

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ А. С. МАКАРЕНКА**

ISSN: 2519-2361

**АКТУАЛЬНІ ПИТАННЯ
ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОЇ
ОСВІТИ**

Збірник наукових праць

Виходить двічі на рік

Заснований у жовтні 2012 року

Випуск 1(23), 2024

Index Copernicus 2022 = 87,92

Суми – 2024

УДК 378.147
DOI 10.5281/zenodo.12166083

Н. В. Сачанюк-Кавецька
ORCID ID 0000-0001-6405-1331

О. П. Прозор
ORCID ID 0000-0003-1454-8352

А. А. Коломієць
ORCID ID 0000-0002-7665-6247

Вінницький національний технічний університет

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ОНЛАЙН-КАЛЬКУЛЯТОРІВ У НАВЧАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ НА ПРИКЛАДІ ТЕМИ «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

У сучасному освітньому середовищі інтерактивні онлайн-калькулятори стають все більш популярними як ефективний засіб навчання математики завдяки їх здатності видавати миттєвий результат, візуалізації математичних понять та можливості експериментувати з параметрами функцій. Метою цієї статті є дослідження можливості використання онлайн-калькуляторів у навчанні вищої математики, зокрема на прикладі вивчення теми «Невизначений інтеграл». Дослідження базувалося на аналізі наукової літератури, порівнянні функціональності двох популярних онлайн-калькуляторів *MathDF* та *Photomath*, а також спостереженні за процесом використання цих інструментів у реальному навчальному середовищі. В статті розглянуто переваги та недоліки використання інтерактивних онлайн-калькуляторів. Підкреслюється можливість застосування таких інструментів як для демонстрації розв'язання складних математичних задач в цілому, так і для виконання окремих проміжних обчислень, що виникають в процесі розв'язування. Практичне значення дослідження полягає в тому, що зроблено огляд двох інтерактивних онлайн-додатків щодо можливості та особливостей їх впровадження в навчальний процес для його покращення та підвищення якості засвоєння навчального матеріалу студентами на прикладі однієї із тем. Дослідження показало, що використання таких інструментів під час вивчення теми «Невизначений інтеграл» допомагає з вибором методу інтегрування, економить час на виконанні рутинних обчислень, дає можливість перевірити правильність самостійного розв'язання студентом. Студенти, які використовували ці інструменти, демонстрували краще розуміння теоретичних знань, більшу впевненість у своїх знаннях, аналітичні навички. В перспективі подальших наукових розвідок плануємо провести детальний статистичний аналіз впливу використання онлайн-додатків на студентів із різними навчальними досягненнями.

Ключові слова: процес навчання, вища математика, невизначений інтеграл, інформаційні технології, мобільний додаток, інтерактивний онлайн-калькулятор, *MathDF*, *Photomath*.

Постановка проблеми. Одним із пріоритетних напрямів цифровізації суспільства є процес комп'ютеризації освіти, який передбачає широке використання різноманітних онлайн-додатків і програм, сприяє глобалізації освіти, розвитку міжнародного ринку праці та зростанню різного роду мобільності [2, с. 10–12]. Інформаційні технології не лише спрощують доступ до інформації та відкривають можливості для диференціації, а й дають змогу організувати освітню систему, у якій учень активно та рівноправно бере участь у навчальній діяльності. Крім того, суспільству потрібні креативні та активні професіонали, здатні мислити інноваційно та вирішувати складні завдання [3, с. 23–34].

Однією зі складових сучасної системи професійної підготовки техніків є базова підготовка [5]. Основне завдання базової підготовки – вдосконалення професійної підготовки та загальний розвиток особистості студента, що містить у собі: освоєння

дослідницьких методів розв'язання виробничих завдань; розроблення раціоналізаторських пропозицій та участь у винахідницькій роботі; врахування технічного прогресу і потреб, що розвиваються.

Сильна математична підготовка, природно, посідає особливе місце в освіті інженерів [1, с. 3–6]. Математика важлива і корисна сама по собі, але вона також слугує своєрідним фундаментом для вивчення низки дисциплін, у яких суттєво використовуються математичні методи. Це теоретична механіка, опір матеріалів, математична фізика, фізика та низка спеціальних дисциплін, які просто неможливо опанувати без володіння математичним апаратом. Використання інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процесі з вищої математики для студентів інженерних спеціальностей створює умови для їхньої самореалізації, що сприяє вдосконаленню навчального процесу та підвищенню його якості, а також підвищенню їхньої пізнавальної активності, розвитку критичного мислення, формуванню навичок організації самостійної роботи, розвитку творчих здібностей і лідерських якостей, підвищенню відповідальності за результати своєї праці.

Донедавна калькулятори як машини для обчислення чисел і формул були дуже поширені в арсеналі як інженерів, так і студентів [7, с. 274–275]. Однак завдяки появі смартфонів і стрімкому поширенню інтернету з'явився новий тип калькуляторів: комп'ютерні програми, що емулюють функціональність калькулятора [9, с. 135]. Цікаво, що саме спеціальне програмне забезпечення, яке виконує певні види обчислень автоматично, можна назвати «спеціальними калькуляторами». У світі Інтернету вони зустрічаються здебільшого у вигляді «онлайн-калькуляторів» на деяких інтернет-ресурсах. Іноді такі калькулятори реалізовано у вигляді програм, які можна завантажити і використовувати в автономному режимі на ПК, ноутбуках і смартфонах. Серед розмаїття онлайн-калькуляторів, актуальним є порівняльний аналіз переваг та недоліків тих додатків, які можна використовувати як тренажери для розв'язування задач на занятті та для самостійної підготовки студентів.

Аналіз актуальних досліджень. На сьогодні вже проведено значну кількість наукових досліджень, присвячених використанню інформаційних технологій при вивченні математичних дисциплін у вищій школі. У своїх працях С. О. Семеріков, Н. Ф. Талізін та Ю. В. Триус можуть зорієнтувати на сучасні теоретичні та методичні засади із застосування інформаційних технологій у навчальному процесі, особливо під час вивчення математичних дисциплін; у роботах З. В. Бондаренко, В. І. Клочка, Г. О. Михаліна та М. І. Шкіля інформаційні технології використовуються для опису різноманітних аспектів викладання окремих розділів математичного аналізу. Сучасний стан і перспективи розвитку мобільних математичних середовищ та теоретико-методологічні аспекти використання мобільних застосунків у дослідженнях в галузі математики можна побачити в роботах М. А. Кислової, К. І. Словак, Н. В. Рашевської, Ю. В. Триуса, С. О. Семерікова. Незважаючи на значну кількість праць, присвячених використанню різноманітних математичних застосунків, теоретичні та методичні питання їхнього застосування в освіті розроблені недостатньо, а бурхливий розвиток цієї галузі потребує постійних досліджень.

Мета статті – розглянути можливості використання інтерактивних онлайн-калькуляторів під час вивчення невизначеного інтеграла.

Виклад основного матеріалу. Для ефективного управління пізнавальною діяльністю студентів потрібно орієнтуватися не на «середнього» неіснуючого студента, а максимально використовувати індивідуальний підхід. Однак це досить складно реалізувати на практиці, оскільки пояснення викладач здійснює на лекціях та практичних заняттях для досить великих аудиторій із різним рівнем базової підготовки, різними здібностями до сприйняття та навчання. Це означає, що студенти із зниженою пізнавальною здатністю до навчання під час розв'язування задач не завжди отримують допомогу в необхідному обсязі, а більш здібні починають нудьгувати при розв'язуванні типових завдань.

Крім того, згідно з дослідженням [6, с. 10–15], зворотний зв'язок у процесі навчання не відстежується викладачем постійно, а тільки під час контрольних заходів. Викладачі не мають повної інформації про ступінь засвоєння матеріалу на даний момент і не можуть відповідним чином змінити використовуваний підхід. Педагог може приділяти увагу тільки певній групі студентів одночасно, що значно обмежує його можливості щодо підтримки студентів, які перебувають у стані постійної активної пізнавальної діяльності. Навчання – це двосторонній процес, і якщо одна сторона пасивна, ефективність навчання значно знижується.

Фахівці доходять спільного висновку, що ефективність навчальної, пізнавальної та творчої діяльності студентів може бути значно підвищена за рахунок використання комп'ютеризованих математичних систем [8, с. 24–27], які зараз стрімко розвиваються і їх є досить велика кількість у вільному доступі. Ці системи (додатки) можна завантажувати як на комп'ютер, так і на мобільний телефон.

За допомогою комп'ютеризованих математичних систем можна забезпечити індивідуальний підхід в процесі вибору навчальної діяльності (пояснення, тренування, заохочення тощо), врахувати особливості пізнавальної діяльності кожного студента із врахуванням індивідуальних здібностей [4, с. 2]. Особливе місце серед таких систем посідають онлайн-калькулятори, які досить прості в реалізації і часто використовуються фахівцями в різних галузях для виконання обчислень та отримання конкретних відповідей при розв'язуванні наукових та інженерних задач.

До переваг використання онлайн-калькуляторів під час навчання ми відносимо:

- 1) зручність – доступні з будь-якого пристрою, де є Інтернет-з'єднання;
- 2) миттєвість – онлайн-калькулятори надають студентам можливість отримувати миттєвий результат розв'язання математичної задачі;
- 3) візуалізація – деякі онлайн-калькулятори мають можливість виводити графіки функцій або презентувати геометричні інтерпретації математичних об'єктів;
- 4) практичність – онлайн-калькулятори дозволяють уникнути необхідності обраховувати складні формули вручну, що дає можливість зосередитись на розумінні суті математичних операцій, а не на деталях технічної сторони обчислення.

До недоліків використання онлайн-калькуляторів в навчальному процесі віднесемо:

- 1) залежність від Інтернет-з'єднання – відсутність доступу до Інтернету унеможлиблює використання додатку під час навчання;
- 2) неоднорідність функціональності – різні типи онлайн-калькуляторів можуть використовувати різний функціонал та точність;
- 3) ризик відсутності самостійної роботи студента під час розв'язування математичної задачі.

Хоча недоліки існують, загальна користь використання такого типу додатків, на наш погляд, їх перевищує. Здійснюючи правильний вибір серед доступних інтерактивних онлайн-калькуляторів, враховуючи їх обмеження і функціонал, викладач може максимально ефективно використовувати ці ресурси для поліпшення процесу навчання математики.

Навчальні тренувальні завдання мають містити в собі опрацювання теоретичного матеріалу, а потім побудову покрокових розв'язань задач і відпрацювання математичних навичок. Для швидкої реалізації таких завдань на практичних заняттях із вищої математики доцільно обирати ті додатки, які легко завантажуються на мобільний телефон, мають зрозумілий інтерфейс, не вимагають знання спеціальних команд та реалізують покрокове розв'язування. Сьогодні існує досить багато додатків, що відповідають вказаним вимогам. У нашому дослідженні використовується MathDF та Photomath для відпрацювання навичок знаходження невизначеного інтеграла. Методичний підхід викладання теми «Невизначений інтеграл» передбачає, що лекційні та практичні заняття викладач вибудовує з постійною ілюстрацією перевірки розв'язаних прикладів чи виконання проміжних обчислень в складних задачах за допомогою MathDF або Photomath. На практичних заняттях викладач намагається сформувати у студентів вміння використовувати вказані додатки для перевірки отриманих розв'язків, або для

індивідуальної роботи із завданнями, у випадку не чіткого розуміння підходу розв'язування. При цьому саме викладач керує діями студентів, надаючи чіткі алгоритми. Навіть у студентів з високим рівнем навчальної успішності формується звичка використовувати онлайн-калькулятори для виконання проміжних дій, що містяться в задачах. Розглянутий підхід дозволяє виконати більшу кількість різноманітних задач.

Калькулятор MathDF містить калькулятори: звичайних диференціальних рівнянь, інтегралів, рівнянь, похідної функції, обчислення границь, робота з комплексними числами, матричні обчислення та числові вирази. Калькулятор інтегралів покроково обчислює невизначений інтеграл використовуючи табличні інтеграли, властивості невизначених інтегралів та відомі методи інтегрування, такі як інтегрування частинами, розкладання дробово-раціональних функцій на елементарні дроби, метод заміни і ін.

В якості тестового прикладу розглянемо завдання, яке не всі математичні додатки можуть обчислити. Спочатку в інформації під діалоговим вікном прописується відповідь (див. рис. 1), а потім пропонується покрокове розв'язування з невеличким поясненням до кожного кроку (рис. 2).

MathDF

sin²(x)/(sin(x)+2cos(x))

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\sin(x) + 2 \cos(x)} dx$$

Покроковий розв'язок

Початковий інтеграл

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\sin(x) + 2 \cos(x)} dx$$

Обчислено рішення

$$\frac{-4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2}{5 \left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)} + \frac{4 \ln\left(\left|2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{5} - 1\right|\right)}{5 \sqrt{5}} - \frac{4 \ln\left(\left|2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{5} - 1\right|\right)}{5 \sqrt{5}} + C$$

Рис. 1. Відображення відповіді початкового інтеграла

Покрокове рішення

Обчислюємо

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\sin(x) + 2 \cos(x)} dx$$

Підстановка

Універсальна тригонометрична

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) & \sin(x) &= \frac{2u}{u^2+1} \\ du &= \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx & \cos(x) &= \frac{1-u^2}{u^2+1} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int -\frac{4u^2}{u^6 - u^5 + u^4 - 2u^3 - u^2 - u - 1} du$$

Розкладаємо

Знаменник на множники

$$-4 \int \frac{u^2}{(u^2+1)^2 (u^2-u-1)} du$$

Метод Остроградського

Метод невиключених коефіцієнтів

$$\int \frac{u^2}{(u^2+1)^2 (u^2-u-1)} du = \frac{Au+B}{u^2+1} + \int \frac{Eu+F}{u^2-u-1} + \frac{Cu+D}{u^2+1} du$$

Знаходимо коефіцієнти (диференціюючи)

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{u^2}{(u^2+1)^2 (u^2-u-1)} du \right)' &= \left(\frac{Au+B}{u^2+1} + \int \frac{Eu+F}{u^2-u-1} + \frac{Cu+D}{u^2+1} du \right)' = \\ &= \frac{Eu+F}{u^2-u-1} + \frac{Cu+D}{u^2+1} + \frac{A}{u^2+1} - \frac{2u(Au+B)}{(u^2+1)^2} \end{aligned}$$

Приводимо до спільного знаменника

$$\frac{u^2}{(u^2+1)^2 (u^2-u-1)} = \frac{(E+C)u^5 + (F+D-C-A)u^4 + (2E-D-2B+A)u^3}{(u^2+1)^2 (u^2-u-1)}$$

Привнісемо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{aligned} u^0: & \begin{cases} F-D-A=0 \\ E-D-C+2B-A=0 \\ 2F-C+2B+2A=1 \\ 2E-D-2B+A=0 \\ F+D-C-A=0 \\ E+C=0 \end{cases} = \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{1}{10} \\ C = 0 \\ D = 0 \\ E = 0 \\ F = \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 2. Окремі кроки розв'язування початкового інтеграла

Окрім того, ще одним цікавим результатом, який можна використовувати в процесі навчання є побудова графіків підінтегральної функції та первісної з можливістю масштабування та визначення значень обох функцій в конкретній точці (див. рис. 3).

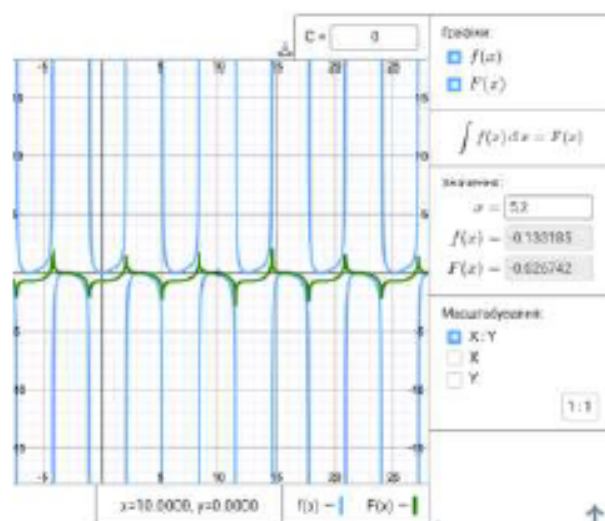


Рис. 3. Графіки підинтегральної функції та її первісної початкового тестового прикладу

Розглянемо як реалізує розв'язування цього ж прикладу Photomath.

Photomath – це мобільний додаток, який використовує фотокамеру смартфона для розпізнавання та розв'язання математичних задач. Додаток може обробляти фотографії або сканувати написані чи друквані математичні вирази. Зображення відправляється на хмарні сервери і аналізується нейронною мережею. Мережа визначає відповідну формулу, необхідну для конкретного завдання. Користувачеві у додатку виводиться детальний алгоритм розв'язання. Та не з усіма математичними задачами додаток справляється. Наприклад завдання, яке розв'язав онлайн-калькулятор MathDF, Photomath виконати не зміг (рис 4.)



Рис. 4. Скрін відповіді додатка на можливість розв'язання інтеграла

Додаток окремо розв'язує $\int \sin^2 x dx$ за формулами пониження степеня та $\int \frac{dx}{\sin x}$ використанням універсальної тригонометричної підстановки та початковий, нами введений інтеграл, ні. Тоді роботу над прикладом організуємо таким чином: студент власноруч робить універсальну тригонометричну підстановку, далі звертається до додатку для перетворення отриманого виразу, потім власноруч виконує розбиття на елементарні дроби та знову звертається до додатку для знаходження первісних отриманих дроби. Таким чином частину роботи виконує сам студент, а питанням рутинних перетворень та виведенням табличних інтегралів займається додаток.

Як показало спостереження за роботою студентів, використання онлайн-калькуляторів економило час розв'язування чим давало можливість розв'язати більшу кількість прикладів. Студенти з низьким рівнем навчальних досягнень під керівництвом

викладача аналізували розв'язану додатком задачу підвищеної складності, розбиваючи її на окремі елементи. Студенти з вищим рівнем пізнавальних можливостей використовували додатки для перевірки своїх припущень щодо доцільності вибору методу інтегрування; контролювали етапи самостійного розв'язання задачі, звіряючи їх із розв'язанням, виведеним додатком; експериментували з параметрами функції для з'ясування їх впливу на кінцевий результат.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Дослідження показало, що використання онлайн-калькуляторів у викладанні вищої математики поліпшує якість засвоєння матеріалу студентами. Студенти, які використовували ці інструменти, демонстрували краще розуміння теоретичних концепцій, більшу мотивацію до вивчення та більшу впевненість у своїх знаннях. В подальших наукових пошуках плануємо провести додаткові дослідження щодо впливу використання цих інструментів на студентів з різними рівнями навчальних досягнень та статистично перевірити ефективність їх застосування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Івашченко, В. П., Швачич, Г. Г., Коноваленков, В. С., Заборова, Т. М., Христьян, В. І. (2013). Вища математика із застосуванням інформаційних технологій: підручник. Дніпропетровськ. (Ivashchenko, V. P., Shvachych, H. H., Konovalenkov, V. S., Zaborova, T. M., Khrystian, V. I. (2013). Higher mathematics with the use of information technology: textbook. Dnipropetrovsk).
2. Кізановська, Н. М., Рашевська, Н. В., Семеріков, С. О. (2014). Теоретико-методичні засади використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні вищої математики студентів інженерних спеціальностей у Сполучених Штатах Америки: монографія. Кривий Ріг: Видавничий відділ ДВНЗ «Криворізький національний університет». (Kiiapanovska, N. M., Rashevska, N. V., Semerikov, S. O. (2014). Theoretical and methodological principles of the use of information and communication technologies in the teaching of higher mathematics to students of engineering specialties in the USA: monograph. Kryvyi Rih: Vydavnychiy viddil DVNZ «Kryvyi Rih National University»).
3. Коваль, Т. І. (2007). Професійна підготовка з інформаційних технологій майбутніх інженерів-економістів [монографія]. Київ: Ленвіт. (Koval, T. I. (2007). Professional training in information technologies for future engineers-economists [monograph]. Kyiv: Lenvit).
4. Крупський, Я. В. (2012). Перевірка ефективності використання навчальних Maple-тренажерів для організації самостійної роботи студентів. Інформаційні технології і засоби навчання, 1(27). (Krupskyy, Ya. V. (2012). Check of the efficiency of educational maple-simulators for organization of students independent work. Information Technologies and Learning Tools, 1(27)).
5. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року. (2013). Режим доступу: <http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013>. (National Strategy for the Development of Education in Ukraine until 2021 on the modernization of the content of education (2013). Retrieved from: <http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013>.)
6. Семеріков, С. О. (2009). Фундаменталізація навчання інформативних дисциплін у вищій школі. Кривий Ріг: Мінерал; Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова. (Semerikov, S. O. (2009). Fundamentalization of Computer Science teaching at the high educational institutions: monograph. Kryvyi Rih: Mineral; Kyiv: NPU im. M. P. Drahomanova).
7. Сінько, Ю. І. (2009). Системи комп'ютерної математики та їх роль у математичній освіті. Інформаційні технології в освіті, 3, 274–278. (Sinko, Yu. I. (2009). Systemy kompiuternoi matematyky ta yikh rol u matematychnii osviti. Information Technologies in Education, 3, 274–278).
8. Триус, Ю. В. (2005). Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах (дис. доктора пед. наук : 13.00.02). Київ (Trius Yu. V. (2005). Kompiuterno-orientovani metodychni systemy

navchannia matematychnykh dystsyplin u vyshchykh navchalnykh zakladakh (DSc thesis abstract). Kyiv).

9. Тютюнник, О. І. (2013). Принципи вибору систем комп'ютерної математики для створення програмних засобів навчального призначення програмування. Вісник Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, 21(280), 134–139. (Tutiunnyk, O. I. (2013). Pryntsyry vyboru system kompiuternoї matematyky dlia stvorennia programnykh zasobiv navchalnoho pryznachennia programuvannia. Bulletin of Luhansk Taras Shevchenko National University, 21(280), 134–139).

Sachaniuk-Kavets'ka N. V., Prozor O. P., Kolomiets A. A. The use of interactive online calculators in teaching higher mathematics using the example of the topic «Indefinite Integral».

In the modern educational environment, interactive online calculators are becoming increasingly popular as an effective tool for teaching mathematics due to their ability to provide instant results, visualize mathematical concepts, and allow experimentation with function parameters. The purpose of this article is to explore the possibility of using online calculators in teaching higher mathematics, focusing on the topic of «Indefinite Integral». The research was based on the analysis of scientific literature, comparison of functionality of two popular online calculators, MathDF and Photomath, and observation of their usage in a real educational setting. The article discusses the advantages and disadvantages of using interactive online calculators. It emphasizes the potential application of such tools for demonstrating the solution of complex mathematical problems as a whole and for performing individual intermediate calculations arising during problem-solving. The practical significance of the research lies in the review of two interactive online applications regarding their potential and peculiarities for integration into the educational process to enhance learning quality and improve students' mastery of the subject matter using one of the topics as an example. The study has shown that the use of such tools in the study of the "Indefinite Integral" topic aids in method selection for integration, saves time on performing routine calculations, and allows students to verify the correctness of their independent solutions. Students who utilized these tools demonstrated better understanding of theoretical knowledge, increased confidence in their abilities, and enhanced analytical skills. In future research, we plan to conduct a detailed statistical analysis of the impact of using online applications on student categories with different academic achievements.

Key words: *learning, higher mathematics, indefinite integral, information technology, mobile application, interactive online calculator, MathDF, Photomath.*