УДК 517.5.52

Є. Г. Стадник
Н. В. Сачанюк-Кавецька

МЕТОД ХРЕСТІВ, ЯК НОВИЙ СПОСІБ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКА МАТРИЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Існує багато способів знаходження визначника, але при спробі автоматизувати цей процес виникає проблема - всі відомі способи знаходження визначника громіздкі, а універсальної формули знаходження визначника вищих порядків не існує. Тому в даній роботі буде представлена формула, яка зможе оптимізувати процес знаходження визначника вищого порядку.

Ключові слова: матриця, визначник матриці, метод занулення, новий метод, метод хрестів.

Abstract
There are many ways to find a determinant, but when trying to automate this process, a problem arises - all known ways to find a determinant are cumbersome, and there is no universal formula for finding a determinant. Therefore, in this paper will present a formula that can optimize the process of finding the determinant.

Keywords: matrix, matrix determinant, zeroing method, new method, method of crosses.

Вступ

Термін «матриця» першим став вживати Джеймс Джозеф Сильвестр, який розглядав матрицю, як об'єкт, що породжує сімейство мінорів (визначників менших матриць, утворених викреслюванням рядків та стовпців з початкової матриці). У математичних підходах XIX ст. під «матрицею» розуміли «закономірний порядок розстановки чисел», які згодом стали називати «визначниками» або «детермінантами» [1]. Вивчення визначників відбувалось в різних галузях математики: Карл Фрідріх Гаусс першим встановив зв'язок між квадратними формами, лінійними відображеннями та матрицями; Коші розглядав визначники як многочлени та в 1829 році довів, що власні значення симетричних матриць є дійсними числами [2].

В сучасних наукових дослідженнях визначник матриці є одним із найважливіших понять, яке дозволяє розв'язувати системи лінійних рівнянь, знаходити власні числа та власні вектори та застосовується в багатьох інших областях математики, фізики, теоретичної електротехніки та ін. При цьому, для обчислення визначників четвертого та вищих порядків використовують розклад Лапласа, як лінійну комбінацію мінорів $(n-1)$-го порядку. Тому актуальними є спроби знаходження універсальної формули знаходження визначників вищих порядків, які дозволяли б легко автоматизувати процес обчислення.

Результати дослідження

Метод занулення [3] – це спосіб знаходження визначника, який базується на перетвореннях матриці таким чином, щоб в одному рядку (стовпці) залишилось лише одне відмінне від нуля число. Після перетворення визначник обчислюється шляхом розкладання за зануленим рядком (стовпцем).

Приклад знаходження визначника матриці методом занулення:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 1p.\cdot(-2)+2p.\to 2p. \\ 1p.\cdot(-1)+3p.\to 3p. \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -9 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1(27+2) = -29$$

Метод Хрестів

На базі методу занулення виведемо метод хрестів для матриць 3-го та 4-го порядку. Для цього занулимо третій стовпець матриці третього порядку загального виду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 1p.(k=-\dfrac{a_{23}}{a_{13}})+2p.\to 2p. \\ 1p.(x=-\dfrac{a_{33}}{a_{13}})+3p.\to 3p. \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k(a_{11})+a_{21} & k(a_{12})+a_{22} & 0 \\ x(a_{11})+a_{31} & x(a_{12})+a_{32} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}((k(a_{11})+a_{21})(x(a_{12})+a_{32})-(k(a_{12})+a_{22})(x(a_{11})+a_{31})) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Одержану формулу (1) назвемо методом хрестів для матриці 3-го порядку. Виведемо в такий самий спосіб і формулу для визначника 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 1p.\cdot(k=-\dfrac{a_{24}}{a_{14}})+2p.\to 2p. \\ 1p.\cdot(x=-\dfrac{a_{34}}{a_{14}})+3p.\to 3p. \\ 1p.\cdot(y=-\dfrac{a_{44}}{a_{14}})+4p.\to 4p. \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} & 0 \\ xa_{11}+a_{31} & xa_{12}+a_{32} & xa_{13}+a_{33} & 0 \\ ya_{11}+a_{41} & ya_{12}+a_{42} & ya_{13}+a_{43} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{14}\begin{vmatrix} ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ xa_{11}+a_{31} & xa_{12}+a_{32} & xa_{13}+a_{33} \\ ya_{11}+a_{41} & ya_{12}+a_{42} & ya_{13}+a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 1p.\cdot(z=-\dfrac{xa_{13}+a_{33}}{ka_{13}+a_{23}})+2p\to 2p. \\ 1p.\cdot(t=-\dfrac{ya_{13}+a_{43}}{ka_{13}+a_{23}})+3p.\to 3p. \end{matrix} \right\} =$$

$$= a_{14}\begin{vmatrix} ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ zka_{11}+za_{21}+xa_{11}+a_{31} & zka_{12}+za_{22}+xa_{12}+a_{32} & 0 \\ tka_{11}+ta_{21}+ya_{11}+a_{41} & tka_{12}+ta_{22}+ya_{12}+a_{42} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(a_{14})(ka_{13}+a_{23})[(xt-zy)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - (tk+y)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (zx+x)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}],$$

де *k, x, y, z, t* – коефіцієнти занулення. Використовуючи цей підхід можна вивести формулу для матриці будь-якого порядку враховуючи, що кількість матриць 2-го порядку буде змінюватись формулою:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i),$$

де n – кількість рядків;

Наведемо приклад знаходження визначника матриці методом Хрестів.

1. Знайти визначник матриці 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Для зручності запишемо значення k та x зліва від матриці, і підставимо всі значення в формулу:

$$\begin{matrix} k=-\dfrac{4}{1}=-4 \\ x=-\dfrac{-2}{1}=2 \end{matrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}) = (-18-4-7) = -29 \ .$$

Очевидно, що одержаний результат збігається із результатом обчислення визначника шляхом занулення.

2. Знайти визначник матриці 4-го порядку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Обрахуємо *k, x, y, z, t*:

$$k = -\frac{3}{1} = -3; \quad x = -\frac{2}{1} = -2; \quad y = -\frac{4}{1} = -4;$$

$$z = -\frac{-2 \cdot 2 + 1}{-3 \cdot 2 + 3} = -1; \quad t = -\frac{-4 \cdot 2 + 2}{-3 \cdot 2 + 3} = -2$$

Тепер обраховуємо визначник за формулою (2):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 \cdot 2 + 3)[(4-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (6-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (2-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}] =$$

$$= -3(-2(-10) + 0 + 0 - 5 + 10) = -75$$

Висновки

У порівняні з іншими методами метод хрестів має ряд переваг:

1) Універсальність. Він підходить для матриць будь-якого порядку;
2) Лаконічність. Знаходження визначника цим методом не займає багато часу і сил.
3) Легкий для розуміння.

Використовуючи метод хрестів можна оптимізувати процес обрахунку визначника матриці, оскільки даний метод є більш лаконічний, зрозумілий і вимагає менше часу на реалізацію.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Юшкевич А.П. Історія математики в середні століття / А.П. Юшкевич. – М., 2002. – С. 25-26.
2. Клейн Ф. Лекції про розвиток математики в XIX столітті / Ф. Клейн. – М., 2000. – С. 42-45.
3. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. Навчальний посіьник з лінійної алгебри— Київ: ВПЦ "Київський університет", 2019.— 224с.

Стадник Єгор Григорович – студент 1-го курсу, Вінницький національний технічний університет; факультет електроенергетики, електромеханіки та електротехніки; stadnike33@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** – л. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Stadnyk Yehor H.– 1st year student, Vinnytsia National Technical University; Faculty of Electric Power Engineering, Electromechanics and Electrical Engineering; stadnike33@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnitsa National Technical University, skn1901@gmail.com