УДК 681.5.015:007

Застосування нечіткої когнітивної карти для моделювання російсько-української війни

Олександр Ротштейн
професор, д-р техн. наук
ORCID: 0000-0002-4048-3014
o.rotshtein@donnu.edu.ua

Донецький національний університет імені Василя Стуса

Тетяна Нескородєва
доцент, д-р техн. наук
ORCID: 0000-0003-2474-7697
t.neskorodieva@donnu.edu.ua

Донецький національний університет імені Василя Стуса

Денис Катєльніков
доцент, канд. техн. наук
ORCID: 0000-0002-4150-9650
fuzzy2dik@gmail.com

Вінницький національний технічний університет

Ключові слова:
російсько-українська війна, нечітка когнітивна карта, сценарне моделювання, ядерна загроза, ранжування факторів впливу, парні ефекти.

Російсько-українська війна є актуальним об’єктом моделювання засобами дослідження операцій та системного аналізу. Найважливішим аспектом є моделювання загрози застосування ядерної зброї, яка пов’язана з потенційними можливостями Росії. Російсько-українська війна розглядається як динамічна система, змінними якої є фактори, що впливають на втрати російської армії та загрозу застосування ядерної зброї. Для моделювання використовується нечітка когнітивна карта, тобто орієнтований граф, вершини якого – це змінні моделі, а ваги дуг – це сили позитивних та негативних впливів змінних одна на одну. Як фактори, що впливають на втрати російської армії та загрозу ядерного удару, обрані такі: опір української армії, підтримка України зброєю, економічні санкції проти Росії, опозиція російської влади та інстинкт її самозбереження. Сили впливу факторів один на одного та на можливість застосування ядерної зброї оцінюються експертно за допомогою нечітких термів, яким відповідають числові величини. Для налаштування нечіткої когнітивної карти використовується генетичний алгоритм. Генетичний алгоритм знаходить такі сили факторів впливу, які мінімізують розбіжність між результатами моделювання та експертними оцінками. Налаштована нечітка когнітивна карта використовується для сценарного моделювання російсько-української війни за схемою «що буде, якщо» та для ранжування факторів за ступенем їх впливу на рівень ядерної загрози. У цій роботі показано, що нечіткі когнітивні карти є аналогом диференціальних рівнянь, які традиційно використовуються для моделювання динаміки втрат у воєнних конфліктах. Перевага нечіткої когнітивної карти полягає у можливості використання експертної інформації для обліку взаємопов’язаних факторів, що впливають на динаміку втрат та рівень ядерної загрози. Перспективним напрямом подальших досліджень є розширення запропонованої моделі на основі детальної класифікації факторів, що впливають на розвиток російсько-української війни.

DOI: 10.31558/2786-9482.2023.1.1

Вступ

У ніч на 24 лютого 2022 року Кремль оголосив про проведення «спеціальної воєнної операції в Україні», розв'язавши повноцінну агресивну війну з Україною. Весь світ згуртувався у протистоянні агресивним планам Кремля, виявивши небувалу солідарність із українцями. Спроба швидкого захоплення сусідньої країни провалилася. У відповідь на російську агресію західні країни почали постачання озброєння Україні та оголосили Росії економічні санкції. Це призводить до зростання втрат російської армії та виникнення антивоєнних настроїв у російському суспільстві. Росія має ядерну зброю, застосування якої, на думку провідних політичних експертів, є можливим, якщо не вдасться досягти цілей агресії за допомогою звичайної (конвекціональної) зброї. Факторами, які стримують ядерну загрозу, є опозиція російської влади, викликана економічними санкціями, та інстинкт її самозбереження, тобто страх відповідного ядерного удару з боку Заходу.

Воєнні та бойові дії – це традиційний та історично перший об'єкт моделювання в науці, яка займається дослідженням операцій [1]. Із математичними методами кількісного обґрунтування рішень у цій галузі можна ознайомитися в оглядах [2, 3]. Судячи з прикладних розробок [4], на стратегічному рівні прийняття рішень найбільшого поширення набули диференціальні рівняння Ф. Ланчестера [5], які моделюють динаміку зміни втрат кожної зі сторін, що воюють, залежно від параметрів бойової ефективності зброї та темпу введення резервів. Моделі Ф. Ланчестера мають такі недоліки:

- параметри бойової ефективності, що входять до рівнянь, спираються на статистичні дані, які отримати важко, і достовірність яких може бути сумнівною. Аналогічні проблеми виникають у статистичній теорії надійності систем [6], де відсутність інтенсивностей відмов нових елементів викликає недовіру до розрахунків показників надійності [7];
- фактори (технічні, політичні, економічні та інші), що впливають на динаміку втрат, явно не входять до рівнянь Ф. Ланчестера. Тому під час моделювання різних сценаріїв розвитку бойових дій неможливо варіювати фактори керованих змінних;
- рівняння не пристосовані до роботи з думками експертів, які є чи не єдиним джерелом інформації для моделювання в умовах невизначеності.

Альтернативою диференціальних рівнянь, що моделюють динаміку системи, є нечіткі когнітивні карти (НКК), що набули широкого поширення після виходу робіт [8, 9]. Із застосуванням НКК можна ознайомитися, наприклад, у [10, 11, 12]. НКК являє собою орієнтований граф зі зваженими дугами. Вершини графа – це змінні, які враховуються у моделі, а ваги дуг – це сили впливів змінних одна на одну. Покрокова динаміка значень змінних обчислюється за допомогою рекурентного співвідношення, що нагадує звичайний марківський ланцюг [1]. На відміну від марківського ланцюга, що використовує ймовірність станів і переходів між ними, НКК використовує рівні значень змінних та сили їх впливів, які описуються функціями належності нечітких множин [13]. Застосування в НКК нечіткої математики забезпечує зручність моделювання динаміки систем з якісними змінними, що вимірюються експертно. До того ж дотримується *принцип несумісності (incompatibility) високої складності з високою точністю* [13]. Цікаво зазначити, що моделі, аналогічні НКК, розглядалися в книзі [14] задовго до публікацій [8, 9], однак у численних роботах з НКК книга [14] не згадується.

Доцільність застосування НКК для моделювання воєнних конфліктів випливає з таких аналогій:

- зв'язок рівнянь Ф. Ланчестера [5] з методом динаміки середніх, що безпосередньо випливає з марківських процесів, показана в роботі [1];
- згідно з [1], метод динаміки середніх, що застосовується для моделювання бойових дій, безпосередньо пов'язаний з моделями «хижак – жертва» в динаміці популяцій [15];
- можливість моделювання динаміки популяцій за допомогою НКК показана в [16].

Отже, застосування НКК – це природний напрям розвитку теорії моделювання воєнних дій, заснованої на рівняннях Ф. Ланчестера.

Мета цієї статті – показати застосування НКК для моделювання військово-політичних систем на прикладі російсько-української війни. Враховуючи потенційні можливості однієї з воюючих сторін, основний акцент у моделюванні робиться на прогнозування рівня ядерної загрози та ранжування факторів, що впливають на це. Корисність та необхідність ранжування факторів (причин), що впливають на деяку цільову функцію (наслідок), зазначається в роботі [17] – одній із перших монографій структурного аналізу систем в умовах невизначеності.

Під час написання статті використовувався досвід застосування НКК як засобу емпіричного моделювання надійності, безпеки та ризику в людино-машинних системах [18, 19, 20, 21]. Стаття складається із двох розділів: у першому розділі наводяться основні поняття та алгоритми, необхідні для застосування НКК, у другому розділі – результати моделювання.

Методика моделювання

Загальні відомості

Відповідно до Б. Коско [8], НКК є орієнтованим графом, дуги якого є зваженими нечіткими термами [13]. Вершини графа, які названі *концептами,* відповідають змінним, які враховуються в моделі, а ваги дуг відображають *сили впливів* зміни *змінних-причин* на зміну *змінних-наслідків.* Терміном *когнітивний* підкреслюється, що вихідними даними для моделювання є суб'єктивні думки експерта про сили впливів, виражені словами типу *підвищується* або *знижується*. Термін *нечіткі* вказує на те, що НКК використовують різні рівні *підвищення* та *зниження,* які задаються числами з інтервалів [0, 1] і [–1, 0], що відповідає термам *слабо, середньо, сильно* з теорії нечітких множин [13].

Концепти

Нехай $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ - відома множина концептів, тобто змінних, які використовуються у моделі. Кожен концепт $C_i \in C$ будемо вважати лінгвістичною змінною [13], яка задана на універсальній множині $\left[\underline{x_i}, \overline{x_i}\right]$ та оцінюється функцією належності $\mu_T(x_i)$ значення $x_i \in \left[\underline{x_i}, \overline{x_i}\right]$ до нечіткого терму T, де $\underline{x_i}(\overline{x_i})$ нижня (верхня) межа інтервалу допустимих значень концепту C_i.

Зауваження. У роботах з НКК, наприклад, [10, 11, 12], концепт оцінюється числом з інтервалу [0, 1], яке відображає ступінь належності до деякого нечіткого терму. У цій роботі концепт C_i оцінюється числом $x_i \in \left[\underline{x_i}, \overline{x_i}\right]$, яке визначається одним зі способів: (а) експертом

безпосередньо або (b) шляхом дефаззифікації експертної оцінки концепту у вигляді нечіткого терму T.

Зв'язки між концептами

Вага w_{ij} дуги, що з'єднує концепти C_i і C_j, вказує на силу впливу C_i на C_j. Нехай концепти C_i і C_j характеризуються змінними x_i та x_j, а внаслідок експерименту вдається побудувати залежність $x_j = \varphi(x_i)$. Тоді вага w_{ij} визначається як похідна $w_{ij} = dx_j/dx_i$, яка може бути однією з трьох видів:

$w_{ij} > 0$, якщо підвищення (зниження) величини x_i призводить до підвищення (зниження) величини x_j (позитивний вплив C_i на C_j);

$w_{ij} < 0$, якщо підвищення (зниження) величини x_i призводить до зниження (підвищення) величини x_j (негативний вплив C_i на C_j);

$w_{ij} = 0$, якщо значення x_j не залежить від значення x_i (відсутність впливу C_i на C_j).

Силу впливу (w_{ij}) будемо оцінювати експертно за допомогою лінгвістичних термів та шкали термометра (табл. 1). Якщо враховуються думки кількох експертів, то величина w_{ij} оцінюється як зважена середня оцінка кожного з експертів.

Таблиця 1. Оцінка сили впливу

Шкала термометра	Лінгвістичні оцінки	Числові значення
	Позитивна максимальна	1
	Позитивна вище за середньої	0.75
	Позитивна середня	0.5
	Позитивна нижче середньої	0.25
	Відсутнє	0
	Негативна нижче середньої	–0.25
	Негативна середня	–0.5
	Негативна вище середньої	–0.75
	Негативна максимальна	–1

Практична можливість експертної оцінки w_{ij} безпосередньо пов'язана із чудовою, як зазначав В. М. Глушков [23], здатністю людського ока виявляти лінійні залежності у задачах екстраполяції.

Рекурентне співвідношення

Для опису коливального процесу у НКК використовуються такі поняття:

- $(n \times n)$ – *матриця сил впливів* концептів C_i один на одного, у якій діагональні елементи дорівнюють нулю, тобто:

$$\boldsymbol{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & 0 & \dots & w_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- *Початковий стан* НКК, який визначається вектором:

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right], \quad (2)$$

елементи якого дорівнюють значенням концептів на кроці k=0.

- *Стаціонарний стан* НКК, який визначається вектором:

$$\boldsymbol{X}^{(l)} = \left[x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_n^{(l)}\right] \quad (3)$$

на такому кроці l, коли внаслідок взаємодії між концептами НКК входить у сталий режим, за якого $\left|x_i^{(l)} - x_i^{(l-1)}\right| < \varepsilon$, де ε – мале додатне число, i =1, 2, …, n.

Зауваження. Стаціонарний стан, до якого сходиться коливальний процес у НКК, може відповідати одному з видів стійкості [24]: фокус, орбіта чи хаотичний атрактор.

Для отримання рекурентного співвідношення, що моделює динаміку НКК, будемо використовувати збільшення значень концептів на кроках k=0, 1, 2, …. Значення концепту C_i на кроці (k+1) залежить від значень концептів C_j (j=1, 2, …, n) на попередньому кроці k. Позначимо цю залежність як:

$$x_i^{(k+1)} = \Psi\left(x_1^{(k)}, \dots, x_j^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right). \quad (4)$$

Із (4) випливає взаємозв'язок приростів (Δ) значень концептів на сусідніх кроках k і (k+1):

$$\Delta x_i^{(k+1)} = \frac{\partial x_i^{(k+1)}}{\partial x_1^k}\Delta x_1^{(k)} + \dots + \frac{\partial x_i^{(k+1)}}{\partial x_j^k}\Delta x_j^{(k)} + \dots + \frac{\partial x_i^{(k+1)}}{\partial x_n^k}\Delta x_n^{(k)}. \quad (5)$$

Частинні похідні (5) відповідають силам впливів концептів один на одного $\frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial x_j^k} = w_{ji}$. Тому співвідношення (5) можна записати у вигляді:

$$\Delta x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^k \, w_{ji}, i = 1,\ 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$\Delta x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}, \quad \Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}. \quad (7)$$

З урахуванням (6) та (7) отримуємо рівняння динаміки покрокової зміни значень концептів:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right)w_{ji}. \quad (8)$$

Співвідношення (8) можна подати в такій матричній формі:

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{X}^{(k)} \oplus \left(\boldsymbol{X}^{(k)} \ominus \boldsymbol{X}^{(k-1)}\right)\boldsymbol{W}_0, \quad (9)$$

де «⊕» та «⊖» – операції поелементного додавання та віднімання векторів, які виконуються за схемою:

$$[a,b] \oplus [c,d] = \lfloor a + c,\ b + d \rfloor,$$

$$[a,b] \ominus [c,d] = [a - c, b - d].$$

У (9) передбачається, що за *k*=0:

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(0)} \oplus \boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{W}_0.$$

Прогнозування значення вихідної змінної

Розглянемо систему «входи – вихід», у якій концепт C_n – це вихідна змінна, інші концепти $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ – це вхідні змінні, що впливають одна на одну. Тоді прогнозування значення вихідної змінної здійснюється за таким алгоритмом:

Крок 1. Установити початковий стан НКК (2):

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \left[x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_{n-1}^{(0)},\ x_n^{(0)} = 0\right],\ x_i \in \left[\underline{x_i},\ \overline{x_i}\right], \quad (10)$$

Крок 2. За рекурентним співвідношенням (9) обчислити вектор (3) значень концептів у стаціонарному стані.

Крок 3. В отриманому векторі (3) зафіксувати значення $x_n^{(l)}$ та вважати його прогнозом $\widehat{x_n}$ виходу для поточного вхідного вектора (10).

Ранги концептів-входів характеризують їх важливість у сенсі впливу на концепт-вихід. Методика ранжування концептів НКК запропонована у [18]. Індекс важливості вхідного концепту C_j відповідає величині $x_n^{(l)} = \widehat{x_n}$, отриманій для вектора (10), у якому значення концепту C_j задано на верхньому рівні, інші концепти-входи задано на нижніх рівнях. Аналогічно обчислюються індекси спільного впливу кількох вхідних концептів.

Налаштування НКК

Налаштування НКК аналогічне до знаходження невідомих параметрів звичайного рівняння регресії методом найменших квадратів [20]. У разі НКК невідомими параметрами є сили впливів (1). Вони задаються експертно, тому не гарантується збіг прогнозів з експериментальними даними. Суть налаштування полягає в тому, щоб покращити експертні оцінки сил впливів (1) з урахуванням спостережень за вихідними величинами.

Вважатимемо, що внаслідок спостережень вдається зібрати дані, які представлені в табл. 2, де x_{ip} – значення концепту C_i у спостереженні *p*, *i*=1, 2, …, *n*; *p*=1, 2, …, *N*, *N* – кількість спостережень. Передбачається, що значення x_{ip} у табл. 2 отримані методом експертних оцінок. Параметрами НКК, які налаштовуються за результатами спостережень,

є ваги дуг $w_{ij} \in \left[\underline{w_{ij}},\ \overline{w_{ij}}\right]$, де $\underline{w_{ij}}$ та $\overline{w_{ij}}$ – нижня та верхня межі інтервалу допустимих значень w_{ij}.

Таблиця 2. Спостереження «входи – вихід»

№	Входи				Вихід
	C_1	C_2	…	C_{n-1}	C_n
1	x_{11}	x_{21}	…	$x_{n-1,\,1}$	x_{n1}
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
p	x_{1p}	x_{2p}	…	$x_{n-1,\,p}$	x_{np}
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
N	x_{1N}	x_{2N}	…	$x_{n-1,\,N}$	x_{nN}

Позначимо через $\widehat{x_n} = F(\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{W}_0)$ модель залежності «входи – вихід», яка відповідає алгоритму прогнозування. За цією моделлю та інформацією з табл. 2 знайдемо відхилення:

$$\varepsilon_p = x_{np} - \widehat{x_{np}},\ \ p = 1,\ 2, \dots, N, \tag{11}$$

де x_{np} – значення виходу в p-му спостереженні;

$\widehat{x_{np}}$ – прогноз виходу за значень входів з p-го спостереження, тобто $\widehat{x_{np}} = F\left(x_{1p},\ x_{2p}, \dots, x_{n-1,p},\ x_{n,p} = 0,\ \boldsymbol{W}_0\right)$.

Дотримуючись прийнятого в регресійному аналізі методу найменших квадратів, задачу налаштування НКК з урахуванням спостережень сформулюємо так: знайти таку матрицю сил впливів $\boldsymbol{W}_0 = \left[w_{ij},\ i = 1, 2, \dots,\ n,\ j = 1,\ 2, \dots, n\right]$, елементи якої задовольняють обмеження $w_{ij} \in \left[\underline{w_{ij}},\ \overline{w_{ij}}\right]$ і мінімізують суму квадратів відхилень (11), тобто:

$$S(\boldsymbol{W}_0) = \sum_{p=1}^{N} \left(x_{np} - F\left(\boldsymbol{X}_p, \boldsymbol{W}_0\right)\right)^2 \underset{\boldsymbol{W}_0}{\rightarrow} min, \tag{12}$$

де $\boldsymbol{X}_p = \left[x_{1p},\ x_{2p}, \dots, x_{n-1p},\ \ x_{np} = 0\right], p = 1,\ 2, \dots, N.$

Нижче продемонструємо методику вибору інтервалів допустимих значень ваг дуг та генетичний алгоритм розв'язання задачі (12) на прикладі НКК російсько-української війни.

Результати моделювання

НКК воєнного конфлікту

Концепти, що використовуються у НКК російсько-української війни, представлені у табл. 3 зі зазначенням інтервалів можливих значень змінних. Список концептів обраний експертно і відображає думку авторів про об'єкт моделювання. Побудова докладної ієрархії факторів, що впливають на рівень воєнного протистояння між Росією та Україною, є самостійним науковим завданням, яке в цій роботі не розглядається.

Граф НКК показано на рис. 1. Ваги дуг графа, що відбивають сили впливів концептів, вибрано експертно з урахуванням табл. 1. Матриця (1) сил впливів має вигляд:

$$\mathbf{W}_0 = \begin{array}{c|ccccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \\ C_1 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0.75 \\ C_4 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ C_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0 & 0 \\ C_7 & 0 & -0.5 & 0 & -0.25 & 0 & 0.75 & 0 \end{array} \quad (13)$$

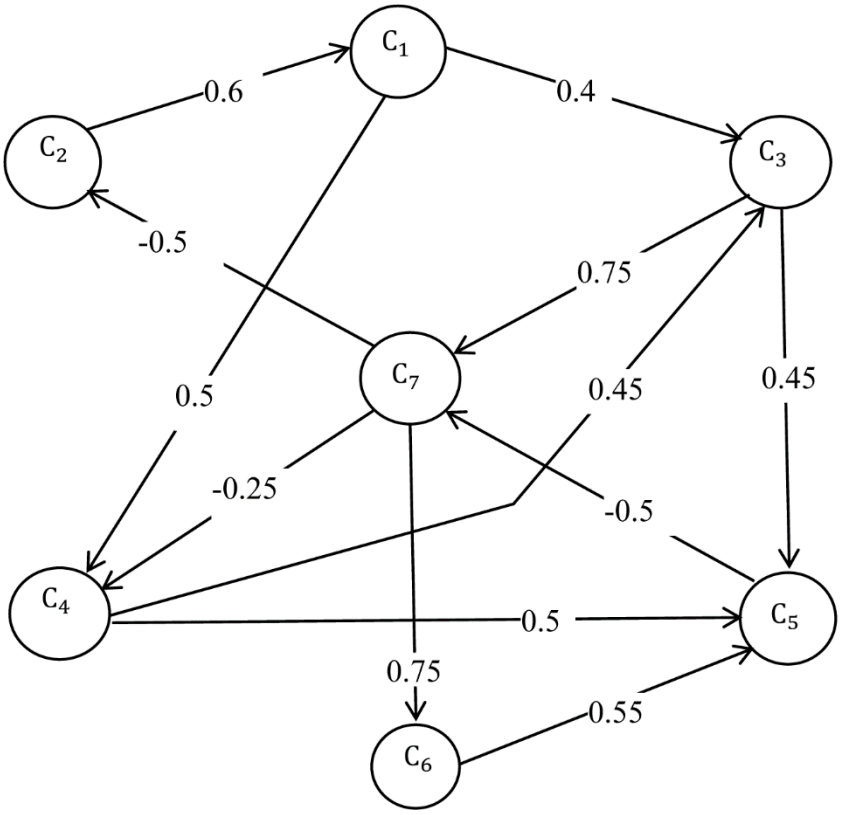


Рисунок 1. НКК воєнного конфлікту

Таблиця 3. Концепти моделі конфлікту

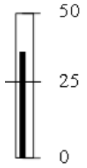
Концепт	Зміст	Інтервал для оцінки
C_1	Опір української армії	[0, 50]
C_2	Підтримка української армії зброєю	[0, 50]
C_3	Втрати російської армії	[0, 50]
C_4	Економічні санкції на Росію	[0, 50]
C_5	Опозиція російської влади	[0, 50]
C_6	Інстинкт самозбереження російської влади	[0, 50]
C_7	Загроза ядерного удару	[–25, 25]

Для експертної оцінки змінних, що відповідають концептам із табл. 2, будемо використовувати шкали, представлені в табл. 4 і 5.

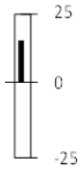
Зауваження. Числові значення, які розташовані навпроти лінгвістичних оцінок у табл. 1, 2 та 5, відповідають максимумам функцій належності нечітких термів [13].

Матриця (13) спільно з рекурентним співвідношенням (9) дає змогу спостерігати покрокову зміну значень концептів із табл. 3 для заданого початкового вектора (2).

Таблиця 4. Оцінка рівня концептів $C_1, C_2, \ldots, C_6$

Шкала	Лінгвістичні оцінки	Числа
	Високий Вище середнього Середній Нижче середнього Низький	50 37.5 25 12.5 0

Таблиця 5. Оцінка рівня концепту C_7

Шкала	Лінгвістичні оцінки	Числа
	Максимальний Підвищений Стабільний Знижений Мінімальний	25 12.5 0 –12.5 –25

У прикладі на рис. 2 за початкового стану НКК $\boldsymbol{X}^{(0)} = [40 \quad 25 \quad 15 \quad 20 \quad 10 \quad 5 \quad 0]$ отримуємо такий стаціонарний стан: $\boldsymbol{X}^{(l)} = [52 \quad 20 \quad 55 \quad 43 \quad 63 \quad 12 \quad 10]$. У цьому векторі значення $\widehat{x_7} = 10$ може інтерпретуватися як деяке підвищення ризику ядерної загрози.

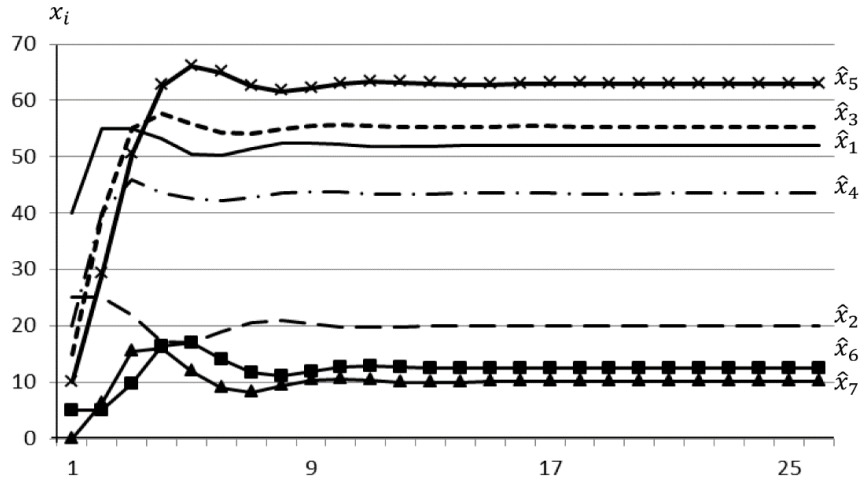


Рисунок 2. Приклад динаміки зміни значень концептів за початкового вектора $\boldsymbol{X}^{(0)} = [40\ 25\ 15\ 20\ 10\ 5\ 0]$

Зауваження. Застосування рекурентного співвідношення (9) може призвести до того, що накопичені значення концептів у стаціонарному стані виходять за інтервали допустимих значень. Оскільки це не впливає на якісний характер висновків, процедура нормування з [20] у цій статті не використовується.

Налаштування НКК

Інтервали ваг дуг. Параметрами НКК, які налаштовуються за результатами спостережень, є ваги дуг $w_{ij} \in \left[\underline{w_{ij}}, \overline{w_{ij}}\right]$. Під час вибору інтервалів $\left[\underline{w_{ij}}, \overline{w_{ij}}\right]$ орієнтуємося на такі припущення:

- вид впливу $w_{ij} > 0$, $w_{ij} < 0$ або $w_{ij} = 0$ визначається експертно і під час налаштування НКК не змінюється;
- сила впливу w_{ij} оцінюється експертом з точністю до одного лінгвістичного терму (див. табл. 1), тобто ±0.2;
- сили позитивних $w_{ij} > 0$ та негативних $w_{ij} < 0$ впливів змінюються в інтервалах [0.05, 0.95] та [–0.95, –0.05] відповідно.
- З урахуванням цих припущень інтервали ваг дуг НКК вибираються за схемою (табл. 6): $0.3 \in [0.1,\ 0.5]$; $-0.3 \in [-0.5,\ -0.1]$; $0.1 \in [0.05,\ 0.3]$; $-0.1 \in [-0.3,\ -0.05]$; $0.8 \in [0.6,\ 0.95]$; $-0.8 \in [-0.95,\ -0.6]$.

Таблиця 6. Інтервали зміни ваг дуг

Вага	$\underline{w_{ij}}$	$\overline{w_{ij}}$
w_{13}	0.05	0.45
w_{14}	0.3	0.7
w_{21}	0.3	0.7
w_{35}	0.05	0.45
w_{37}	0.55	0.95
w_{43}	0.05	0.45
w_{45}	0.3	0.7
w_{57}	–0.7	–0.3
w_{65}	0.55	0.95
w_{72}	–0.7	–0.3
w_{74}	–0.45	–0.05
w_{76}	0.55	0.95

Генетичний алгоритм. Для розв'язання нелінійної задачі оптимізації (12) пропонується генетичний алгоритм, заснований на таких поняттях та операціях [25]: хромосома – закодований варіант розв'язку; популяція – початкові варіанти розв'язку; фітнес-функція – функція для розрахунку критерію відбору варіантів; схрещування – операція генерування хромосом-нащадків з хромосом-батьків; мутація – випадкова зміна елементів хромосоми.

Загальна структура генетичного алгоритму наведена нижче. В ній через $P(t)$ позначено батьківські хромосоми, а через $C(t)$ – хромосоми-нащадки на t-й ітерації алгоритму.

```
begin
     t = 0; задати початкове значення P(t);
     < оцінити P(t) за допомогою функції відповідності >
     while (поки не виконані умови завершення) do
          < схрестити P(t) і отримати C(t) >
          < зробити мутацію C(t) >
          < оцінити C(t) за допомогою фітнес-функції>
          < обрати P(t+1) з P(t) і C(t)>
          t = t + 1;
     end
end.
```

Хромосома визначається як рядок із ненульових елементів матриці $\boldsymbol{W}_0 = [w_{ij}]$, $w_{ij} = R\left[\underline{w_{ij}}, \overline{w_{ij}}\right]$, де $R[\underline{x}, \overline{x}]$ – операція вибору випадкового числа, рівномірно розподіленого на інтервалі $[\underline{x}, \overline{x}]$. Наприклад, для НКК на рис. 1 генератором початкової популяції хромосом є рядок:

$[w_{13}, w_{14}, w_{21}, w_{35}, w_{37}, w_{43}, w_{45}, w_{57}, w_{65}, w_{72}, w_{74}, w_{76}]$,

де $w_{13} = R[0.05, 0.45]$, $w_{14} = R[0.3, 0.7]$,
$w_{21} = R[0.3, 0.7]$, $w_{35} = R[0.05, 0.45]$,
$w_{37} = R[0.55, 0.95]$, $w_{43} = R[0.05, 0.45]$,
$w_{45} = R[0.3, 0.7]$, $w_{57} = R[-0.7, -0.3]$,
$w_{65} = R[0.55, 0.95]$, $w_{72} = R[-0.7, -0.3]$,
$w_{74} = R[-0.45, -0.05]$, $w_{76} = R[0.55, 0.95]$.

Звідси приклади хромосом:

[0.40, 0.36, 0.54, 0.44, 0.64, 0.13, 0.64, -0.44, 0.81, -0.38, -0.19, 0.67], (13)

[0.43, 0.69, 0.66, 0.41, 0.85, 0.26, 0.65, -0.63, 0.84, -0.40, -0.31, 0.65]. (15)

Схрещування пари хромосом-батьків породжує хромосому-нащадка. Операція схрещування виконується випадковим обміном генами (елементами) хромосом-батьків. Для цього кожному гену хромосоми-нащадка ставиться у відповідність випадкове число $\xi_1 = R[0,1]$. Якщо $\xi_1 \leq 0.5$, цей ген береться в першого з батьків, інакше ген береться у другого з батьків. Нехай хромосоми-батьки задаються рядками (14) і (15), а випадкові числа ξ_1 відповідають рядку [0.23, 0.54, 0.80, 0.14, 0.71, 0.58, 0.78, 0.06, 0.04, 0.06, 0.55, 0.30]. Тоді внаслідок схрещування (14) і (15) отримуємо хромосому-нащадка:

[0.40, 0.69, 0.66, 0.44, 0.85, 0.26, 0.65, –0.44, 0.81, –0.38, –0.31, 0.67]., (16)

Мутації може піддаватися кожен ген (16). Для цього кожному гену ставиться у відповідність випадкове число $\xi_2 = R[0,1]$ і задається коефіцієнт мутації q (в даному випадку q=0.1). Якщо $\xi_2 \leq q$, цей ген замінюється випадковим числом з інтервалу допустимих значень.

Нехай рядок випадкових чисел ξ_2 має вигляд:

[0.05, 0.66, 0.71, 0.01, 0.18, 0.83, 0.59, 0.68, 0.13, 0.43, 0.43, 0.78].

У хромосомі (16) піддаються мутації тільки перший і четвертий гени, і після цього хромосома-нащадок набуває вигляду:

[0.28, 0.69, 0.66, 0.08, 0.85, 0.26, 0.65, –0.44, 0.81, –0.38, –0.31, 0.67],

де 0.28 = *R* [0.05, 0.45], 0.08 = *R* [0.05, 0.45].

Фітнес-функцією є критерій (12) зі знаком мінус.

Відбір хромосом-батьків для схрещування здійснюється невипадково. Пріоритет надається найкращим розв'язанням. Чим більша фітнес-функція, тим більшою є ймовірність відбору хромосоми для схрещення [25]. Протягом виконання генетичного алгоритму розмір популяції залишається постійним. Тому після схрещувань та мутацій з отриманої популяції необхідно видалити хромосоми, що мають найгірше значення фітнес-функції.

Результати налаштування НКК

Для налаштування початкового варіанта НКК (рис. 1) використовувалися дані «фактори, що впливають – ядерна загроза» з табл. 7. Ці дані формувалися експертно із застосуванням лінгвістичних оцінок з табл. 4 та 5, а потім трансформувалися у числові значення. Внаслідок розв'язання задачі оптимізації (12) отримано ваги дуг графа НКК, які представлені в табл. 8. Порівняння експертних значень рівня ядерної загрози (x_7) і результатів моделювання ($\widehat{x_7}$) до і після налаштування НКК для 7 сценаріїв показано в табл. 9. Середнє абсолютне відхилення (MAD) та середня квадратична помилка (MSE) становлять:

$$MAD = \frac{1}{7}\sum_{p=1}^{7}\left|x_{7,p} - \widehat{x_{7,p}}\right| = \begin{cases} 3.99, & \text{до налаштування;} \\ 1.45, & \text{після налаштування;} \end{cases}$$

$$MSE = \frac{1}{7}\sum_{p=1}^{7}\left(x_{7,p} - \widehat{x_{7,p}}\right)^2 = \begin{cases} 20.90, & \text{до налаштування;} \\ 5.83, & \text{після налаштування.} \end{cases}$$

Таблиця 7. Дані для налаштування НКК

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	1	1	50	50	-25
2	5	5	5	5	40	40	-20
3	10	10	10	10	10	30	-10
4	20	20	20	20	20	20	0
5	30	30	30	3 0	10	10	10
6	40	40	40	40	5	5	20
7	50	50	50	50	1	1	25

Таблиця 8. Ваги дуг до та після налаштування

Вага	До налаштування	Після налаштування
w_{13}	0.4	0.2
w_{14}	0.5	0.65
w_{21}	0.6	0.4
w_{35}	0.45	0.25
w_{37}	0.75	0.55
w_{43}	0.45	0.25
w_{45}	0.5	0.3
w_{57}	–0.5	–0.35
w_{65}	0.55	0.75
w_{72}	–0.5	–0.7
w_{74}	–0.25	–0.15
w_{76}	0.75	0.65

Таблиця 9. Експертні оцінки та результати моделювання

№	x_7	До налаштування		Після налаштування	
		$\widehat{x_7}$	$\lvert x_7 - \widehat{x_7}\rvert$	$\widehat{x_7}$	$\lvert x_7 - \widehat{x_7}\rvert$
1	–25	–30.00	5.00	–25.01	0.01
2	–20	–21.22	1.22	–17.86	2.14
3	–10	–3.87	6.13	–4.38	5.62
4	0	0.97	0.97	0.00	0
5	10	13.72	3.72	10.20	0.2
6	20	23.40	3.40	17.86	2.14
7	25	32.47	7.47	25.00	0

Отже, застосування НКК з налаштованими вагами дуг дає змогу значно покращити показники MAD і MSE для розв'язання задачі оптимізації (12). Під час налаштування НКК використовувався генетичний алгоритм, який докладно описаний у [20, 21]. Динаміка зміни критерію оптимізації (12) зі збільшенням числа ітерацій (M) показана на рис. 3.

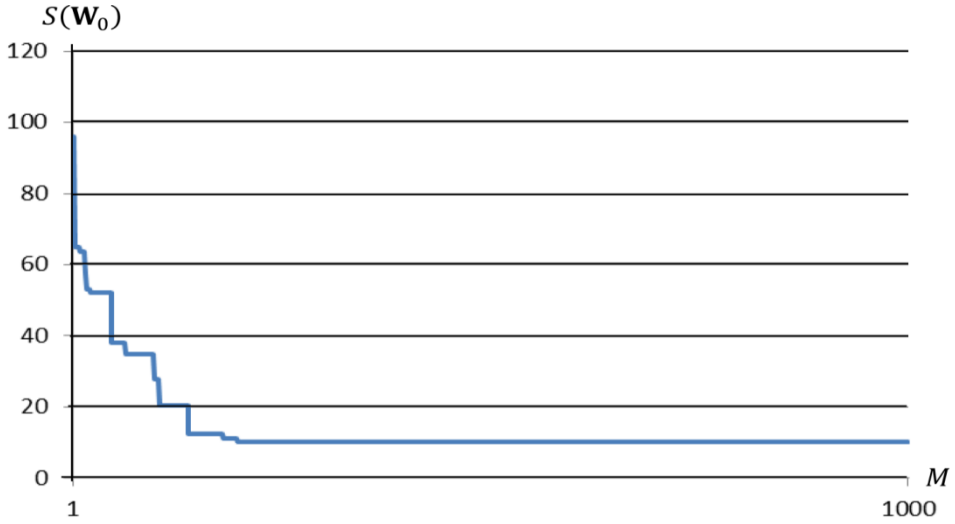


Рисунок 3. Динаміка зміни критерію оптимізації

Ранжування факторів, які впливають ядерну загрозу

Індекси важливості концептів $C_1, C_2, \dots, C_6$ за рівнем їх впливу на концепт C_7 збігаються зі значеннями x_7, які обчислюються за допомогою алгоритму розділу 1.5 за таких початкових векторів (10):

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [50, 0, 0, 0, 0, 0, 0] -$ для впливу концепту C_1,

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 50, 0, 0, 0, 0, 0] -$ для впливу концепту C_2,

…

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 0, 0, 0, 0, 50, 0] -$ для впливу концепту C_6.

Для кожного з цих векторів на рис. 4 показано покрокову зміну значень концепту C_7 до входження до стаціонарного режиму. Отримані значення $\widehat{x_7}$ подано на рис. 5 у вигляді діаграми, яка показує відносну важливість факторів, $(C_1, C_2, \dots, C_6)$, що впливають на рівень ядерної загрози (C_7). З рис. 5 видно, що найбільше підвищення ядерної загрози пов'язане зі втратами російської армії (C_3), а найбільше зниження цієї загрози викликають опозиція російської влади (C_5) та інстинкт її самозбереження (C_6).

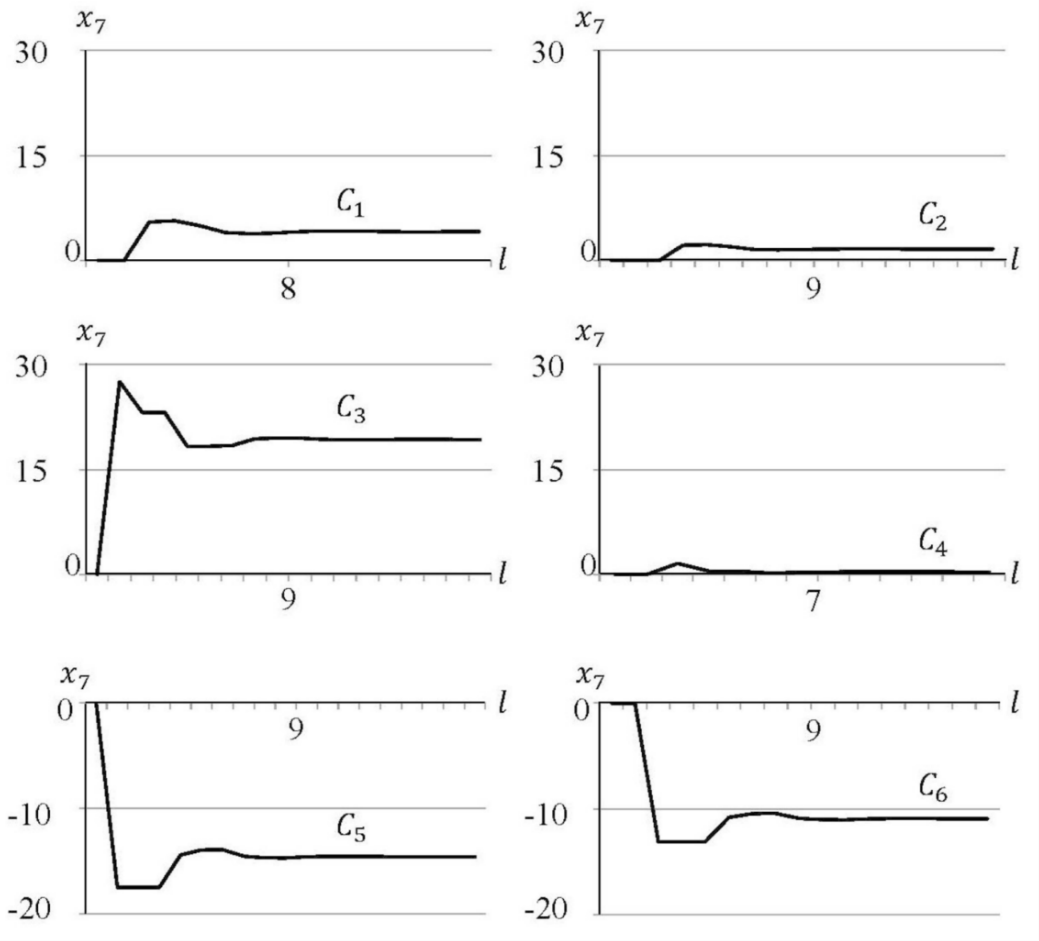


Рисунок 4. Покрокова зміна величини концепту C_7
під час обчислення індексів важливості концептів $C_1, C_2, \dots, C_6$

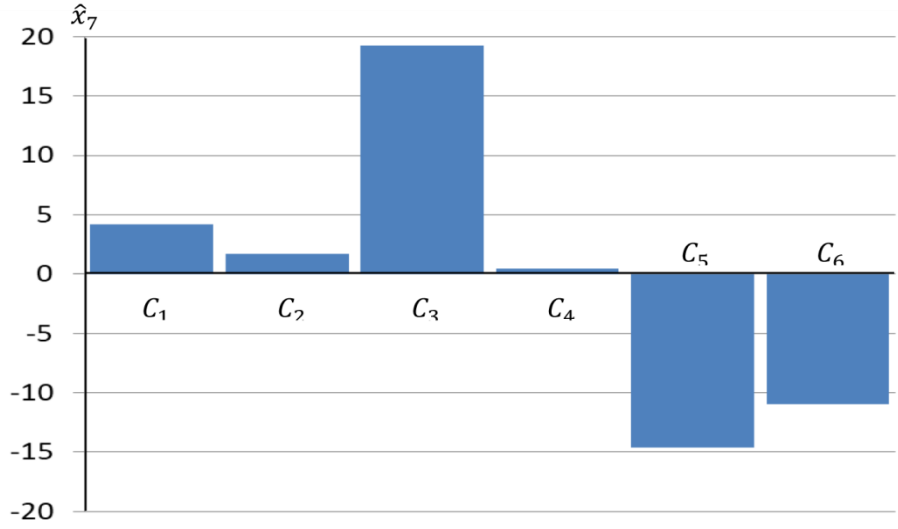


Рисунок 5. Діаграма парних впливів на концепт C_7

Для оцінки парних впливів факторів на концепт C_7 використовувалися такі початкові вектори:

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [50, 50, 0, 0, 0, 0, 0]$ – для сумісного впливу концептів C_1 і C_2,

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [50, 0, 50, 0, 0, 0, 0]$ – для сумісного впливу концептів C_1 і C_3,

…

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 0, 0, 0, 50, 50, 0]$ – для сумісного впливу концептів C_5 і C_6.

Діаграма найбільш важливих парних впливів представлена на рис. 6. Із нього видно, що найбільше підвищення ядерної загрози пов'язане зі спільним впливом українського опору (C_1) та російських втрат (C_3), а найбільше зниження цієї загрози викликають російська опозиція (C_5) та інстинкт самозбереження російської влади (C_6).

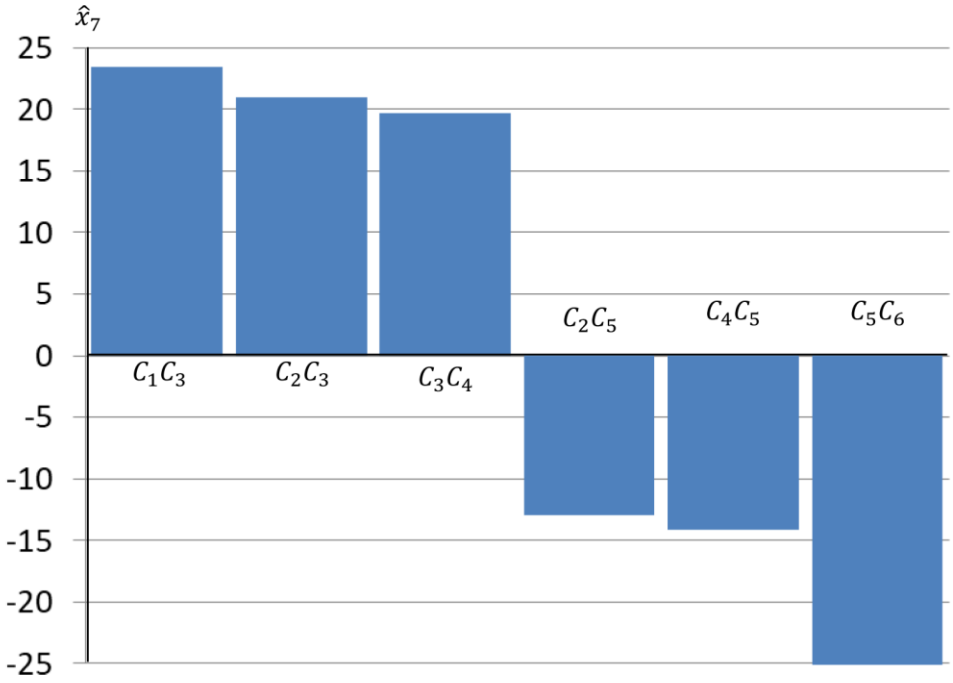


Рисунок 6. Діаграма парних впливів на концепт C_7

Ранжування факторів, які впливають втрати російської армії

Оскільки основним фактором, що впливає на рівень ядерної загрози, є втрати російської армії (C_3), нас цікавить ранжування факторів, що впливають на концепт C_3. Індекси важливості концептів $C_1, C_2, C_4, \dots, C_7$ за ступенем їх впливу на концепт C_3 збігаються зі стаціонарними значеннями $\widehat{x_3}$, які обчислюються за таких початкових векторів:

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [50, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ – для впливу концепту C_1,

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 50, 0, 0, 0, 0, 0]$ – для впливу концепту C_2,

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 0, 0, 50, 0, 0, 0]$ – для впливу концепту C_4,

…

$\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 50]$ – для впливу концепту C_7.

Отримані значення x_3 подано на рис. 7 у вигляді діаграми важливості впливу факторів $C_1, C_2, C_4, \dots, C_7$ на втрати російської армії (C_3). З рис. 7 видно, що найбільше підвищення російських втрат пов'язане з українським опором (C_1) та економічними санкціями (C_4), а найбільше зниження втрат викликає ядерну загрозу (C_7). Аналогічно отримано діаграму парних впливів факторів на концепт (C_3), яка показана на рис. 8.

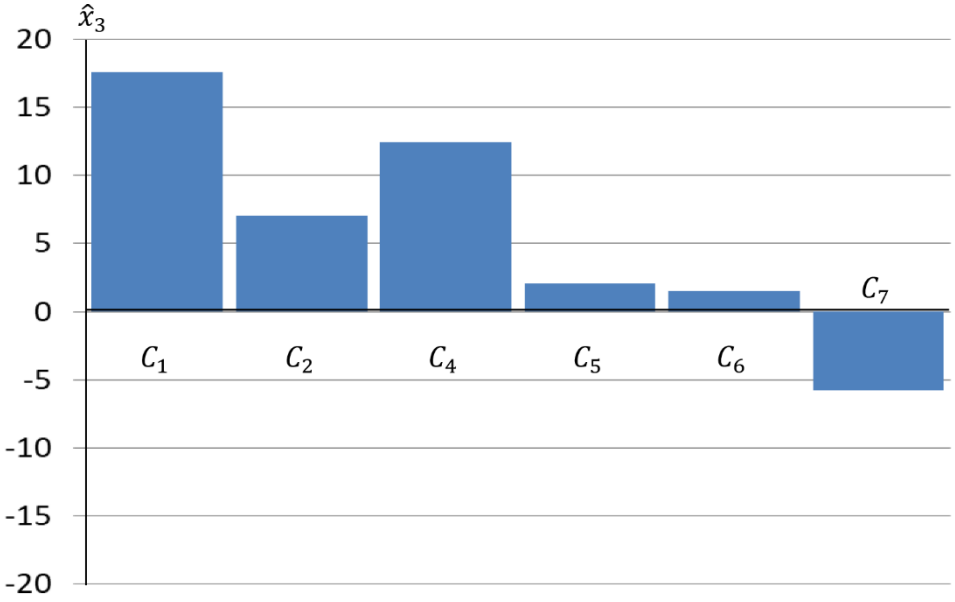


Рисунок 7. Діаграма парних впливів на концепт C_3

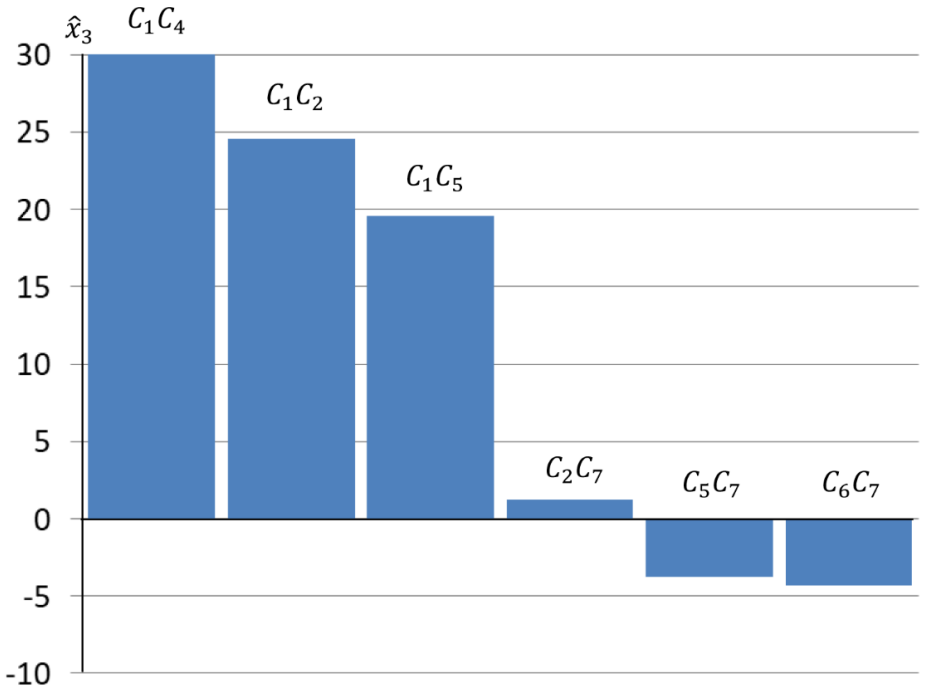


Рисунок 8. Діаграма парних впливів на концепт C_3

Висновки

Російсько-українська війна є актуальним об’єктом моделювання засобами дослідження операцій та системного аналізу. Найважливішим аспектом моделювання є прогнозування загрози застосування ядерної зброї, яка обумовлена можливостями однієї зі сторін війни.

У цій роботі показано, що НКК є аналогом диференціальних рівнянь, які традиційно використовуються для моделювання динаміки втрат у воєнних конфліктах. Перевага НКК, порівняно з диференціальними рівняннями, полягає у можливості використання експертної інформації для безпосереднього врахування військово-технічних, економічних, політичних

та інших взаємопов'язаних факторів, що впливають на динаміку втрат та рівень ядерної загрози.

Нами запропоновано модель російсько-українського війни у вигляді НКК з урахуванням факторів, пов'язаних з учасниками війни і країнами, що підтримують Україну. Для налаштування НКК використано експертну навчальну вибірку з семи сценаріїв, що відображають різні рівні підвищення-зниження ядерної загрози. За результатами моделювання за запропонованою НКК отримано індекси важливості факторів за рівнем їх впливу на підвищення-зниження рівня ядерної небезпеки та втрат російської армії.

Перспективним напрямом подальших досліджень є розширення запропонованої НКК на основі детальної класифікації факторів, що впливають на розвиток російсько-української війни. НКК відображає типові елементи, властивості та відношення усіх учасників конфлікту – її можна розглядати як деяку схему, що є аналогом традиційних інженерних схем: структурних, функціональних, електричних принципових тощо. Отже, з'являється можливість перенесення добре розроблених інженерних методик у порівняно нову для застосування математики область формалізованого опису та моделювання військово-політичних об'єктів.

Література

1. Зайченко, А. П. (2001). *Дослідження операцій: підручник*. Київ, ВІПОЛ, 688 с.
2. Novikov, D. A. (2013). Hierarchical models of warfare. *Autom Remote Control, 74(10),* 1733–1752. DOI: 10.1134/S0005117913100135.
3. Shumov, V. V. (2020). Mathematical models of combat and military operations. *Computer Research and Modeling, 12(4):* 907–920. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-907-920.
4. McLucas, A. C., & Elsawah, S. (2019). System dynamics modeling to inform defense strategic decision-making. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (pp. 1–33). Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-27737-5_657-1.
5. Lanchester, F. W. (1916). Aircraft in warfare: The dawn of the fourth arm. Constable limited, 243 p.
6. Barlow, R. E., Proschan, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Florida State Univ Tallahassee, 327 p. DOI: 10.2307/1402970.
7. Barnard, A. (2012). Ten things you should know about HALT & HASS. In *Proceedings – Annual Reliability and Maintainability Symposium.* DOI: 10.1109/rams.2012.6175457.
8. Kosko, B. (1986). Fuzzy cognitive maps. *International Journal of Man-Machine Studies, 24(1),* 65–75. DOI: 10.1016/s0020-7373(86)80040-2.
9. Wierman, M. J., Dobransky, M. K. (1992). A review of: "Neural networks and fuzzy systems:" A dynamic systems approach to machine intelligence. B. Kosko, P. Hall, E. Cliffs (eds.). New Jersey, 1991. XXVII + 449 pages. *International Journal of General Systems, 20(4),* 398–402. DOI: 10.1080/03081079208945045.
10. Stylios, C. D., & Groumpos, P. P. (2004). Modeling complex systems using fuzzy cognitive maps. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans, 34(1),* 155–162. DOI: 10.1109/tsmca.2003.818878.

11. Fuzzy cognitive maps for applied sciences and engineering (2014). *Intelligent Systems Reference Library.* E. I. Papageorgiou (ed.). Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-39739-4.
12. Mazzuto, G., Ciarapica, F. E., Stylios, C., & Georgopoulos, V. C. (2018). Fuzzy cognitive maps designing through large dataset and experts' knowledge balancing. *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE).* DOI: 10.1109/fuzz-ieee.2018.8491657.
13. Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences, 8(3),* 199–249. DOI: 10.1016/0020-0255(75)90036-5.
14. Nevison, C. H., & Roberts, F. S. (1977). Discrete mathematical models with applications to social, biological, and environmental problems. *The American Mathematical Monthly, 84(10),* 834. DOI: 10.2307/2322080.
15. Вольтерра, В. (1976). *Математическая теория борьбы за существование*. Москва, Наука, 288 с.
16. Dickerson, J. A., & Kosko, B. (1994). Virtual worlds as fuzzy cognitive maps. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments, 3(2),* 173–189.
17. De Larminat, P. (Ed.). (2010). *Analysis and Control of Linear Systems.* Wiley-ISTE. DOI: 10.1002/9780470612521.
18. Rothstein, A. P. (2019). Risk analysis: fuzzy cognitive maps vs fault trees. *Journal of Computer and Systems Sciences International, 58(2),* 200–211. DOI: 10.1134/s1064230719020163.
19. Rotshtein, A., Katielnikov, D., & Kashkanov, A. (2019). A fuzzy cognitive approach to ranking of factors affecting the reliability of man–machine systems. *Cybernetics and Systems Analysis, 55(6),* 958–966. DOI: 10.1007/s10559-019-00206-8.
20. Rotshtein, A. P., & Katielnikov, D. I. (2021). Fuzzy cognitive map vs regression. *Cybernetics and Systems Analysis, 57(4),* 605–616. DOI: 10.1007/s10559-021-00385-3.
21. Rotshtein, A., Katelnikov, D., Pustylnik, L., & Polin, B. A. (2022). Reliability analysis of man-machine systems using fuzzy cognitive mapping with genetic tuning. *Risk Analysis, 43(5),* 958–978. Portico. DOI: 10.1111/risa.13959.
22. Axelrod, R. (Ed.). (2015). *Structure of decision: the cognitive maps of political elites.* Princeton University Press, 405 p. DOI: 10.1515/9781400871957.
23. Глушков, В. М. (1974). *Введение в АСУ*. Киев, Техника, 320 с.
24. Бутенин, Н. В., Неймарк, Ю. И., & Фуфаев, Н. Л. (1982). *Введение в теорию нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 384 с.
25. Gen, M., & Cheng, R. (1996). *Genetic algorithms and engineering design*. John Wiley & Sons, 411 p. DOI: 10.1002/9780470172254.

Рукопис отримано – 31/05/2023; прийнято до публікації – 26/06/2023.

© Донецький національний університет імені Василя Стуса, 2023
© Олександр Ротштейн, 2023
© Тетяна Нескородєва, 2023
© Деніс Катєльніков, 2023

Application of a fuzzy cognitive map for the simulation of the Russia-Ukraine war

Olexander Rotshtein, Tetiana Neskorodieva, Denis Katielnikov

Abstract

The Russia-Ukraine war is an actual object of modelling by techniques of operations research and system analysis. The most important aspect is modelling the threat of nuclear weapon attack, which is related to the potential ability of the Russian Federation. The Russia-Ukraine war is considered as a dynamic system, whose variables are factors affecting the losses of the Russian army and the threat of nuclear weapons attack. A fuzzy cognitive map is used for modelling. A fuzzy cognitive map is a directed graph, the vertices of which are variables of the model, and the weights of the arcs are the forces of positive and negative effects of variables on each other. The factors affecting the losses of the Russian army and the threat of a nuclear strike are selected as follows: resistance of the Ukrainian army, support of Ukraine with weapons, economic sanctions against Russia, opposition of the Russian government and its instinct for self-preservation. The forces of influence of factors on each other and on the possibility of using nuclear weapons are evaluated by experts with the help of fuzzy terms to which numerical quantities correspond. A genetic algorithm is used for tuning the fuzzy cognitive map. The genetic algorithm finds out the forces of influence of factors that minimize the distance between the simulation results and expert assessments. The obtained fuzzy cognitive map is used for scenario modelling of the Russia-Ukraine war according to the what-if analysis and for ranking the factors according to the degree of their influence on the level of nuclear threat. This work shows that fuzzy cognitive maps are an analogue of differential equations, which are traditionally used to model the loss dynamics in military conflicts. The fuzzy cognitive map advantage lies in the possibility of using expert information to account for interrelated factors affecting the loss dynamics and the nuclear threat level. A promising direction for further research is the extension of the proposed model for proceeding with the detailed classification of factors influencing the progress of the Russia-Ukraine war.

Keywords: Russia-Ukraine war, fuzzy cognitive map, scenario modelling, nuclear threat, ranking of influencing factors, pair effects.

References

1. Zaichenko, A. P. (2001). *Doslidzhennia operatsii*. Kyiv: VIPOL, 688 p. [In Ukrainian].
2. Novikov, D. A. (2013). Hierarchical models of warfare. *Autom Remote Control, 74(10),* 1733–1752. DOI: 10.1134/S0005117913100135.
3. Shumov, V. V. (2020). Mathematical models of combat and military operations. *Computer Research and Modeling, 12(4):* 907–920. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-907-920.
4. McLucas, A. C., & Elsawah, S. (2019). System dynamics modeling to inform defense strategic decision-making. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (pp. 1–33). Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-27737-5_657-1.
5. Lanchester, F. W. (1916). *Aircraft in warfare: The dawn of the fourth arm*. Constable limited, 243 p.
6. Barlow, R. E., Proschan, F. (1975). *Statistical theory of reliability and life testing: probability models*. Florida State Univ Tallahassee, 327 p. DOI: 10.2307/1402970.
7. Barnard, A. (2012). Ten things you should know about HALT & HASS. In *Proceedings – Annual Reliability and Maintainability Symposium.* DOI: 10.1109/rams.2012.6175457.
8. Kosko, B. (1986). Fuzzy cognitive maps. *International Journal of Man-Machine Studies, 24(1),* 65–75. DOI: 10.1016/s0020-7373(86)80040-2.
9. Wierman, M. J., Dobransky, M. K. (1992). A review of: "Neural networks and fuzzy systems:" A dynamic systems approach to machine intelligence. B. Kosko, P. Hall, E. Cliffs (eds.). New Jersey, 1991. XXVII + 449 pages. *International Journal of General Systems, 20(4),* 398–402. DOI: 10.1080/03081079208945045.
10. Stylios, C. D., & Groumpos, P. P. (2004). Modeling complex systems using fuzzy cognitive maps. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans, 34(1),* 155–162. DOI: 10.1109/tsmca.2003.818878.
11. Fuzzy cognitive maps for applied sciences and engineering (2014). *Intelligent Systems Reference Library.* E. I. Papageorgiou (ed.). Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-39739-4.

12. Mazzuto, G., Ciarapica, F. E., Stylios, C., & Georgopoulos, V. C. (2018). Fuzzy cognitive maps designing through large dataset and experts' knowledge balancing. *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE).* DOI: 10.1109/fuzz-ieee.2018.8491657.
13. Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences, 8(3),* 199–249. DOI: 10.1016/0020-0255(75)90036-5.
14. Nevison, C. H., & Roberts, F. S. (1977). Discrete mathematical models with applications to social, biological, and environmental problems. *The American Mathematical Monthly, 84(10),* 834. DOI: 10.2307/2322080.
15. Volterra, V. (1976). *Matematicheskaya teoriya borbyi za suschestvovanie*. Moscow, Nauka*,* 288 p. [In Russian].
16. Dickerson, J. A., & Kosko, B. (1994). Virtual worlds as fuzzy cognitive maps. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments, 3(2),* 173–189.
17. De Larminat, P. (Ed.). (2010). *Analysis and control of linear systems.* Wiley-ISTE. DOI: 10.1002/9780470612521.
18. Rothstein, A. P. (2019). Risk analysis: fuzzy cognitive maps vs fault trees. *Journal of Computer and Systems Sciences International, 58(2),* 200–211. DOI: 10.1134/s1064230719020163
19. Rotshtein, A., Katielnikov, D., & Kashkanov, A. (2019). A fuzzy cognitive approach to ranking of factors affecting the reliability of man–machine systems. *Cybernetics and Systems Analysis, 55(6),* 958–966. DOI: 10.1007/s10559-019-00206-8.
20. Rotshtein, A. P., & Katielnikov, D. I. (2021). Fuzzy cognitive map vs regression. *Cybernetics and Systems Analysis, 57(4),* 605–616. DOI: 10.1007/s10559-021-00385-3.
21. Rotshtein, A., Katelnikov, D., Pustylnik, L., & Polin, B. A. (2022). Reliability analysis of man-machine systems using fuzzy cognitive mapping with genetic tuning. *Risk Analysis, 43(5),* 958–978. Portico. DOI: 10.1111/risa.13959.
22. Axelrod, R. (Ed.). (2015). *Structure of decision: the cognitive maps of political elites.* Princeton University Press, 405 p. DOI: 10.1515/9781400871957.
23. Glushkov, V. M. (1974). *Vvedenie v ASU.* Kyiv, Tehnika, 320 p. [In Russian].
24. Butenin, N. V., Neymark, Yu. I., & Fufaev, N. L. (1982). *Vvedenie v teoriyu nelineynyih kolebaniy.* Moscow, Nauka*,* 384 p. [In Russian].
25. Gen, M., & Cheng, R. (1996). *Genetic algorithms and engineering design*. John Wiley & Sons, 411 p. DOI: 10.1002/9780470172254.