УДК 621.396.621.59

А. Ю. Воловик
О.П. Червак
М.А. Шутило

ІНТЕГРАЛЬНИЙ КРИТЕРІЙ ВІДНОВЛЮВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Вінницький національний технічний університет.

Анотація
Метою даної роботи є теоретичне визначення поняття відновлюваності лінійних динамічних систем та його математичне обґрунтування в інтегральній формі. Критерій відновлюваності сформульовано на основі поняття матриці відновлюваності та подано у вигляді означення, межі його існування визначаються відповідною теоремою, ліквідність якої, доведена необхідними та достатніми умовами.
Ключові слова: відновлюваність лінійних динамічних систем, матриця відновлюваності, інтегральній форм критерію відновлюваності.

Abstract
The purpose of this paper is to theoretically define the concept of linear dynamic systems recoverability and to provide its mathematical justification in an integral form. The recoverability criterion is formulated on the basis of the recoverability matrix concept and presented in the form of a definition; the conditions for its existence are determined by the corresponding theorem with the proof of necessary and sufficient conditions.
Keywords: recoverability of linear dynamic systems, recoverability matrix, integral form of the recoverability criterion.

Вступ

Поняття керованості та відновлюваності є фундаментальними у сучасній теорії систем. Формулювання та дослідження цих понять базується на таких двох питаннях, що виникають із чисто фізичних міркувань:

1. Якими критеріями слід керуватися, щоб була можливість відновити поведінку вектора стану динамічної системи $\mathbf{s}(t)$ на заданому інтервалі часу за умови точно відомого керуючого впливу $\boldsymbol{u}(t)$ на цьому ж часовому інтервалі ?

2. За яких умов і якими критеріями слід керуватися, щоб перевести динамічну систему із заданого початкового стану $\boldsymbol{s}(t_0)$ у заданий кінцевий стан $\boldsymbol{s}(t_k)$ за обмежений час із використанням кусково-неперервного керування $\boldsymbol{u}(t)$?

Потреба у таких критеріях гостро постає при розгляді об'єктів з багатьма входами та виходами, оскільки вони у більшості практичних випадків є виродженими, а дослідження таких систем спряжено з труднощами суттєво більшими ніж для систем з одним входом та одним виходом. Поняття відновлюваності та керованості були уведені у загальну теорію систем Р. Калманом [1]. Ним же була доведена дуальність цих понять, що стало основою подальших досліджень [2,3,4]. Відзначена двоїстість корисна, як у теоретичному плані, так і в практичнім відношенні, оскільки базові поняття, визначення та теореми, що пов'язані, наприклад, із проблемою відновлюваності можна автоматично переносити на проблему керованості, і навпаки. З чисто практичних міркувань, задачі оптимального оцінювання і оптимального керування розв’язуються за допомогою однакового математичного інструменту – матричних рівнянь Ріккаті.

Відновлюваність неперервних лінійних систем

Припустимо, що у наявності є математична модель лінійної динамічної системи, яка виражена у термінах змінних станів:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{s}(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{s}_0 ; \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{s}(t),$$

де $\boldsymbol{s(t)}$ – вектор стану розміру $(n\times 1)$; $\boldsymbol{u(t)}$– вектор входу розміру $(p\times 1)$; $\boldsymbol{y(t)}$ – вектор виходу розміру $(m\times 1)$; $\boldsymbol{\Sigma}(t),\boldsymbol{\Gamma}(t),\mathbf{H}(t)$ – системні матриці відповідних розмірів. Вважаються точно відомими: вектор вхідного діяння $\boldsymbol{u(t)}$ у інтервалі спостережень $\left[t_0,t\right]$ та системні матриці $\boldsymbol{\Sigma}(t),\boldsymbol{\Gamma}(t),\mathbf{H}(t)$. Система спостережень має розмірність $(m\times n)$, причому $m < n$, тобто є змога вимірювати лише частину компонент вектора стану. Щоб залишатися у рамках детермінованого підходу, випадкові похибки спостережень у явній формі враховуватись не будуть, що означає наявність точних результатів спостережень.

Припустимо, що $\boldsymbol{u(t)}$ – точно відома функція часу для усіх $t \geq t_0$, однак $\boldsymbol{s(t_0)}$ – невідома величина. Необхідно визначити $\boldsymbol{s(t)}$ на основі спостережень $\boldsymbol{y(t)}$ у деякому обмеженому часовому інтервалі $[t_0, t_1]$. Очевидно, що якщо матриця $\boldsymbol{H(t)}$ є квадратною, має порядок $(n\times n)$ і несингулярна для усіх $t \geq t_0$, то питання відновлюваності $\boldsymbol{s(t)}$ вирішується тривіально на основі (2.6), як $\boldsymbol{s(t) = H^{1}(t)\, y(t)}$. Проте, якщо матриця $\boldsymbol{H(t)}$ є сингулярною для усіх $t \geq t_0$, або $\boldsymbol{H(t)}$ – прямокутна розміру $(m\times n)$, $m \neq n$, то стає незрозумілим, як можна визначити $\boldsymbol{s(\tau)}$ з $\boldsymbol{y(t)}$ при $t_0\leq\tau\leq t_1$ за деякого заданого t_1. Слід підкреслити, що коли значення $\boldsymbol{s(t_0)}$ – відоме, то значення $\boldsymbol{s(t)}$ можна визначати за формулою (1). З урахуванням цього зауваження, уведемо наступне означення відновлюваності [5]:

Означення 1. *Лінійна система (1) зі змінними параметрами називається відновлюваною, якщо можна визначати* $\mathbf{s}(t_0)$, *знаючи* $\mathbf{y}(t)$ *на часовому інтервалі* $t_0 \leq \tau\leq t_1$ *для деякого заданого кінцевого значення* t_1. *Якщо це справедливо для будь-якого* t_0, *то систему називають відновлюваною повністю.*

Критерій відновлюваності, необхідні та достатні умови визначаються теоремою:

Теорема 1. *Лінійна система (1) є відновлюваною тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця розміром* $(n \times n)$

$$\mathbf{N}_H(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{H}(t)\Phi(t,t_0)dt \tag{2}$$

є позитивно означеною для деякого заданого кінцевого значення $t_1 \geq t_0$.

Достатні умови. Суть доведення полягає у доказі того, що позитивної визначеності матриці $N_H(t_0, t_1)$ досить для обчислення $\boldsymbol{s(t_0)}$ за результатами спостережень $\boldsymbol{y(t)}$ на інтервалі $[t_0, t_1]$. Для цього звернемося до рівняння $\mathbf{s}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{s}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\boldsymbol{\Gamma}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$. Друга складова цього рівняння $\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\boldsymbol{\Gamma}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$ за умови точно відомого $\boldsymbol{u(t)}$ може бути обчислена апріорі і не містить інформації відносно властивості відновлюваності. У зв'язку з цим її можна усунути від подальшого розгляду і обмежитись аналізом лише однорідної лінійної системи

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \Sigma(t)\mathbf{s}(t), \quad \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{s}_0;$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)s(t). \tag{3}$$

Підставимо розв'язок однорідного диференційного рівняння $\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)s(t_0)$ у (3), тоді отримаємо вираз $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{s}(t_0)$. Отримане співвідношення не порушиться, якщо формально обидві його частини помножити на $\boldsymbol{\Phi^T}(t,t_0)\boldsymbol{H^T}(t)$ та виконати інтегрування в межах від t_0 до t_1

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{y}(t)dt = \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{H}(t)\Phi(t,t_0)dt\right]\mathbf{s}(t_0). \tag{4}$$

Якщо увести позначення $\mathbf{N}_H(t_0,t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{H}(t)\Phi(t,t_0)dt$, то з (4) безпосередньо випливає

$$\mathbf{s}(t_0) = \mathbf{N}^{-1}{}_H(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{y}(t)dt \tag{5}$$

за умови, що матриця відновлюваності $\mathbf{N}^{-1}{}_{H}(t_0,t_1)$ – не вироджена. цьому неважко переконатись, оскільки підінтегральний вираз для $\mathbf{N}_H(t_0,t_1)$ є симетричним, що гарантує невід'ємне значення інтегралу. Оскільки матриця $\mathbf{N}_H(t_0,t_1)$ є не виродженою та невід'ємною одночасно, то вона може бути тільки позитивно означеною і являє собою матрицю повного рангу n .

Необхідні умови. Доведення полягає у доказі того, що умова відновлюваності у обов'язковому порядку тягне за собою позитивну означеність матриці $\mathbf{N}_H(t_0,t_1)$ Застосуємо метод доведення від противного, тобто припустимо, що система відновлювана, проте матриця $\mathbf{N}_H(t_0,t_1)$ не є позитивно означеною для якогось іншого $\boldsymbol{s}_1(t_0)$, відмінного від нуля. У зв'язку з цим розглянемо квадратичну форму $\boldsymbol{s}_1^{\boldsymbol{T}}(t_0)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{H}}(t_0\ ,t_1)\boldsymbol{s}_1(t_0)$. Оскільки матриця відновлюваності з однієї сторони не є позитивно означеною, а з іншої сторони – у силу симетричності не може бути від'ємною, то вона є виродженою. Унаслідок виродження маємо рівність $\boldsymbol{s}_1^{\boldsymbol{T}}(t_0)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{H}}(t_0\ ,t_1)\boldsymbol{s}_1(t_0)=0$. Це означає, що (4) дорівнює нулю, тобто

$$\boldsymbol{s}_1^{\boldsymbol{T}}(t_0)\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{T}}(t,t_0)\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)dt=\boldsymbol{s}_1^{\boldsymbol{T}}(t_0)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{H}}(t_0\ ,t_1)\ \ \boldsymbol{s}_1(t_0)=0.$$

Звідси випливає, що

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)dt=0;\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)dt=0,\ \text{або}\ \ \boldsymbol{y}(t)=0\ \ \text{для}\ \ t_0\le t\le t_1.$$

Таким чином, встановлено, що існує інший, відмінний від нуля початковий стан $\boldsymbol{s}_1(t_0)$, який неможливо визначити, знаючи $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ у часовому інтервалі $t_0\le t\le t_1$, що суперечить припущенню про відновлюваність системи.

Критерій відновлюваності для лінійних стаціонарних систем набуває особливо простої форми, зручної з практичної точки зору. Сформулюємо його у вигляді наслідку з теореми 1.

Наслідок. *Неперервна лінійна система з постійними параметрами*

$$\dot{\mathbf{s}}(t)=\Sigma\mathbf{s}(t);\quad \mathbf{y}(t)=\mathbf{H}\mathbf{s}(t),\quad t\ge t_0 \tag{6}$$

називається повністю відновлюваною тоді і тільки тоді, коли матриця відновлюваності розміру (n × mn) є матрицею повного рангу, тобто

$$\text{rank}\,\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}{}_{H}=rank\left[\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}},\Sigma^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}},\ldots,\ (\Sigma^{\boldsymbol{T}})^{n-1}\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\right]=n. \tag{7}$$

Відомі форми доказів цього наслідку, засновані на розвиненні перехідної матриці у ряд Тейлора та висновків з теореми Келі–Гамільтона. Зокрема, прикладом альтернативної форми критерію відновлюваності може бути критерій відновлюваності за Розенброком [6].

Висновки

1. Визначено, що лінійна система зі змінними параметрами є відновлюваною тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця відновлюваності (2) розміром (n × n) є позитивно означеною для деякого заданого кінцевого значення часу.
2. Математично строго проведений доказ відповідної теореми на основі доведення необхідних та достатніх умови існування запропонованого критерію відновлюваності.
3. Виявлено, що спосіб обчислення матриці відновлюваності у інтегральній формі відновлюваності важко застосовувати на практиці через занадто складну форму та великий обсяг обчислень. Справу можна поправити, якщо перейти до його запису у диференціальній формі або у формі різницевих рівнянь.
4. Не зважаючи на складність інтегральної форми критерію, з точки зору теоретичних досліджень його рекомендується використовувати у обов'язковому порядку при реалізації різних форм фільтрів або відновників Луенбергера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Kalman R.E. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems.–J.SIAM, 1963, ser. A, vol. 1, P. 152.

[2] Воловик А.Ю., Кичак В. М. Теоретичні основи функціональних відновників діагностичного типу. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2018, №3, С. 109-118..

[3] Volovik A., Krylik L.; Kobylyanska I; KotyraA; Amirgaliyeva S. Methods of stochastic diagnostic type observers. Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments, 2018, Vol. 108082X4; 7 pages, doi: 10.1117/12.2501693.

[4] Volovyk A., Kychak V., Havrilov D. Discrete Kalman Filter Invariant to Pertur-bations. Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 18, No. 10, 2021, pp. 21-41, DOI: 10.12700/APH.18.10.2021.10.2.

[5] Volovyk A., Pyrih Y., Urikova O., Masiuk A., Shubyn B., Maksymyuk T. Dynamic System State Estimation with a Resilience to Observation Data Anomalies. Contemp. Math. 2023 Nov. 27. Volume 5 Issue 1 (2024) PP 1-18. DOI: https://doi.org/10.37256/cm.512024.

[6] Rosenbrock H. H. State-space and multivariable theory. // Nelson. London.1970., 257p.

Воловик Андрій Юрійович – канд. техн. наук, доцент кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: voland@vntu.edu.ua.

Червак Оксана Петрівна – провідний інженер кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: oksana_chervak@ukr.net.

Шутило Микола Артемович – провідний інженер кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

Volovyk Andrii U.– Ph.D. (Eng), Associate Professor of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: voland@vntu.edu.ua.

Chervak Oksana. P. – Senior Engineer of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: oksana_chervak@ukr.net.

Shutilo Mikola. A.– Senior Engineer of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.