УДК 512.534.5

А. А. Барковська,
В. Д. Дереч

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ІНВЕРСНОЇ НАПІВГРУПИ ІЗОМОРФІЗМІВ МІЖ ІНТЕРВАЛАМИ ЛІНІЙНО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ

ВНТУ

Анотація

В цій конференц-статті ми вивчаємо деякі властивості напівгрупи IIO_n, *тобто напівгрупи* ізоморфізмів між інтервалами n-елементної лінійно впорядкованої множини. Зокрема, ми описуємо ідеали, конгруенції, відношення спряженості і групу автоморфізмів цієї напівгрупи.

Ключові слова: ізоморфізм, ідеал, конгруенція, відношення спряженості

Abstract

In this conference paper, we study some properties of the semigroup IIO_n*, that is, the semigroup of isomorphisms between intervals of an n-element linearly ordered set. In particular, we describe ideals, congruences, conjugacy relations, and the group of automorphisms of the semigroup* IIO_n.

Keywords: isomorphism, ideal, congruence, conjugacy relation

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для будь-якого елемента $x \in S$ існує єдиний елемент x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо (див., наприклад [1]), що напівгрупа S є інверсною тоді і лише тоді, коли вона є регулярною і будь-які два її ідемпотенти комутують. Далі, нехай M – скінченна математична структура. Ізоморфізм між підструктурами структури M називають **локальним автоморфізмом** структури M. Множина всіх локальних автоморфізмів структури M відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює **інверсний моноїд локальних автоморфізмів** математичної структури M і позначається через $LAut(M)$. Основним джерелом інверсних напівгруп є інверсні моноїди локальних автоморфізмів тих чи інших математичних структур. Зокрема, якщо M є напівгрупою лівих (або правих нулів), то $LAut(M)$ є **симетричною інверсною напівгрупою**. Ця напівгрупа є основним прикладом інверсних напівгруп оскільки будь-яку інверсну напівгрупу (з точністю до ізоморфізму) можна подати як піднапівгрупу симетричної інверсної напівгрупи. Важливий клас інверсних напівгруп, пов’язаний з скінченною лінійно впорядкованою множиною. Отже нехай $X_n = \{1 < 2 < ... < n\}$ – лінійно впорядкована множина. Позначимо через POI_n інверсний моноїд часткових монотонних перестановок множини X_n. Властивості інверсної напівгрупи POI_n вивчалися в багатьох роботах (див., для прикладу, [2], [3], [4], [5]). Зокрема в статтях [2] і [3] дано опис двосторонніх ідеалів, відношень Гріна, конгруенцій моноїда POI_n. Також знайдено деякі мінімальні породжуючи множини а також зображення цієї напівгрупи. В статті [4] (крім іншого) дано опис ендоморфізмів напівгрупи POI_n. В роботі [5] знайдено групу автоморфізмів, описані максимальні, інверсні максимальні а також максимальні нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи POI_n. Крім того підраховано порядок максимальної нільпотентної піднапівгрупи, що містить найбільшу кількість елементів.

Далі, позначимо через ODP_n інверсну піднапівгрупи напівгрупи POI_n, кожний елемент якої є ізометрією, тобто перетворенням, що зберігає відстань. В статті [6] розглядаються деякі комбінаторні проблеми, зокрема підраховано порядок інверсного моноїда ODP_n. В статті [7] охарактеризовані відношення Гріна і обчислено ранг напівгрупи ODP_n. В роботі [8] знайдені зображення ODP_n.

Наше дослідження стосується інверсного моноїда IIO_n, елементами якого є монотонні ізоморфізми між відрізками впорядкованої множини $X_n = \{1 < 2 < ... < n\}$. Зрозуміло, що інверсна напівгрупа IIO_n є піднапівгрупою моноїда ODP_n. Основні результати нашого дослідження такі: 1) Описано ідеали інверсного моноїда IIO_n. Виявилось, що кожний ідеал є головним і, отже, ідеали лінійно впорядковані відносно включення. 2) Знайдено найменшу породжуючи множину напівгрупи IIO_n і обчислено $Rank(IIO_n)$. 3) Охарактеризоване відношення спряженості в IIO_n. 4) Знайдено формули для обчислення $|IIO_n|$, $E(IIO_n)$ а також кількості нільпотентних елементів напівгрупи IIO_n.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lawson M.V., Inverse semigroups. The theory of partial symmetries / World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ,1998.
2. Fernandes V.H., Semigroups of order preserving mappings on a finite chain: a new class of divisors / Semigroup Forum **54**(2) (1997), 230-236.
3. Fernandes V.H., The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain / Semigroup Forum **62**(2) (2001), 178-204.
4. Fernandes V.H., Santos P.G. Endomorphisms of semigroups of order-preserving partial transformations / Semigroup Forum **99**(2) (2019), 333-344.
5. Ganyushkin, O., Mazorchuk, V. On the structure of IO_n / Semigroup Forum **66**, 455–483 (2003)
6. Al-Kharousi F., Kehinde R., Umar A, Combinatorial results for certain semigroups of partial isometries of a finite chain, Australas. J. Combin. $58 (2014), 365-375.
7. Al-Kharousi F., Kehinde R., Umar A. On the semigroup of partial isometries of a finite chain, Commun. Algebra $44 (2016), 639-647.
8. Fernandes V.H., Quinteiro T.M., Presentations for monoids of finite partial isometries, Semigroup Forum 93 (2016), 97–110.

Дереч Володимир Дмитрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, derech@vntu.edu.ua

Барковська Алла Андріївна, старший викладач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, barkovska@vntu.edu.ua

Derech Volodymyr Dmytrovych, PhD in Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, derech@vntu.edu.ua

Barkovska Alla, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, barkovska@vntu.edu.ua