

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПОЗДОЖНЬОГО ЗГИНАННЯ ЗА АНАЛІТИЧНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Підібрано апроксимувальну функцію, що описує єдиною аналітичною залежністю $\varphi(\lambda)$ весь інтервал гнучкостей для заданого розрахункового опору і дає прийнятну для практики точність; розраховано коефіцієнти апроксимації.

Ключові слова: апроксимація, коефіцієнти поздовжнього згинання, гнучкість, аналітична залежність.

Abstract

An approximation function that describes with a single analytical dependence $\varphi(\lambda)$ the entire range of flexibilities for a given calculated resistance and gives acceptable accuracy for practice is selected; approximation coefficients are calculated.

Keywords: approximation, stress reduction factor, slenderness ratio, analytical dependence.

Вступ

У сьогоднішній значну частину серед усіх елементів конструкцій та деталей машин підприємства складають ті, що працюють на стискання: стержні ферм, колони, стійки, верхні пояси ферм, стяжні гвинти, гвинтові пружини, штоки поршневих машин тощо. Їх розраховують як на міцність, так і на стійкість, оскільки втрата останньої є небезпечною. Наслідком такого процесу може стати некерований ріст деформацій, за яких стиснутий стержень руйнується практично миттєво [1].

Методи розрахунку на стійкість, що знайшли поширення в будівельній практиці, опорі матеріалів ґрунтуються на використанні коефіцієнтів поздовжнього згинання φ , які, як правило, подаються в табличній формі, або у вигляді функцій [2-4] в залежності від механічних характеристик матеріалу та гнучкості стержня λ , що визначається за формулою

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} \quad (1)$$

де μ – коефіцієнт зведення довжини стержня, який залежить від способу закріплення його кінців;
 l – довжина стержня;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – мінімальний радіус інерції перерізу стержня (тут I_{\min} – мінімальний момент інерції;

A – площа поперечного перерізу стиснутого стержня) [4].

До недоліків використання табличних значень можна віднести очевидну незручність їх використання через необхідність застосування процедури інтерполяції та певну складність використання цифрових значень в автоматизованих комп'ютерних розрахунках. До недоліків розрахунків коефіцієнтів φ за запропонованими функціями в [2,3] можна віднести те, що вони не подані єдиною аналітичною залежністю у всьому інтервалі гнучкостей. Це теж дає незручність при їх використанні як в теоретичних так і автоматизованих розрахунках.

Існує декілька методів для реалізації апроксимації, але, як правило, користуються методом найменших квадратів, тобто зводять до мінімуму суму квадратів різниць між значенням функції, яка визначена обраною кривою, та таблицею. Зауважимо, що метод найменших квадратів розроблено Гауссом. Цей метод полягає у такому підборі аналітичного вигляду функції, щоб різниця квадратів абсцис експериментальних точок та відповідних значень функції була мінімальною [5].

Значимо, що в літературі [1,6] зустрічаються спроби подання єдиної функціональної залежності $\varphi(\lambda)$ у вигляді

$$\varphi = \frac{1}{(a\lambda^2 + b\lambda + c)^2 + 1}, \quad (2)$$

де a, b і c – коефіцієнти, які визначені для кожного табличного розрахункового опору сталі R .

В роботі [1] коефіцієнти a, b і c запропоновано узагальнити згідно такої апроксимації

$$(a, b, c) = k_0 + k_1 R + k_2 R^2, \quad (3)$$

де k_0, k_1 і k_2 – параметри, які враховують міцність сталі і визначаються за допомогою методу найменших квадратів для кожного з a, b і c ; R – розрахунковий опір сталі в МПа.

Здійснена нами перевірка показує значні відхилення результатів розрахунків за відповідними залежністю (2) від табличних значень, що інколи сягають більше 10% (табл. 1), що є неприпустимо для практичного застосування цих формул.

Таблиця 1 – Похибка (%) відхилень значень коефіцієнта φ , порохованого за (1) [1] від табличних значень [3]

Гнучкість стержня	Розрахунковий опір матеріалу, МПа											
	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640
10	-0,2	-0,6	-1,1	-1,3	-1,6	-1,8	-1,9	-2,0	-2,1	-2,2	-2,3	-2,3
20	-0,7	-1,2	-1,6	-2,0	-2,4	-2,7	-2,9	-3,3	-3,5	-3,7	-3,8	-3,9
30	-0,9	-1,2	-1,3	-1,4	-1,5	-1,4	-1,2	-1,1	-0,8	-0,4	-0,1	0,3
40	-0,7	-0,5	-0,1	0,5	1,1	1,8	2,7	3,6	4,6	5,6	6,7	7,8
50	-0,1	0,9	1,9	3,3	4,7	6,1	7,6	9,3	10,8	11,3	11,9	12,5
60	1,0	2,6	4,5	6,5	8,6	9,2	9,8	10,6	11,4	11,9	12,6	13,1
70	2,4	4,6	6,5	7,2	8,1	9,0	9,6	10,4	10,8	11,1	11,2	11,0
80	4,0	4,8	5,6	6,6	7,5	8,2	8,4	8,6	8,2	7,3	5,8	4,0
90	3,0	3,9	4,9	5,5	5,9	6,0	5,1	3,9	2,1	1,4	0,6	0,2
100	2,2	3,0	3,7	3,7	3,4	2,0	0,0	-0,5	-1,2	-1,7	-2,0	-2,3
110	1,5	2,0	2,0	1,1	-1,1	-2,0	-2,7	-3,0	-3,3	-3,6	-3,6	-3,5
120	0,8	0,8	-0,6	-2,6	-3,5	-3,9	-4,7	-4,5	-4,6	-4,3	-4,3	-4,5
130	0,0	-1,2	-3,5	-4,5	-4,9	-5,4	-5,5	-4,9	-5,0	-5,2	-4,8	-4,0
140	-1,0	-3,6	-4,9	-5,4	-5,4	-5,3	-5,4	-5,4	-4,7	-4,4	-4,3	-4,4
150	-3,2	-4,7	-5,3	-5,4	-5,4	-5,4	-4,8	-4,6	-4,8	-4,0	-3,9	-4,1
160	-4,0	-4,9	-5,0	-4,9	-5,1	-4,6	-4,3	-3,7	-3,4	-3,3	-3,2	-3,2
170	-3,8	-4,2	-4,3	-4,0	-3,6	-3,6	-2,7	-3,1	-2,9	-2,8	-2,5	-2,2
180	-2,8	-3,0	-3,0	-2,8	-2,3	-1,9	-1,9	-1,7	-1,3	-1,0	-1,4	-0,6
190	-1,8	-1,6	-1,2	-1,0	-1,0	-0,9	0,0	-0,7	-0,2	-0,6	-0,6	-0,6
200	0,0	0,4	0,6	1,0	0,7	0,5	1,6	1,0	0,7	0,7	1,4	0,8
210	1,8	2,4	2,6	2,6	2,9	2,7	3,0	2,6	2,8	2,2	2,3	2,5
220	4,2	4,8	5,1	4,9	5,0	5,0	3,2	4,5	3,9	4,1	3,5	3,2

Зауважимо, що подання узагальнюючої формули (3) для всього проміжку розрахункових опорів дає некоректний розрахунок для R більше 240 МПа із похибками більше 100 %, що нівелює її практичну цінність.

Тому залишається актуальним питання пошуку вдалих апроксимувальних функцій, що дають прийнятну для практики точність обрахунків (з похибкою не більше 2%) і описують єдиною аналітичною залежністю $\varphi(\lambda)$ весь інтервал гнучкостей для заданого розрахункового опору.

Метою роботи є пошук апроксимувальної функції та визначення її коефіцієнтів для розрахунку коефіцієнтів поздовжнього згинання φ в проміжку гнучкостей $\lambda = 10 \dots 220$ залежно від розрахункового опору $R = 200 \dots 640$ МПа із забезпеченням інженерної точності розрахунків порядку 2% до вихідних табличних даних.

Результати дослідження

Пошук єдиної аналітично залежності для заданого розрахункового опору можна здійснювати на основі раціональних функцій, поліномів заданого ступеня, степеневих та логарифмічних функцій тощо. До недоліків більшості із них можна віднести відсутність фізичного змісту коефіцієнтів апроксимації (як, наприклад, в поліноміальних функціях), чи високу похибку апроксимації (раціональні, логарифмічні) функції.

На сьогодні є досить велика кількість прикладних програм, що дозволяють аналізувати різні функції для вирішення поставленої задачі (Mathcad, Matlab, Origin, GraphPad тощо). Серед інших увагу привертає саме Origin [7] своїм потужним і інтуїтивно зрозумілим інструментарієм для подібного аналізу.

Шляхом перебору низки аналітичних функцій було обрано функцію під назвою BiDoseResp [7,8]:

$$\varphi(\lambda) = A_1 + (A_2 - A_1) \left[\frac{p}{1 + 10^{(k_1 - \lambda)h_1}} + \frac{1 - p}{1 + 10^{(k_2 - \lambda)h_2}} \right], \quad (4)$$

де $A_1, A_2, p, k_1, k_2, h_1, h_2$ – коефіцієнти апроксимації, λ – гнучкість.

Варто відмітити, що деякі із коефіцієнтів, зокрема, A_1, A_2 мають ясний фізичний зміст (A_1 – прямує асимптотично до певної константи φ , коли λ набуває великих значень (більше 220), A_2 – прямує до 1 при $\lambda = 0$).

Зауважимо також, що залежність, подібна до (4) знаходить своє застосування для математичного аналізу даних в літературі, наприклад у [9].

Коефіцієнти апроксимації в залежності (4) для різних розрахункових опорів сталі знайдено за допомогою методу найменших квадратів з подальшою статистичною обробкою даних і представлено в таблиці (2). Як видно з поданих у таблиці даних, скорегований R^2 складає майже для всіх випадків 0,9999, що підтверджує вдалий вибір функціонального виразу (4).

Розрахунок похибок відхилень розрахунку за формулою (4) від чисельних табличних даних [2] подано в табл. 3. Як видно з табл. 3 для переважної більшості обрахунків, відхилення складають значно менше 1% і тільки в поодиноких випадках несуттєво перевищують 1%. Для наочності, на рис. 1 відображено деякі результати обрахунку $\varphi(\lambda)$ – для прикладу показані апроксимації згідно (4) для розрахункових опорів $R = 200, 320, 520, 640$ МПа. Інші графіки не відображались для зручності сприйняття рисунку. Точками відмічені табличні дані, згідно [2]. Очевидно, що функція (4) із знайденими коефіцієнтами адекватно описує табличні дані з більш ніж достатньою для практики точністю. Отже, її можна рекомендувати для використання в відповідних інженерних розрахунках на стійкість центрально стиснутих стержнів.

Таблиця 2 – Коефіцієнти апроксимації рівняння (4)

Коефіцієнти апроксимації	Розрахунковий опір матеріалу, МПа											
	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640
A_1	0,122± 0,0185	0,108± 0,0225	0,0994± 0,0177	0,0873± 0,0177	0,0813± 0,0176	0,0748± 0,0126	0,0636± 0,0157	0,0624± 0,0133	0,0577± 0,0148	0,0542± 0,0116	0,0501± 0,0107	0,0489± 0,00999
A_2	1,06 ± 0,00705	1,05 ± 0,00655	1,05 ± 0,00701	1,04 ± 0,00670	1,04 ± 0,0086	1,04 ± 0,00690	1,03 ± 0,00697	1,03 ± 0,00775	1,02 ± 0,00841	1,02 ± 0,00700	1,02 ± 0,00586	1,02 ± 0,00624
k_1	100,9 ± 0,799	92,7 ± 0,782	86,4 ± 0,813	81,2 ± 0,851	77,1 ± 1,06	73,4 ± 0,799	70,3 ± 0,881	67,6 ± 0,999	65,2 ± 1,15	63,2 ± 0,924	61,1 ± 0,847	59,4 ± 0,836
k_2	208,2 ± 26,2	205,4 ± 20,0	198,1 ± 12,1	192,6 ± 9,35	184,7 ± 9,20	179,6 ± 7,08	175,002± 8,54	164,6 ± 11,2	156,7 ± 16,1	151,9 ± 14,9	143,03 ± 18,3	138,9 ± 19,0
h_1	-0,0118± 3,20·10 ⁻⁴	-0,0131± 3,47·10 ⁻⁴	-0,0144± 4,17·10 ⁻⁴	-0,0156± 4,56·10 ⁻⁴	-0,0170± 6,52·10 ⁻⁴	-0,018± 5,49·10 ⁻⁴	-0,0192± 6,36·10 ⁻⁴	-0,0206± 8,09·10 ⁻⁴	-0,0221± 0,00106	-0,023± 9,50·10 ⁻⁴	-0,0243± 0,00104	-0,0254± 0,00116
h_2	-0,0483± 0,100	-0,0327± 0,03702	-0,0282± 0,0223	-0,0229± 0,0139	-0,0216± 0,0135	-0,0203± 0,0091	-0,0172± 0,0079	-0,0168± 0,0074	-0,0156± 0,00756	-0,0152± 0,006	-0,0141± 0,00517	-0,0143± 0,00519
p	0,984 ± 0,0273	0,968 ± 0,0334	0,956 ± 0,030	0,939 ± 0,0329	0,928 ± 0,0389	0,921 ± 0,0303	0,903 ± 0,0397	0,892 ± 0,0451	0,876 ± 0,061	0,871 ± 0,0533	0,852 ± 0,0630	0,849 ± 0,0646
$Adj. R^2$	0,99986	0,9999	0,99988	0,9999	0,99983	0,99989	0,99989	0,99985	0,9998	0,99986	0,99988	0,99985

Таблиця 3 - Похибка (%) відхилень значень коефіцієнта φ , порахованого за (4) від табличних значень [2]

Гнучкість стержня	Розрахунковий опір матеріалу, МПа											
	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640
10	-0,25	-0,35	-0,36	-0,42	-0,52	-0,49	-0,53	-0,61	-0,67	-0,64	-0,66	-0,69
20	-0,17	-0,06	-0,12	-0,02	-0,01	0,05	0,12	0,21	0,24	0,34	0,38	0,46
30	0,13	0,25	0,33	0,48	0,60	0,65	0,71	0,84	0,93	0,83	0,88	0,93
40	0,39	0,47	0,55	0,57	0,74	0,61	0,56	0,49	0,50	0,21	-0,13	-0,40
50	0,42	0,40	0,40	0,20	0,06	-0,36	-0,79	-1,25	-1,52	-1,22	-0,85	-0,55
60	0,28	-0,03	-0,45	-0,99	-1,58	-1,02	-0,53	-0,05	0,22	0,30	0,17	-0,01
70	-0,31	-0,98	-1,21	-0,41	0,19	0,30	0,31	0,31	0,22	-0,06	-0,29	-0,41
80	-1,32	-0,52	0,30	0,40	0,48	0,26	-0,03	-0,19	-0,31	0,12	0,83	1,80
90	-0,05	0,42	0,53	0,40	0,20	-0,09	-0,03	0,57	1,37	1,24	0,92	0,20
100	0,61	0,71	0,32	0,001	-0,30	0,40	1,09	0,68	0,15	-0,19	-0,58	-1,04
110	0,64	0,27	-0,18	-0,22	0,83	0,62	-0,003	-0,38	-0,88	-0,99	-1,13	-1,40
120	0,26	-0,32	-0,09	0,53	0,13	-0,40	-0,62	-0,88	-0,99	-1,12	-0,88	-0,25
130	-0,22	-0,35	0,40	-0,02	-0,57	-0,58	-0,83	-0,84	-0,42	0,14	0,31	0,15
140	-0,72	-0,17	0,01	-0,44	-0,74	-0,84	-0,51	0,31	0,17	0,43	0,66	1,30
150	0,24	0,03	-0,35	-0,53	-0,36	0,10	0,05	0,56	1,33	0,88	0,99	1,46
160	0,25	-0,09	-0,41	-0,16	0,61	0,58	0,95	0,60	0,58	0,73	0,61	0,69
170	-0,06	-0,21	0,11	0,31	0,46	0,73	0,53	0,64	0,52	0,44	0,06	-0,36
180	-0,25	-0,05	0,40	0,59	0,26	-0,09	0,60	-0,40	-0,70	-1,17	-0,80	-1,79
190	0,14	0,23	0,19	0,08	-0,14	-0,34	-0,63	-0,66	-1,16	-0,87	-0,85	-1,14
200	0,02	-0,0004	-0,18	-0,62	-0,52	-0,53	-1,24	-1,00	-0,66	-0,83	-1,46	-0,98
210	-0,05	-0,23	-0,32	-0,34	-0,59	-0,49	-0,95	-0,31	-0,50	0,02	-0,04	-0,25
220	0,02	0,10	0,28	0,46	0,77	0,84	1,69	1,33	1,77	1,49	1,91	2,51

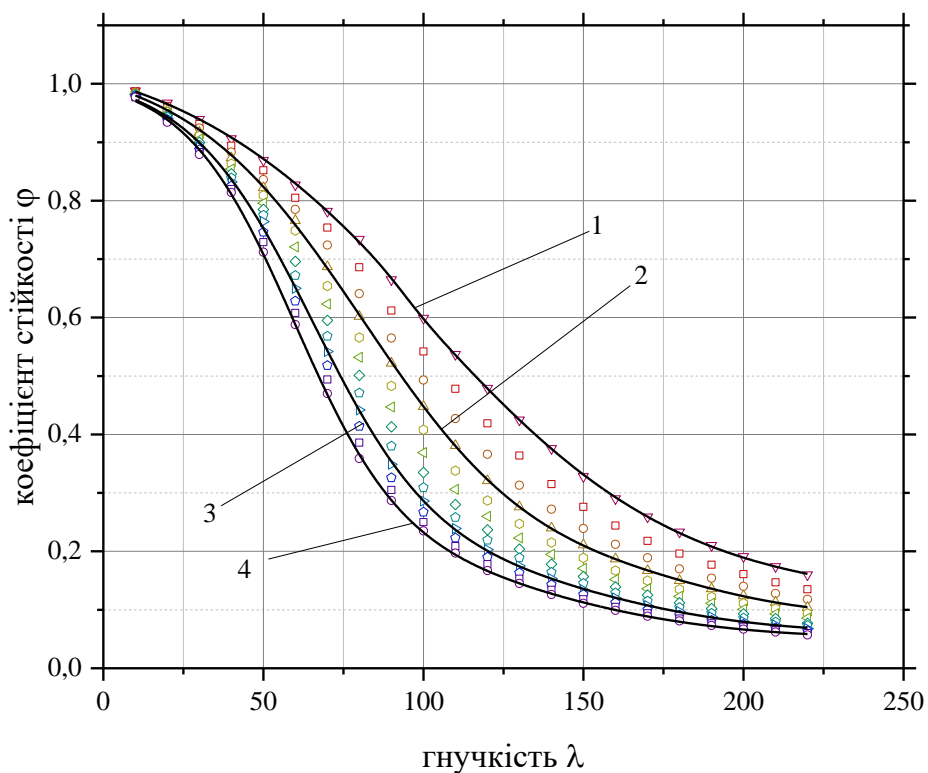


Рис. 1. – Фігурні позначення – табличні дані [2]; графіки 1,2,3,4 – залежності $\varphi(\lambda)$ для елементів із різним розрахунковим опором сталі для прикладу: 1 – 200 МПа; 2 – 320 МПа; 3 – 520 МПа; 4 – 640 МПа.

Висновки

Застосована аналітична апроксимація табличних даних у вигляді залежності (4) дозволяє здійснювати розрахунок коефіцієнтів φ поздовжнього згинання сталених стержнів в проміжку гнучкостей $\lambda = 10 \dots 220$ залежно від розрахункового опору $R = 200 \dots 640$ МПа із забезпеченням точності розрахунків з типовою похибкою менше 1%. Отже, її можна рекомендувати для використання у відповідних інженерних розрахунках на стійкість центрально стиснутих сталених стержнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кондель В. М. Дослідження коефіцієнтів поздовжнього згинання з урахуванням міцності сталі для запобігання надзвичайним ситуаціям / Шевченко, Ю. О.; Лобода, Д. О. // Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності. – 2016. – №13 – С. – 79–86.
2. СНиП П-23-81*. Стальные конструкции. – М.: Стройиздат, 1988. – 96с.
3. ДБН В.2.6-198:2014. Конструкції будівель і споруд. Сталеві конструкції. Норми проектування / Остаточна редакція. Видання офіційне. – Надано чинності з 1 січня 2015 р. – К.: Мінрегіонбуд України, 2014. – 199 с.
4. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев — Киев: Высшая школа, 1979. — 696 с.
5. Горошко Ю. В. Метод найменших квадратів та його реалізація засобами НІТ / Ю. В. Горошко // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. праць. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, – 2003. – Вип. 6. – С. 106-112.
6. Кондель В. М. Аналіз коефіцієнтів поздовжнього згину з урахуванням міцності сталі / В. М. Кондель, Ю. О. Шевченко, Д. О. Лобода // Вестник Харьковського національного автомобільно-дорожного університета : збірник наукових трудов. – Выпуск 72. – 2016. – С. 118 – 123.
7. <https://www.originlab.com/>
8. <https://www.graphpad.com/>
9. Pacheco-Torgal, F.; Start-Up Creation: The Smart Eco-Efficient Built Environment / Rasmussen, E.; Granqvist, C.G.; Ivanov, V.; Kaklauskas, A.; Makonin, S. – Woodhead, Cambridge, UK, 2016. – С. 254.

Грушко Олександр Володимирович — завідувач кафедри ОМТМІГ, доктор технічних наук, професор, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: grushko1alex@gmail.com.

Ковальчук Марія Олександрівна — студентка групи БМ-20б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: kovalchuckm9@gmail.com.

Hrushko Oleksandr V. — Head of Department of Materials Strength, Theoretical Mechanics and Engineering Graphics, Doctor of Technical Sciences, Professor, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: grushko1alex@gmail.com .

Kovalchuk Maria O. — Student of BM-20b group of the Faculty of Construction, Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail : kovalchuckm9@gmail.com.