3.6 \cdot 10^{-4}$ для алгоритмів 7→15→14 і 7→15→13 та $\pm 3.4 \cdot 10^{-4}$ для алгоритму 7→15→11. Значення ймовірностей правильної відповіді в побічних максимумах для розглянутих алгоритмів дорівнюють, відповідно, 0.111361, 0.103133 та 0.039. Що ж стосується залежності ймовірності правильної відповіді від η_2 (рис.4б), то для більшості розглянутих алгоритмів вимоги до допустимого зсуву енергетичних рівнів майже ті самі, що у випадку 3-х КвБ, а саме, ймовірність правильної відповіді спадає до 0.5 при $\eta_2 = \pm(0.012 \div 0.013)$, а побічні максимуми дорівнюють $0.108 \div 0.111$ при $\eta_2 = \pm(0.028 \div 0.032)$. Однак істотна відмінність від випадку 3-х КвБ полягає в тому, що у випадку 4-х КвБ існують «особливі» алгоритми, для котрих в розглянутому діапазоні η_2 ймовірність правильної відповіді дорівнює одиниці або

дуже мало відрізняється від неї. Це алгоритми 6→14→12, 5→13→9, 7→15→14, 7→15→11. Втім, судити про обмеження на зсув енергетичних рівнів слід не за цими «особливими», а за «звичайними» алгоритмами.

Залежність середньої ймовірності правильної відповіді P та її стандартного відхилення (СтВ) S , обчислених за ансамблем з 20 реалізацій від відносної ширини смуги керуючого сигналу для алгоритму 7→15→14 приведено на рис. 5.

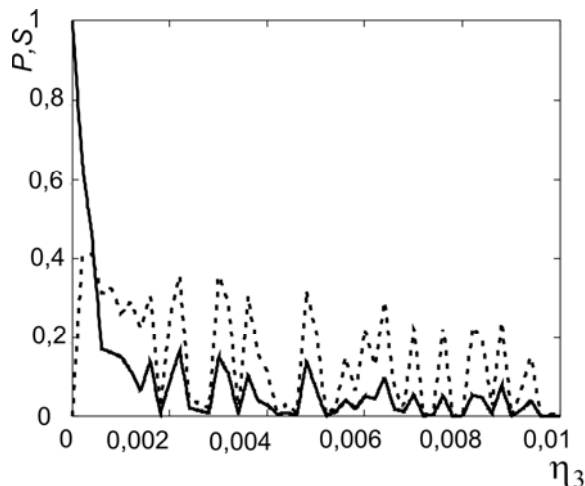


Рисунок 5 – Залежність середньої ймовірності правильної відповіді P та її СтВ S від відносної ширини смуги керуючого сигналу η_3 для алгоритму 7→15→14.

Критична відносна ширина смуги керуючого сигналу, при якій $P = S$ дорівнює $4.41 \cdot 10^{-4}$. Це приблизно у 1.25-2.5 рази менше, ніж у випадку 3-х КвБ[3]. Таблиця 2 ілюструє схожість і відмінність у впливі частотного шуму на роботу елемента Фредкіна на 3-х і 4-х КвБ.

Таблиця 2 – Порівняння впливу частотного шуму на роботу вентиля Фредкіна в системі з 3-х та 4-х КвБ

Чис-ло КвБ	$\eta_1(0.5)$	η_{1s}	$P(\eta_{1s})$	$\eta_2(0.5)$	η_{2s}	$P(\eta_{2s})$	η_{3c}
3	$\geq 3 \cdot 10^{-4}$	$\pm 6.6 \cdot 10^{-4}$	0.043	0.012	± 0.028	0.111	$(5 \div 16) \cdot 10^{-4}$
4	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$\pm 3.6 \cdot 10^{-4}$	0,111	$0.012 \div 0.013$	$\pm \begin{pmatrix} 0.028 \div \\ 0.032 \end{pmatrix}$	$0.108 \div 0.111$	$(4.146 \div 4.496) \cdot 10^{-4}$

Примітка: $\eta_1(0.5)$ та $\eta_2(0.5)$ – напівширини головних максимумів для першого і другого типів шумів відповідно; η_{1s} та η_{2s} – положення перших побічних максимумів для першого і другого типів шумів, відповідно; $P(\eta_{1s})$ та $P(\eta_{2s})$ – ймовірності правильного спрацювання вентиля Фредкіна в побічних максимумах, η_{3c} – критична напівширина смуги керуючого сигналу, при якій СтВ ймовірності правильної відповіді зрівнюється з самою середньою ймовірністю.

З табл.2 видно, що для вибраних параметрів системи при зростанні кількості КвБ вимоги до точності настроювання частоти керуючого сигналу і до відносної ширини його смуги істотно зростають, а вимоги до зсуву енергетичних рівнів практично не змінюються, тому що при зміні параметру η_2 система енергетичних рівнів залишається подібною самій собі. Характеристики «шумостійкості» 4-кубітового вентиля Фредкіна у випадку комбінованого закону подано в табл.3.

Таблиця 3 – Характеристики «шумостійкості» вентиля Фредкіна на 4-х КвБ при комбінованому законі обмінної взаємодії

$\eta_1(0.5)$	η_{1s}	$P(\eta_{1s})$	$\eta_2(0.5)$	η_{2s}	$P(\eta_{2s})$	η_{3c}
$(1.487 \div 1.519) \cdot 10^{-4}$	$\pm (3.2 \div 3.6) \cdot 10^{-4}$	$0.036 \div 0.111$	$0.012 \div 0.065$	$0.028 \div 0.040$	$0.105 \div 0.112$	$(4.147 \div 4.497) \cdot 10^{-4}$

З таблиці 3 випливає, що характеристики «шумостійкості» вентиля Фредкіна при комбінованому законі обмінної взаємодії мало відрізняються від характеристик для гіпотетичного випадку $\alpha = \alpha' = 0.02$ за винятком параметру $\eta_2(0.5)$, котрий для алгоритму $7 \rightarrow 15 \rightarrow 14$ є більшим за 0.1, а для алгоритмів $6 \rightarrow 14 \rightarrow 12$, $5 \rightarrow 13 \rightarrow 9$, $7 \rightarrow 15 \rightarrow 11$ є більшим за 0.06. При цьому для згаданих алгоритмів у випадку комбінованого закону ймовірність правильного спрацювання вентиля Фредкіна при зростанні відносного зсуву енергетичних рівнів η_2 знижується істотно швидше, ніж у гіпотетичному випадку $\alpha = \alpha' = 0.02$. Однак, оскільки про загальну «шумостійкість» було б правильним судити за мінімальним значенням η_2 , то при оптимальному значенні χ для комбінованого потенціалу при вибраних параметрах системи вона така ж, як і у гіпотетичному випадку $\alpha = \alpha' = 0.02$.

Вплив декогерентизації на роботу квантового вентиля Фредкіна

Розглянемо тепер вплив на роботу вентиля Фредкіна явища декогерентизації. Воно полягає в тому, що дисипативна взаємодія КвБ із зовнішнім середовищем призводить до втрати енергії. Внаслідок цього, знаходячись в якому-небудь зі збуджених станів, система намагається повернутись до стану з найменшою енергією, який відповідає логічним нулям в усіх розрядах КР. Таким чином, внаслідок декогерентизації втрати інформації можуть виникнути вже на етапі запису вхідних даних у КР. Декогерентизацію будемо описувати уширенням енергетичних рівнів Γ_k з допомогою співвідношень:

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_k = -i\eta_4(E_k - E_{k-1}), \quad k = 1 \dots 15. \quad (9)$$

Уявна одиниця з від'ємним знаком характеризує той факт, що при наявності дисипативної взаємодії з середовищем розглядувана система КвБ може перебувати у будь-якому зі збуджених станів скінченний проміжок часу, а не безмежно великий час, як у попередніх випадках. Типову залежність ймовірності правильного спрацювання вентиля Фредкіна від параметра η_4 зображено на рис.6.

Ймовірність правильної відповіді при $\alpha = \alpha' = 0.02$ знижується до 0.5 при $\eta_4 \approx (5 \div 6) \cdot 10^{-5}$. У випадку комбінованого потенціалу зниження ймовірності правильної відповіді до 0.5 відбувається при $\eta_4 \approx (5.2 \div 5.8) \cdot 10^{-5}$, тобто при переході до комбінованого потенціалу стійкість вентиля Фредкіна до декогерентизації змінюється мало.

Розглянемо, що означає отриманий результат для нашої системи, енергетична діаграма котрої зображена на рис.1, у випадку, коли ми маємо оптимальний степеневий закон взаємодії між КвБ. Тоді мінімальна відстань між рівнями системи складає $\Delta \nu = 94.492 \text{ МГц}$. Якщо уширення, наприклад, теплове, тобто порядку kT , то його критичному ступеню відповідає температура $T = 5 \cdot 10^{-5} h \Delta \nu / k = 2.27 \cdot 10^{-7} \text{ К}$. Навіть якщо користуватись не класичним, а квантовомеханічним виразом для енергії на одну коливну ступінь вільності при низьких температурах, виходячи, наприклад з формули Дебая [10], то ми отримаємо, що $T = \pi^{-1} \sqrt[4]{25 \cdot 10^{-5} h \Delta \nu T_D^3 / 3k} = 1.01 \text{ К}$, де температура Дебая $T_D = 645 \text{ К}$ (для кремнієвої матриці згідно [10]). Звідси видно, що квантовий процесор на ЯМР може працювати лише при дуже низьких температурах.

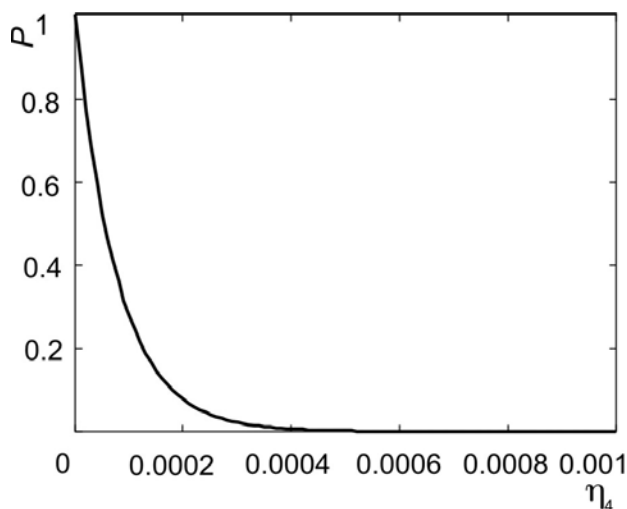


Рисунок 6 – Типова залежність ймовірності правильної відповіді для розглянутих алгоритмів від відносного уширення енергетичних рівнів η_4 .

Висновки

Таким чином, в статті встановлено оптимальні закони зміни обмінної взаємодії з відстанню, сприятливі для реалізації квантового комп'ютера на ЯМР. Це степеневий закон $J(r) \propto r^{-3.6}$ і експоненціальний закон $J(r) \propto \exp(-r/r_0)$, де радіус екранування $r_0 \geq 1.966d$, d – мінімальна віддаль між КвБ і комбінований $J(r) \propto r^{5/2} \exp(-2r/a_B)$, де $d = 1.675a_B$, a_B – Борівський радіус у напівпровіднику. Окрім того, показано, що збільшення кількості КвБ підвищує чутливість ймовірності правильного спрацювання вентиля Фредкіна до точності настроювання частоти РЧМП і до відносної ширини смуги керуючого сигналу. Чутливість до відносного зсуву і уширення енергетичних рівнів зі збільшенням кількості КвБ практично не змінюється. Аналіз впливу декогерентизації на роботу КК показує, що він може працювати лише при дуже низьких температурах. При цьому для складних алгоритмів, особливо в КР високої розрядності необхідно розробляти і реалізовувати процедури проміжної корекції результатів.

Список використаної літератури

1. McMahon D. Quantum computing explained./ D. McMahon. – Wiley-Interscience, 2008. – 332p.
2. De Vos A. Reversible Computing: Fundamentals, Quantum Computing, and Applications./ A. De Vos. – Wiley-VCH, 2010. – 252p.
3. Горський Г.П., Дейбук В.Г. Вплив частотного шуму на роботу квантового вентиля Фредкіна // Ком'ютинг. – 2010. – Т.9, N2. – С.118-126.
4. Lopez G.V., Lara L. Numerical simulation of controlled-controlled-not (CCN) quantum gate in a chain of three interacting spins system // J. Phys. B.: At. Opt. Mol. Phys. – 2006. – V.39, N9. – P.3897-3904.
5. Горський Г.П., Дейбук В.Г. Імітаційне моделювання роботи квантового вентиля Фредкіна в рамках спінової моделі Ізінга // Науковий вісник Чернівецького університету – 2009. – Вип.479. Комп'ютерні системи і компоненти. – С.16-20.
6. Бауместер Д. Физика квантовой информации / Д. Бауместер, А. Эккерт, А. Цайлигер – М.: Постмаркет, 2002. – 376с.
7. Валиев К.А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Успехи физических наук. – 2005. – Т.175, N1. – С.35-39.
8. Kane V.E. A silicon based nuclear spin quantum computer // Nature. – 1998. – V.393. – P.133-137.
9. Herring C. Asymptotic exchange coupling of two hydrogen atoms // Phys. Rev. A. – 1964. – V.134. – P.362-366.
10. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. / Киттель Ч. – М: Наука, 1978. – 792с.

Стаття надійшла до редакції: 25.01.11.

Відомості про авторів

Дейбук Віталій Григорович – д.ф.-м.н., професор кафедри комп'ютерних систем і мереж, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського 2, 58012, Чернівці, Україна, v.deibuk@chnu.edu.ua.

Горський Геннадій Петрович – магістр, здобувач кафедри комп'ютерних систем і мереж, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського 2, 58012, Чернівці, Україна, gena_grim@mail.ru.