

## ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ БРУСА ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ

Вінницький національний технічний університет

**Анотація.** В роботі представлено методи розв'язання задачі оптимального проектування бруса в умовах прямого поперечного згину. Виконано дослідження історичних умов виникнення проблеми, її авторське розв'язання та аналітичний підхід до її розв'язування пошуком екстремуму функції моменту опору. Запропоновано застосування метода пошуку максимального (мінімального) значення функції для систем задач при проектуванні довільного поперечного перерізу бруса при згині.

**Ключові слова:** теорія згину, проектування параметрів прямокутного перерізу, момент опору, історія розв'язання задачі, пошук екстремальних значень функції.

**Abstract.** The paper presents methods for solving the problem of optimal beam design in the conditions of direct transverse bending. A study of the historical conditions of the problem, its author's solution and an analytical approach to its solution by finding the extremum of the resistance moment function. The application of the method of finding the maximum (minimum) value of the function for problem systems in the design of an arbitrary cross section of the beam during bending is proposed.

**Keywords:** bending theory, design of rectangular cross-section parameters, moment of resistance, history of problem solving, search of extreme values of function.

Початок виникненню науки про опір матеріалів поклав Г. Галілей. Вперше в його роботі було сформульовано питання про необхідність застосування аналітичних методів розрахунку замість емпіричних правил. Він також розробив методика проведення дослідів по абсолютному опору розриву. Вперше Г. Галілей розглянув задачу про згин консольної балки і ввів поняття «напруження». При цьому великий вчений робить одну помилку, вважаючи, що нейтральна лінія знаходиться на внутрішній поверхні деформованої балки. З цього випливає логічним шляхом невірне значення для моменту опору балки з прямокутним перерізом. Наступним важливим кроком в дослідженнях деформацій в умовах простих видів навантаження було встановлення в 1660 р Р. Гуком. Він встановив лінійну залежність між навантаженням та переміщенням та сформулював закон «*Ut tension sic vis*» «Какова сила, такава деформація» [1]. Цей закон вперше був опублікованим у 1676 р. у формі анаграми «*ceiioosssttuv*». У 1680 р французький фізик і механік, засновник Французької АН Едмон Маріотт незалежно від Гука сформулював закон про прямолінійну залежність між навантаженням та деформацією та розповсюдив його на випадок згину. Маріотт виправив помилку Г. Галілея, прийнявши інший закон розподілу напружень при згині, і помістив нульову точку напружень у середині висоти прямокутного перерізу, визнавши тим самим наявність стислих волокон по інший бік від нульової лінії балки. Проте через допущені помилки він вважав, що на момент опору перерізу балки це не впливає. Цікаво, що і Г. Галілей, й Е. Маріотт вважали, що прийняті ними припущення про розподіл напружень залишаються справедливими при руйнуванні, і ставили задачу як визначення таких навантажень, які руйнують балку.

Правильне рішення задачі про згині балки прямокутного поперечного перерізу було дано А. Параном в 1713 р. Вперше Паран звернув увагу на те, що результати, отримані Маріоттом, справедливі тільки для балок прямокутного поперечного перерізу. Притримуючись прикладу Маріотта, він вважав, що епюр нормальних навантажень має нейтральні лінії які проходять через нижню точку поперечного перерізу, він порахував руйнівне навантаження для балки круглого поперечного перерізу. В другій роботі Паран прийняв другий варіант епюра Маріотта в виді двох трикутників і отримав правильні твердження для моментів сопроотивлення згину. Напевно, Паран розумів, що цією величиною неможна користуватися для розрахунку руйнівної сили.

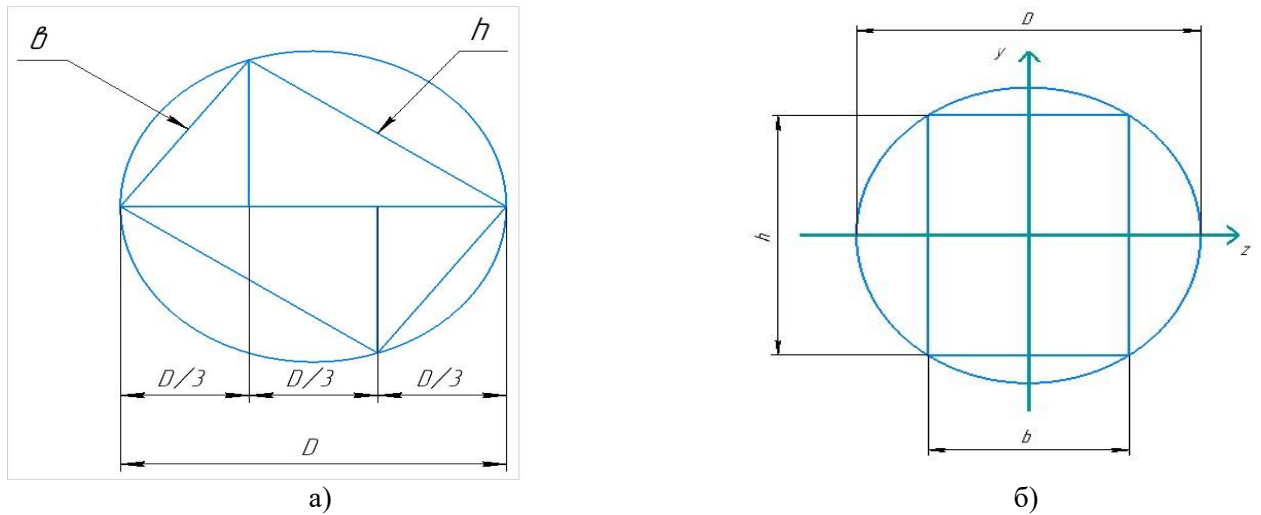


Рисунок 1 – епюри для розв'язання задач

Для цієї цілі він запропонував в випадку з балкою прямокутного поперечного перерізу епюру із двох неоднакових трикутників. Він помітив, що в поперечному перерізі консольної балки, нагруженою на кінці силою, виникає поперечна сила, по величині рівна прикладеній (Рис 1,а). Формульно це запишеться так:

Момент опору буде рівний

$$w = \frac{b \cdot h^2}{6}. (1.1)$$

З рисунка видно:

$$b^2 + h^2 = 4R^2 \Rightarrow h = \sqrt{4R^2 - b^2}, \text{ а } w = \frac{h^2 \cdot b}{6} = \frac{4R^2 - 3b^2}{6}. (1.2)$$

З рівняння вирази (1.1) і (1.2) ми можемо знайти b

$$b^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{4}{3}R^2} (1.3)$$

Знаючи величину b, величина h буде рівна

$$h^2 = 4R^2 - b \Rightarrow h^2 = 4R^2 - \frac{4}{3}R^2 = \frac{8}{3}R^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{8}{3}R^2} (1.4)$$

З цього випливає, що максимальний момент опору буде рівний:

$$w_{max} = \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6} R^3 = \frac{8}{9\sqrt{3}} R^3 (1.5)$$

Наведемо на прикладі задачі Парана сучасний підхід до проектування оптимального прямокутного перерізу балки із бруса заданого діаметру D (рис. 1, б). Момент опору для прямокутного перерізу балки задається формулою

$$W_z = \frac{bh^2}{6} (2.1)$$

З рис. 1, б за теоремою Піфагора маємо:

$$D^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = D^2 - b^2 (2.2).$$

Після підстановки (2.2) в (2.1) маємо

$$W_z = \frac{b(D^2 - b^2)}{6} = \frac{bD^2 - b^3}{6} (2.3).$$

Похідна від виразу (3) має вид

$$(W_z)' = \left( \frac{bD^2}{6} - \frac{b^3}{6} \right)' = \frac{D^2}{6} - \frac{b^3}{6} = 0. (2.4)$$

Прирівнявши вираз (2.4) до 0 отримаємо значення для b:

$$b = \frac{D}{\sqrt{3}}, \text{ або } b^2 = \frac{D^2}{3}. (2.5)$$

Після підстановки (2.5) в (2.2) отримали

$$h^2 = D^2 - \frac{D^2}{3} = \frac{2D^2}{3} \text{ або } h = D \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Співвідношення між висотою та основою прямокутного перерізу балки становить:

$$\frac{h}{b} = \frac{D \sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{D}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

Тобто при співвідношенні  $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$  для балки прямокутного перерізу маємо момент опору  $W_z$  максимального значення.

### Висновки

1. Виконано дослідження історичних умов виникнення проблеми міцності балки в умовах прямого поперечного згину.
2. Запропоновано авторське розв'язання задачі про пошук оптимального перерізу балки прямокутного перерізу з круглого бруса з відомим діаметром.
3. Виконано аналітичний підхід до її розв'язування, досліджено функцію моменту опору на екстремум.
4. Запропоновано застосування метода пошуку максимального (мінімального) значення функції для систем задач при проектуванні довільного поперечного перерізу бруса при згині.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Тимошенко С.П. Історія розвитку науки про опір матеріалів, 1918 – 450с.
2. Хан. Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её применения: Пер. с нем. – М. : Мир, 1988. – 344 с.
3. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: Вища шк. – 2004 – 655 с.
4. <https://core.ac.uk/download/pdf/33754525.pdf>
5. <https://cyberleninka.ru/article/n/kratkiy-istoricheskiy-obzor-istorii-razvitiya-soprotivleniya-materialov-kak-nauki/viewer>

**Соколовський Максим Євгенович** – студент групи 1ПМ–20б, факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [sokolovmaxys@gmail.com](mailto:sokolovmaxys@gmail.com)

**Sokolovsky Maxim Yevgenyevich** – Department of engineering and transport.

**Архіпова Тетяна Федорівна** – к.т.н., доцент кафедри опору матеріалів, теоретичної механіки та інженерної графіки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [tfarhipova@gmail.com](mailto:tfarhipova@gmail.com)

**Arkhipova Tetyana F.** – Ph. D. (Eng.), Docent of Strength of Materials, Theoretical Mechanics and Engineering Graphics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [tfarhipova@gmail.com](mailto:tfarhipova@gmail.com)