PACS: 73.2.La, 78.67.Hc

В.М.Бурдейний,
В.Х.Касіяненко

ПОТЕНЦІАЛ ПОЛЯ ЗАРЯДЖЕНОГО КВАНТОВОГО НАНОКІЛЬЦЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Як правило, потенціал, яким утримуються носії має модельний характер і стосується локалізації частинок всередині квантового кільця(КК). В практичних випадках в інтерфейсі квантового кільця існує зв'язаний заряд, який можна накопичувати керуючими електродами. Сформований таким зарядом потенціал може бути суттєвим для квантової динаміки носіїв матриці. Проте, дослідження енергетичного спектру у цьому потенціалі не можна вважати завершеними не останню чергу тому, що використовувані потенціали далекі від реальних. В даній роботі з перших принципів обчислено потенціал електричного поля заряду рівномірно розподіленого по круговому КК нескінченно малої товщини. Рівняння Пуассона розв'язується шляхом перетворення Фур'є. В результаті одержано точне співвідношення, яке подає потенціал у вигляді комбінації повних і неповних еліптичних інтегралів, параметри яких встановлено для граничних випадків великих і малих відстаней частинки від квантового кільця..

Ключові слова: квантове кільце, потенціал, рівняння Пуассона, перетворення Фур'є, еліптичні інтеграли.

Abstract

As a rule, the potential that confines the carriers of charge has a model character and concerns the localization of particles inside the quantum rings (QR). In practice some spatial charge turns off accumulating there and I can be controlled by special electrodes. Formed by this charge potential is determining factor for quantum dynamics of carriers belonged to the surrounding QR matrix. But studies of energetic spectra created by the appointed potential can not be considered as completed yet because of the applied model potentials are still very distant from reality. That is why in this work the potential of electric field created by uniform distributed in QR charge has been found beginning of the basic principles. The Poisson's equation was resolved with Fourier's transformation technique and the potential has been expressed in terms of elliptic integrals. Their parameters were established for small as well as large distances of QR.

Key words: quantum ring, potential, Poisson's equation, Fourier's transformation elliptic integrals.

На протязі останніх кількох декад в зв'язку з прогресом у технології синтезу і виробництва наноматеріалів та приладів на їх основі, відзначається суттєве зростання інтересу як до експериментальних, так і теоретичних досліджень фізичних об'єктів розмірами порядку кількох одиниць і десятків нанометрів. Оскільки номенклатура таких систем досить обширна, то у якості стандартних прикладів можна привести квантові точки різної геометрії та типу конфайнменту електронів, дірок та їх комплексів, наприклад, екситонів, квантові проволоки, графенові листи та трубки, фулерени. У цьому, далеко неповному переліку, не останнє місце посідають системи, які в силу своєї геометрії отримали назву квантових кілець(КК). Під поняттям квантового кільця в першу чергу маються на увазі об'єкти, геометрія яких має вигляд замкненого контуру з характерною товщиною і діаметром таких розмірів (типові значення досягають одиниць і сотень нанометрів), при яких в силу просторової обмеженості визначальним фактором стає розмірне квантування. Квантовість проявляється і в можливості появи ефектів, які не мають прямого зв'язку з наноскопічними розмірами такої сукупності атомів. Мається на увазі ефект Ааронова-Бома, квантування магнітного потоку, спостереження незгасаючого струму. По суті саме ці квантові ефекти можна вважати тригером систематичного дослідження квантових кілець.

Застосування ефективних методів синтезу, таких як, наприклад ,транспозиція атомів засобами атомної силової мікроскопії, електронної тунельної спектроскопії [1-4], літографії з високою роздільною здатністю[5], залучення молекулярно-променевої епітаксії [6,7]забезпечують створення КК з широким діапазоном розмірів, з різноманітною морфологією та багатством поєднань матеріалів. Відзначене багатство об'єктів стимулює теоретичні дослідження КК, причому ці дослідження в значній мірі стосуються енергетичного спектру електронів, дірок чи таких їх об'єднань як екситони, магнітні полярони та відгуку спектру на дію зовнішніх електричних і магнітних полів. Оскільки проблематика охоплюється обширною бібліографією, то тут має зміст обмежитися посиланням лише на оглядову роботу[8].

Переважна більшість робіт фокусується на особливостях конфайнменту носіїв та на енергетичному спектрі і його проявах стосовно захоплених частинок. Проте, квантові кільця у багатьох практично значимих випадках формуються як гетеропереходи на межі власне кільця і напівпровідникової матриці, яка його оточує. На такому гетеропереході має місце розрив енергетичних зон, від якого як правило ведеться відлік енергії і потенціалу, а також виникає область об'ємного заряду. Цим просторовим зарядом можна маніпулювати, застосовуючи керуючі електроди за аналогією із приладами з накопиченням заряду і досягати певного, залежного від властивостей гетеро пари, значення заряду q кільця. Тим не менше, квантування енергії та динаміка носіїв заряду в електричному полі зарядженого КК досліджувалася в порівняно невеликій кількості робіт. В деяких з них, наприклад [9], припускається, що електричний заряд створює в точках нескінченно тонкого КК поле, яке залежить лише від азимутального кута і описується дельта-функцією Дірака, зосередженою в одній точці кільця. В інших, зокрема[10], вважається, що потенціал рівномірно зарядженого КК не залежить від радіальної координати, а тому потенціал по суті визначається своєю залежністю від координати, перпендикулярної до площини кільця.

В зв'язку із вище зауваженим виникає необхідність у тому, щоб встановити потенціал у моделі КК, ближчій до реальності. Саме обчислення потенціалу для більш адекватної моделі КК є метою даного дослідження.

В типових випадках товщина кільці складає величини порядку кількох нанометрів оді, як радіальні розміри сягають кількох десятків нанометрів. Тому тут розглядається нескінченно тонке КК шириною $2a$ з внутрішнім радіусом $R-a$ і зовнішнім $-R+a$. При рівномірному розподілі заряду по кільцю густина заряду виражається співвідношенням:

$$\rho = \frac{q}{4\pi}\delta(z)\theta(R-a \le r \le R+a) \tag{1}$$

де $\delta(z)-$дельта-функція Дірака, а $\theta(\xi)-$функція Хевісайда.

Потенціал $\Phi(z,\vec{r})$ є розв'язком рівняння Пуассона[11]:

$$\nabla^2\Phi(z,\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{2}$$

в якому $\varepsilon-$діелектрична проникність матриці і ε_0-електрична стала.

Рівняння Пуассона (2) розв'язується застосуванням перетворення Фур'є, яке записується так:

$$\Phi(z,\vec{r}) = \int \Phi(\kappa,\vec{k})e^{i\kappa z+i\vec{k}\vec{r}}d\kappa d\vec{k} \tag{3}$$

Підстановка (3) в (2) з врахуванням інтегрального представлення $\delta-$функції для Фур'є-амплітуди потенціалу дає наступний результат:

$$\Phi(\kappa,\vec{k}) = \frac{q}{16\pi^3\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{k(\kappa^2+k^2)}\left\{(R+a)J_1[k(R+a]-(R-a)J_1[k(R-a]\right\} \tag{4}$$

Тут і надалі $J_n(\xi)$ позначає[12] функцію Бесселя порядку n.

Комбінуючи (4) і (3) після інтегрування по κ компоненті хвильового вектору отримується проміжне співвідношення, яке може бути зручним для аналізу асимптотичні поведінки потенціалу:

$$\Phi(z,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ra} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi|z|} J_0(\xi r)}{\xi} \left\{ (R+a) J_1[\xi(R+a] - (R-a) J_1[\xi(R-a] \right\} d\xi \tag{5}$$

Для запису остаточного результату в компактній формі доцільно ввести позначення:

$$k_{\pm} = Sin\varphi_{\pm} = \frac{2\sqrt{r(R\pm a)}}{\sqrt{z^2 + (R \pm a + r)^2}} \ ; \ Sin\psi_{\pm} = \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + (R \pm a - r)^2}} \tag{6}$$

Подальше інтегрування у формулі (5) залежить від співвідношення між радіальною координатою r та внутрішнім і зовнішнім радіусами КК. В цьому контексті розглядаються три випадки:

1. $r < R - a$, що відповідає внутрішній області КК. Інтегрування дає[13]:

$$\Phi(z,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ra} \left[S_{+}(z,r) - S_{-}(z,r) + \frac{2a|z|}{R^2 - a^2} \right] \tag{7}$$

2. $R - a \le r \le R + a$ – область власне КК. Потенціал у цій області визначається формулою:

$$\Phi(z,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ra} \left[S_{+}(z,r) - S_{-}(z,r) - \frac{|z|}{R+a} \right] \tag{8}$$

3. $r > R + a$. Випадок, який стосується зовнішній області КК. Для цієї області потенціал матиме таку форму:

$$\Phi(z,\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Ra} \left[S_{+}(z,r) - S_{-}(z,r) \right] \tag{9}$$

Стосовно функцій $S_{\pm}(z,r)$, то вони визначаються співвідношеннями:

$$S_{\pm}(z,r) = \frac{2\sqrt{r}}{\pi k_{\pm}\sqrt{R \pm a}} E(k_{\pm}) + \frac{k_{\pm}[(R\pm a)^2 - r^2]}{2\pi[r(R\pm a)^3]^{1/2}} K(k_{\pm}) \pm$$
$$\pm \frac{|z|}{2(R\pm a)} \Lambda_0(\varphi_{\pm}, \psi_{\pm}) \tag{10}$$

Тут введено спеціальні функції з добре відомими [12]властивостями, а саме $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду, а $\Lambda_0(\varphi,\psi)$ – лямбда-функція Хеймана.

Одержані остаточні результати, з врахуванням означень (10), не зовсім прості для аналізу. Проте, для дослідження динаміки і конфайнменту носіїв важлива поведінка потенціалу в граничних випадках, для яких,з врахуванням (8) можна записати:

$$k_{\pm} = 0 \ , \ r = 0 \ ; \ k_{\pm} \approx \frac{2\sqrt{r(R\pm a)}}{|z|} \ , \ |z| \gg R \pm a + r \ ; \ ,$$
$$k_{\pm} \approx \frac{2\sqrt{r(R\pm a)}}{R \pm a + r} \ , \ |z| \ll R \pm a + r \tag{11}$$

$$Sin\psi_{\pm} \approx \frac{1}{|z|} \ , \ |z| \gg |R \pm a - r| \ ; \ Sin\psi_{\pm} \approx \frac{|z|}{|R \pm a - r|} \ , \ |z| \ll |R \pm a - r| \quad (12)$$

після чого використанням асимптотик еліптичних інтегралів встановлюється залежність потенціалу від координат в околі точок особливої поведінки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Eigler D.M. Positioning single atoms with a scanning tunneling microscope /D.M.Eigler and E.K.Shweizer // Nature.−1990.−344.−P. 524-526.

2.Crommie M. Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface/ M.F.Crommie, C.P.Lutz and D.M.Eigler// Science.−1993.−262(5131).−P. 218220.

3. Pham Van Dong Quantum rings engineered by atom manipulation/ Van Dong Pham, Kiyoshi Kanisava and Stefan Fölsch // Phys Rev Lett.−2019.− 123.−P. 066801.

4.Vinasco J.A. Electronic states in Ga-As-(Al,GaA) eccentric quantum rings under nonresonant intense laser and magnetic fields/ Vinasco J.A., A.Radu, E.Nicolescu,M.E.Mora-Ramos,E.Feddi, V.Tulupenko, R.L.Restrepo, E.Kasapoglu, A.L.Morales and C.A.Duque// Scientific Reports.−2019.− 9.−1427.−Mode of access: https://doi.org/10.1038/s41598-018-38114-0

5.Yun-Ran Wang Fabrication of quantum dot and ring arrays by direct laser interference patterning for nanophotonics/ Yun-Ran Wang, Im Sik Han and Mark Hopkinson //− Nanophotonics .−2023.−Vol.12, no.8,−P.1469-1479.− Mode of access:, https://DOI.org/10.1515/nanoph-2022-0584

6.Garcia J.M. Intermixing and shape changes during the formation of InAs self-assembled quantum dots/J.M.Garcia, G.Medeiros-Ribeiro, K.Schmidt, T.Ngo,J.L.Feng, A.Lorke, J.Kotthaus and P.M.Petroff//Appl.Phys.Lett.−1997.−Vol.71.− P. 2014-2016.

7.Climente J.I.Nanoscopic semiconductor quantum rings/ J.I.Climente and J.Planelles, Contributions to Science//.− 2007.−Vol.3, no.4.− P.447-457.−Mode of access: DOI:10.2436/20.7010.01.21

8.Viefers S. Quantum rings for beginners: energy spectra and persistent currents/ S.Viefers, P.Koskinen, P.Singha Deo, Manninn// Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures.−2004.−Vol.21, no.1.− P.1-45.

9.Raphael J. The quantum mechanical problem of a particle on a ring with delta well/ J.Raphael, F.Berger// arXiv:2211.16149v1 [quant-ph] 29 Nov 2022.

10.Cordeiro dos Santos Wylter Quantum problem of potential of a ring charged on the symmetry axis/ Wytler Cordeiro dos Santos, Bruno Carmo Nunes, and Ronni G.G.Amorim// arXiv:2304. 10378v1 [quan-ph], 17Apr 2023

11.Jackson, John D. Classical Electrodynamics / John David Jackson.− N.-Y.: John Willey& Sons, 1999.−835p.

12.Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables / M/Abramowitz, Irene A.Stegun.−United States Department of Commerce, National Bureau of Standarts(NBS), 1964.−832p.

13.Прудников А.П., Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев.−Наука,1983.−752с.

Бурдейний Володимир Мефодійович,*кандидат фізико-математичних наук,доцент, професор кафедри загальної фізики, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця.* brdnvldmr@ukr.net

Касіяненко Василь Харитонович, *доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця.*

Burdeynyy Volodymyr Mefodiyovych, *PhD in Physics and Mathematics, associated professor of General Physics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia , brdnvldmr@ukr.net*

Kassiyanenko Vasul Kharutonovuch*, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor, Chief of General Physics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia .*