

А. С. Моргун, д.т.н., проф.; А. В. Ніцевич; І. М. Меть

ФОРМУВАННЯ МАТРИЦІ ВПЛИВУ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ВРАХУВАННІ ДІЇ ВЕРТИКАЛЬНИХ І ГОРИЗОНТАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ

У статті досліджено вплив врахування появи горизонтальних переміщень від дії вертикального та горизонтального навантаження на палі та доцільність врахування в числовому розрахунку за МГЕ радіальних напружень на величину несучої спроможності палі.

Ключові слова: напружено-деформований стан, ґрунти, числове моделювання, метод граничних елементів.

Вступ

Гостра соціальна необхідність в об'єктах соціально-побутового призначення потребує збільшення обсягів житлового та цивільного будівництва. Ріст обсягів будівництва можливий за умов раціонального використання грошових, трудових та матеріальних ресурсів. Як відомо, кошторисна вартість будівництва фундаментів сягає близько 40% загальної вартості будівлі. У промисловому та цивільному будівництві України, завдяки її геологічним умовам, доцільно застосовувати пальові фундаменти. Проте, незважаючи на широке застосування пальових фундаментів, особливо у висотному будівництві, особливості їх взаємодії з підвалинами та теоретичні методи розрахунку паль вивчені недостатньо з погляду прийняття економічних та надійних проектних рішень. Значною мірою це пояснюється складністю процесів, що проходять у ґрунті при зануренні паль та особливостями взаємодії паль з підвалинами. В результаті недостатнього вивчення цих явищ у проектній практиці використовують відносно прості моделі, які дуже наближено відображають дійсні процеси взаємодії паль з підвалинами. Це призводить до прийняття недосконалих рішень.

Аналіз останніх досягнень

Інтенсивний розвиток та широке застосування ЕОМ суттєво наблизили фундаментальні математичні проблеми до прикладних, посилили їх взаємовплив.

Поява нового потужного методу досліджень – числового експерименту – як ніколи раніше тісно пов'язала фізичний зміст задачі, математичне формулювання і числовий спосіб рішення. Проблеми прогнозу поведінки пальового фундаменту можна вирішити, використовуючи сучасні числові методи та сучасні ЕОМ.

Серед сучасних числових методів виділилась основна група розв'язання крайових задач будівельної механіки та механіки твердого деформованого тіла – метод скінчених елементів (МСЕ) та метод граничних елементів (МГЕ). МСЕ на сьогодні є одним з найпопулярніших числових методів рішення задач механіки суцільних середовищ. МСЕ привернув до себе увагу дослідників переважно тим, що суцільне середовище має властивість розбиватися на ряд елементів, які можна розглянути як окремі його частинки. У цьому числовому методі реалізовано запропоновану Пуассоном ідею – розв'язок задачі про напружено-деформований стан складної конструкції шляхом подання її з елементарних фрагментів.

МГЕ – альтернативний підхід, який використовує поверхневу дискретизацію об'єкту, що досліджується, тому для тривимірних задач фундаментобудування цей метод найефективніший. Розв'язок конкретної задачі за МГЕ можливий за умови наявності відповідного фундаментального розв'язку (точної чи наближеної функції Гріна). Задача приводиться до перетворення вихідних розрахункових диференціальних рівнянь до інтегрального рівняння, рішення яких набагато простіше. Така операція дає можливість отримати систему алгебраїчних рівнянь, яка належить до границі області.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

У статті за числовим методом граничних елементів досліджується вісесиметрична задача визначення напружено-деформованого стану та несучої спроможності палі при заглибленні її у ґрунт від дії вертикального навантаження. У загальному випадку по боковій поверхні

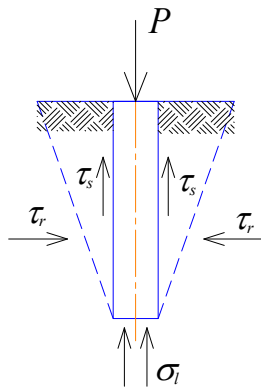


Рис. 1. Напружений стан палі від дії вертикального навантаження

призматичної чи пірамідальної палі і під вістрям виникає напружений стан (рис. 1): дотичні напруження τ_s по боковій поверхні палі,

- τ_r – радіальні напруження по боковій поверхні,
- σ_l – нормальні напруження під вістрям палі.

Від дії одиничних величин цих напружень будуть виникати переміщення точок бокової поверхні і вістря, які визначались за фундаментальними розв’язками Міндліна для півпростору [1]. Величини цих переміщень (від одиничних значень напружень) складають матрицю впливу МГЕ K_{ij} , яка з погляду будівельної механіки є класичною матрицею піддатливості, тобто матрицею, оберненою до матриці жорсткості.

Інтегральне граничне рівняння рівноваги палі в ґрунті, отримане К. Бреббія [2] має вигляд:

$$C_{ij}(\xi) \cdot U_j(\xi) + \int_{\Gamma} \rho_{ij}^*(\xi, x) \cdot U_j(x) \partial\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) \cdot \rho_j(x) \partial\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \partial\Omega(x), \quad (1)$$

де $U_{ij}^*(\xi, x), \rho_{ij}^*(\xi, x)$ – переміщення і напруження, які виникають у точці x в j -му напрямку від одиничної зосередженої сили, діючої в i -му напрямку і прикладеної в точці ξ (фундаментальні розв’язки Міндліна для півпростору);

$U_j(x), \rho_j(x)$ – переміщення і напруження, що виникають на межі тіла (тобто на боковій поверхні і на поверхні нижнього кінця палі).

Матричний вигляд (1)

$$[K]_{ij} \cdot \{\Phi\}_j = \{W\}_i, \quad (2)$$

де $[K]_{ij}$ – глобальна матриця коефіцієнтів впливу, що враховує взаємодію палі з основою.

У цьому класі задач матриця $[K]$ завжди не сингулярна із переважаючими діагональними коефіцієнтами; $\{W_e\}$ – вектор-стовпець вільних членів системи лінійних алгебраїчних рівнянь; з точки зору фізики – це задані переміщення точок бокової поверхні палі і точок площини нижнього кінця палі;

$\{\Phi\}$ – вектор-стовпець невідомих, які при обчисленні опору палі визначають дотичні напруження $(\tau_s)_i$ ($i=1, \dots, n1$), радіальні напруження $(\tau_r)_i$ ($i=1, \dots, n1$) та нормальні напруження (σ_l) ($i=2n1+1 \dots n$).

У розгорнутому вигляді (2) можна подати :

$$\begin{Bmatrix} W_S \\ U_S \\ W_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{SS} & K_{RS} & K_{BS} \\ K_{SU} & K_{RU} & K_{BU} \\ K_{SB} & K_{RB} & K_{BB} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tau_S \\ \tau_R \\ \sigma_l \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

де K_{SS} – матриця вертикальних переміщень точок бокової поверхні від дотичних напружень по боковій поверхні τ_s . Точка прикладання одиничного навантаження ξ на боковій поверхні по вертикалі, точка нагляду X теж на боковій поверхні;

K_{BS} – матриця вертикальних переміщень точок бокової поверхні палі від нормальних напружень вістря σ_l . Точка ξ на вістрі по вертикалі, точка X на боковій поверхні;

K_{SB} – матриця вертикальних переміщень точок вістря від τ_s . Точка ξ на боковій поверхні по вертикалі, точка X на вістрі;

K_{BB} – матриця вертикальних переміщень точок вістря від σ_l . Точка ξ на вістрі по вертикалі, точка X на вістрі;

K_{RS} – матриця, яка включає коефіцієнти впливу на вертикальні переміщення вузлів бокової поверхні палі при завантаженні елементів бокової поверхні радіальними напруженнями τ_r . Точка ξ на боковій поверхні по горизонталі, точка X на боковій поверхні;

K_{SU} – матриця, коефіцієнти якої відображають зв'язок між горизонтальними переміщеннями вузлів бокової поверхні палі, коли бокова поверхня навантажена вертикальними напруженнями. Точка ξ на боковій поверхні по вертикалі, точка X на боковій поверхні;

K_{RU} – матриця, що включає коефіцієнти впливу, які відображають залежність між горизонтальними переміщеннями вузлів бокової поверхні палі при завантаженні елементів бокової поверхні горизонтальними напруженнями τ_r . Точка ξ на боковій поверхні по горизонталі, точка X на боковій поверхні;

K_{BU} – матриця, коефіцієнти якої відображають залежність горизонтальних переміщень вузлів бокової поверхні палі при завантаженні елементів нижнього кінця вертикальними напруженнями σ_l . Точка ξ на вістрі по вертикалі, точка X на боковій поверхні;

K_{RB} – матриця, коефіцієнти якої відображають зв'язок між вертикальними переміщеннями вузлів нижнього кінця палі при завантаженні елементів бокової поверхні радіальними напруженнями τ_r . Точка ξ на боковій поверхні по горизонталі, точка X на вістрі.

У рівняннях (2)-(3), які на етапі дискретизації записуються для кожного граничного вузла вістря і бокової поверхні палі, невідомими є напруження на поверхні палі (τ_s , τ_r , σ_l), граничні умови задаються переміщеннями вузлів на поверхні палі (W_s , U_s , W_b).

Найбільш трудомісткою частиною рішення є обчислення коефіцієнтів підматриць $(K)_{ij}$. Коефіцієнти цих підматриць обчислюються числовим інтегруванням розв'язку Міндліна за допомогою квадратурних формул Гаусса.

З метою врахування в числовому розрахунку за методом граничних елементів впливу на несучу спроможність палі наявності трьох видів напружень по боковій поверхні і вістря τ_s , τ_r , σ_l було проведено компоновку матриці впливу МГЕ для пірамідальної палі довжиною 2,7 м (60x60) (7x7) та проаналізовано вплив її складових на кінцевий результат. Матриця впливу компоувалась відповідно аналітичних розв'язків Р. Міндліна по визначенню напружено-деформованого стану в півпросторі при дії в ньому одиничного джерела ($P=1$) як по вертикалі, так і по горизонталі. У розрахунку враховано, що паля абсолютно жорстка і переміщення вузлів пірамідальної палі, розташованих на боковій поверхні і нижнім кінці палі, рівні переміщенню голови палі. У розрахунку опору пірамідальної палі величина W_e приймалась рівною величині осідання, при якій має місце лінійна залежність між опором палі і її осіданням. Як показує аналіз експериментальних досліджень опору одиночних пірамідальних палей, величину W_e в межах лінійної залежності у першому наближенні можна прийняти рівною 1 – 1,5 см.

Для вирішення задачі бокова поверхня та вістря пірамідальної палі дискретизувались десятьма граничними елементами. Проводилась лінійна апроксимація напружень по довжині кожного граничного елемента. Для кожного граничного вузла записувалось рівняння (2), що привело до утворення системи лінійних алгебраїчних рівнянь п'ятнадцятого порядку. Для числової реалізації задачі складено програму алгоритмічною мовою Pascal. У програмі корені СЛАР знаходились за методом єдиного ділення Гаусса.

У результаті розв'язку системи алгебраїчних рівнянь отримано значення дотичних напружень τ_s , радіальних напружень τ_r на боковій поверхні пірамідальної палі і нормальних напружень на площині нижнього кільця σ_l . Після визначення напружень було отримано силу

опору палі під нижнім кінцем ($P_{\text{вістря}}$), силу опору палі по боковій поверхні палі (P_6) та загальну несучу спроможність палі:

$$P_z = \int_L 2\pi\alpha\tau_s dh_1 + \int_0^{a_n} 2\pi\epsilon\sigma_l dh_2, \quad (4)$$

де a_n – радіус пірамідальної палі в рамках бокової поверхні; h_1 – висота граничного елемента по боковій поверхні; ϵ – радіус вістря, h_2 – висота граничного елемента по вістрі палі.

Коефіцієнти матриці впливу K наведено на рис. 2 а, б, в. Вони є лінією впливу: вертикальних переміщень бокової поверхні (рис. 2 а), горизонтальних переміщень бокової поверхні (рис. 2 б), вертикальних переміщень вістря (рис. 2 в) від дії одиничних значень τ_s , τ_r , σ_l .

$\sigma_l \cdot 10^6$ а) вертикальні переміщення точок бокової поверхні

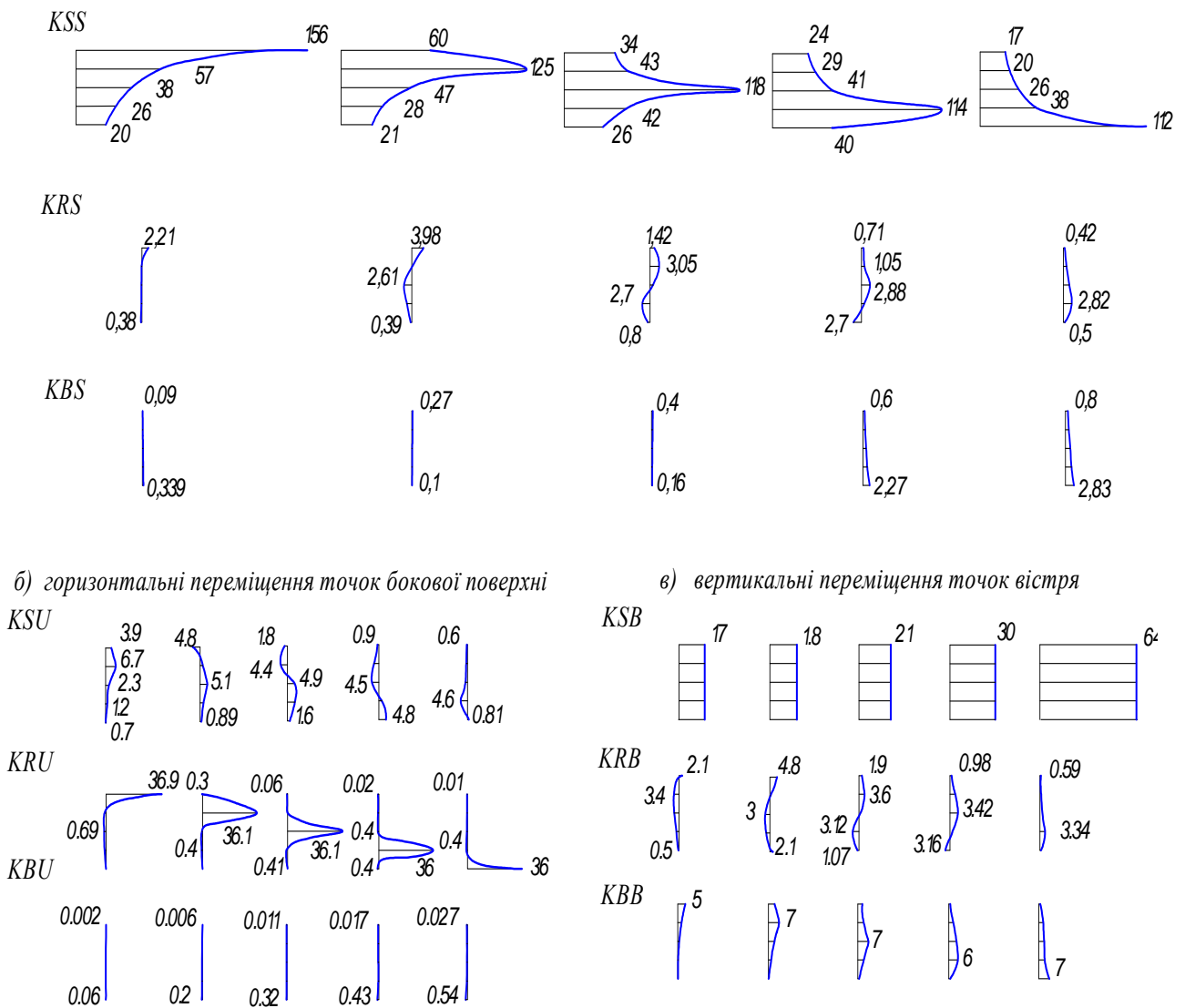


Рис. 2. Коефіцієнти матриці впливу МГЕ

Із числового аналізу коефіцієнтів K_{ij} необхідно відзначити (рис. 2), що найбільший вплив на несучу спроможність палі здійснюють вертикальні переміщення від дії дотичних напружень τ_s . Ординати цих ліній впливу на два порядки більші за ординати переміщень від

дії нормальних напружень σ_l вістря палі. Значні ординати горизонтальних переміщень від дії радіальних напружень τ_r .

Числовий аналіз коефіцієнтів також показує, що лінії впливу переміщень від горизонтальних сил τ_r усі мають ділянки з додатними та від'ємними значеннями ординат і при їх урахуванні дають менші значення коефіцієнтів матриці впливу K_{ij} . При визначенні несучої спроможності палі така матриця K_{ij} дає очікувану величину несучої спроможності палі – 282 кН. Експериментальні дані [3] – 280 кН. Проведено також числовий експеримент при неврахуванні в матриці впливу K_{ij} дії радіальних напружень τ_r . Матриця K_{ij} в цьому випадку складається із чотирьох підматриць:

$$\begin{vmatrix} K_{SS} & K_{BS} \\ K_{SB} & K_{BB} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Несуча спроможність палі в цьому випадку склала 272 кН. Оскільки залежність між несучою спроможністю палі, яка є інтегральним виразом напружень (4) та коефіцієнтами матриці K_{ij} обернена (1), то меншим значенням матриці K_{ij} відповідає більша несуча спроможність.

Висновки

1. У числових розрахунках НДС палі від дії вертикальних навантажень врахування в матриці впливу всіх дев'яти підматриць дає результат ближчий до експерименту, наближує результат моделювання до дійсної картини.

2. Неврахування впливу горизонтальних напружень τ_r при вертикальному навантаженні палі (матриця K_{ij} складається із чотирьох підматриць) прогнозує занижену несучу здатність, тобто в запас міцності в межах 3 – 4%.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Моргун А.С. Метод граничних елементів в розрахунках палі. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ – Вінниця", 2000. – 132 с.
2. Бреббья К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1984. – 248 с.
3. Хазин В.И. Экспериментальные исследования зависимости несущей способности пирамидальных свай от угла коничности. Основания и фундаменты, Выпуск 5. – К.: Будівельник. – С. 124 – 128.

Моргун Алла Серафимівна – завідувач кафедри;

Ніцевич Андрій Віталійович – магістрант кафедри;

Меть Іван Миколайович – магістрант кафедри.

Кафедра промислового та цивільного будівництва, Вінницький національний технічний університет