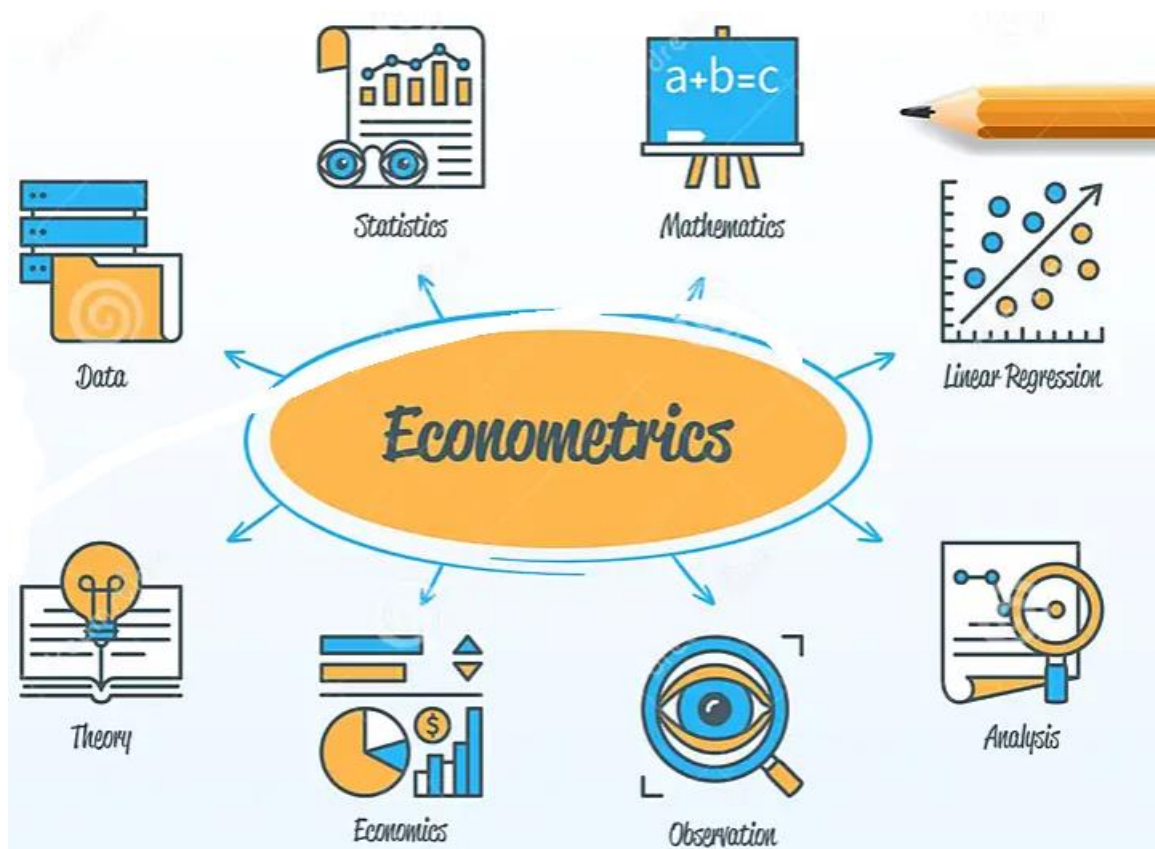


А. О. Азарова

ЕКОНОМЕТРІЯ

Конспект лекцій



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

ЕКОНОМЕТРІЯ

Конспект лекцій

Електронний конспект лекцій

Вінниця
ВНТУ
2024

УДК 330.43(075)

A35

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 7 від 26.12.2024 р.)

Рецензенти:

С. В. Козловський, доктор економічних наук, професор кафедри підприємництва, корпоративної та просторової економіки Донецького національного університету ім. В. Стуса

Н. В. Буреннікова, доктор економічних наук, професор

Л. М. Ткачук, кандидат економічних наук, доцент

Азарова, А. О.

A35 Економетрія. Конспект лекцій : конспект лекцій [Електронний ресурс] / Азарова А. О.. – Вінниця : ВНТУ, 2024. – 60 с.

Конспект лекцій присвячено фундаментальним засадам економетричного моделювання, що посідає чільне місце у системі підготовки менеджерів нового покоління. Запропоновані авторами теоретичні засади дозволяють здобувачам моделювати різноманітні аспекти господарської діяльності на мікро-, мезо- та макроекономічному рівнях, основуєчись на сучасних методах економетричного аналізу, а також комп'ютерних технологіях, що використовуються для дослідження реальних господарських суб'єктів і управлінських процесів. Цей матеріал охоплює весь лекційний курс із дисципліни «Економетрія» для здобувачів (денної та заочної форм), які навчаються за спеціальностями 073 Менеджмент, 075 Маркетинг, 051 Економіка, 076 Підприємство та торгівля.

УДК 330.43(075)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
ТЕМА 1 ВИЯВЛЕННЯ ПРОБЛЕМ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ ЗАСОБАМИ ЕКОНОМЕТРІЇ	
1.1 Об'єкт, предмет, мета та завдання економетрії	6
1.2 Економетрія як наука	6
1.3 Історичний розвиток економетрії, її зв'язок з іншими дисциплінами	7
ТЕМА 2. ПОНЯТТЯ МОДЕЛІ, КЛАСИФІКАЦІЯ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МЕТОДІВ ТА МОДЕЛЕЙ І ГАЛУЗІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ	
2.1 Поняття моделі. Сфери і особливості застосування математичного, комп'ютерного та натурального моделювання	12
2.2 Класифікація економетричних моделей	13
2.3 Галузі та сфери застосування економетричного аналізу. Задачі, які розв'язують за допомогою економетричних методів	14
ТЕМА 3. ЕТАПИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МЕТОДІВ В ОРГАНІЗАЦІЙНОМУ ПРОЄКТУВАННІ	17
ТЕМА 4. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ТА ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ СУКУПНОСТІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ	19
ТЕМА 5. ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МЕТОДІВ В ОРГАНІЗАЦІЙНОМУ ПРОЄКТУВАННІ. ПРОСТА ВИБІРКОВА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ	
5.1 Загальне поняття про лінійну регресію	21
5.2 Оцінювання параметрів лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів	21
5.3 Основні припущення класичного кореляційного аналізу	25
5.4 Дослідження процесу оцінювання побудованої однофакторної кореляційної моделі. Коефіцієнти кореляції та детермінації	28
5.5 Аналіз результатів діяльності організації та зіставлення їх з факторами впливу зовнішнього та внутрішнього середовища засобами простого ANOVA- аналізу. Поняття про ступені вільності. Простий ANOVA-аналіз у лінійній регресії	30
5.6 Перевірка простої регресійної моделі на адекватність. Поняття F-критерію Фішера	33
5.7 Проблеми, що виникають у кореляційному аналізі	34
5.8 Алгоритм розв'язку задачі однофакторного кореляційного аналізу	36

ТЕМА 6. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРСПЕКТИВ РОЗВИТКУ ОРГАНІЗАЦІЇ ЗАСОБАМИ КЛАСИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ БАГАТОФАКТОРНОЇ МОДЕЛІ	
6.1 Класична нормальна лінійна модель множинної регресії	38
6.2 Оцінювання параметрів багатофакторної лінійної регресійної моделі	40
6.3 Перевірка значущості множинної регресії. Коефіцієнт еластичності. Критерії детермінації, Фішера та Стьюдента	40
ТЕМА 7. ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ ЗАСОБІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ. МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ УПРАВЛІНСЬКИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ, ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ РОЗВИТКУ УКРАЇНИ	
7.1 Економетричний аналіз динаміки інфляційних процесів в Україні	43
7.2 Визначення чинників впливу на рівень інфляції в Україні	46
7.3 Побудова кореляційно-регресійної моделі для оцінювання впливу рівня безробіття на рівень інфляції в Україні	49
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	58

ВСТУП

Конспект лекцій розглядає основні питання робочої програми навчальної дисципліни «Економетрія», відповідає компетентностям і програмним результатам навчання за стандартами спеціальностей «Менеджмент», «Маркетинг», «Економіка», «Підприємництво та торгівля».

Посібник охоплює усі теми РПНД, такі як: виявлення проблем та обґрунтування управлінських рішень засобами економетрії; застосування кореляційно-регресійних методів в організаційному проектуванні, проста вибіркова лінійна регресія; дослідження процесу оцінювання побудованої однофакторної кореляційної моделі; аналіз результатів діяльності організації та зіставлення їх з факторами впливу зовнішнього та внутрішнього середовища засобами простого ANOVA-аналізу; визначення перспектив розвитку організації засобами класичної лінійної багатфакторної моделі; дослідження та опис характеристик організації та аналіз результатів діяльності організації засобами матричної алгебри; застосування сучасних комп'ютеризованих засобів для розв'язку економетричних задач.

Запропонована структура дозволяє розглянути не лише окремі питання, пов'язані з виявленням проблем та обґрунтуванням управлінських рішень засобами лінійних та нелінійних однофакторних та багатфакторних кореляційно-регресійних моделей, а також оптимальним управлінням підприємством із використанням апарату матричної алгебри засобами сучасних пакетів програмних засобів. Це уможливорює застосування отриманих знань та навичок у подальшому вивченні інших освітніх компонент.

Посібник буде корисним для здобувачів вищої освіти, фахівців, всіх тих, хто цікавиться питаннями використання економетричних методів для ефективного розв'язання задач у різних сферах людської діяльності, зокрема, у менеджменті, маркетингу, економіці, підприємстві й торгівлі та ін. засобами сучасних пакетів прикладних програм.

ТЕМА 1

ВИЯВЛЕННЯ ПРОБЛЕМ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ ЗАСОБАМИ ЕКОНОМЕТРІЇ

1.1 Об'єкт, предмет, мета та завдання економетрії

1.2 Економетрія як наука.

1.3 Історичний розвиток економетрії, її зв'язок з іншими дисциплінами.

1.1 Об'єкт, предмет, мета та завдання економетрії

Об'єктом економетрії є економічні системи та простори різного рівня складності: від окремого підприємства чи фірми до економіки галузей, регіонів, держави й світу загалом.

Предмет економетрії – це методи побудови та дослідження математико-статистичних моделей економіки, проведення кількісних досліджень економічних явищ, пояснення та прогнозування розвитку економічних процесів.

Метою економетричного дослідження є аналіз реальних економічних систем і процесів, що в них відбуваються, за допомогою економетричних методів і моделей, їх застосування під час прийняття науково обґрунтованих управлінських рішень.

Основне завдання економетрії – оцінити параметри моделей з урахуванням особливостей вхідної економічної інформації, перевірити відповідність моделей досліджуваному явищу і спрогнозувати розвиток економічних процесів.

1.2 Економетрія як наука

Під час формалізації математичної моделі відображаються лише найсуттєвіші чинники та закономірності процесу (моделі), що вивчається.

Прикладом економічних моделей є моделі споживчого вибору, економічного зростання, модель фірми, модель рівноваги на товарних та фінансових ринках.

Будуючи моделі, економісти виявляють лише найсуттєвіші фактори, які визначають досліджуване економічне явище та відкидають деталі, які є несуттєвими для розв'язання поставленої проблеми.

Формалізація основних особливостей функціонування об'єкта (процесу, явища) дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на ці об'єкти (явища) інших чинників або явищ та використовувати такі оцінки для керування цими об'єктами.

Економетрія – це порівняно новий напрямок економічної науки, що утворився від поєднання теоретичної економіки, математики та статистики.

Слово «економетрія» (у деяких джерелах «економетрика») буквально означає «вимірювання в економіці» (гр. «економіка» – ведення домашнього господарства та «metreo» – вимірюю), що дає підстави під цим терміном розуміти все, що пов'язано з вимірюваннями в економіці. Однак таке тлумачення надзвичайно широке і не відображає особливостей цієї галузі знань. З іншого боку, через необхідність застосування математико-статистичних методів інколи економетрії дають вужче тлумачення, а саме, розглядають її лише як певний набір

математико-статистичних засобів, якими кількісно досліджують взаємозв'язки певних рядів статистичних даних. Тому економетрія є самостійною науковою дисципліною, яка об'єднує сукупність теоретичних результатів, засобів, прийомів, методів і моделей, призначених для того, щоб на базі економічної теорії, економічної статистики та математико-статистичного інструментарію надавати конкретних кількісних значень загальним (якісним) закономірностям, обґрунтованим економічною теорією.

Завдання економічної теорії в межах економетрії полягають не лише в тому, щоб виявляти закони та зв'язки, які об'єктивно існують в економіці, а й описувати їх математичними методами. Економічна статистика акумулює всю інформацію про економічні процеси, що відбуваються в реальній економіці, та уособлює той практичний досвід, який має підтвердити чи спростувати відповідні економічні теорії. А під математико-статистичним інструментарієм розуміють не всю математичну статистику, а лише окремі її розділи: лінійні моделі регресійного аналізу, аналіз часових рядів, побудову та аналіз систем одночасних рівнянь, перевірку статистичних гіпотез.

Саме «приземлення» економічної теорії на базу конкретної економічної статистики та отримання за допомогою відповідних математичних методів кількісних взаємозв'язків між економічними показниками є сутністю економетрії.

Зазначені в такий спосіб ключові моменти у визначенні економетрії забезпечують її розмежування з такими дисциплінами, як математична економіка, описова економічна статистика та математична статистика. Математична економіка – це математично сформульована економічна теорія, що вивчає зв'язки між економічними змінними на загальному (некількісному) рівні. Вона стає економетрією, коли символічно подані в рівняннях коефіцієнти замінюють конкретними числовими оцінками, отриманими на базі відповідних статистичних даних (даних описової статистики) методами математичної статистики.

Отже, економетрія – це наука, що досліджує та встановлює кількісні взаємозв'язки та закономірності в економіці за допомогою математичних та статистичних методів.

Вивчення курсу передбачає відповідну математичну та економічну підготовку. Проте для того, щоб ознайомитися з проблемами, які вивчає економетрія і з якими стикаються ті, хто використовує економетричні методи, не потрібно бути спеціалістом з усіх розділів математики та економіки. Знання певних розділів математики, зокрема основ лінійної алгебри, теорії матриць, теорії ймовірностей, математичної статистики та основ економіки можуть виявитися достатніми для вивчення курсу економетрії.

1.3 Історичний розвиток економетрії, її зв'язок з іншими дисциплінами

Розвиток економетрії започаткувався в Стародавній Греції. Тоді економіка займалася питаннями раціонального господарювання. Заможне давньогрецьке рабовласницьке господарство було складною економічною системою, на якій відбивалися всі політичні, соціальні та ін. процеси, що відбувалися у тогочасному суспільстві. Тому, зрозуміло, що окрім суто розрахункових питань в

економіці виникала потреба у розв'язанні таких проблем: з яких одиниць має складатися раціонально побудована держава, в якому співвідношенні ці одиниці мають обмінюватись виробленими товарами, яку роль в суспільстві відіграють торгівля і гроші.

Проблеми економічної науки в такому ракурсі вперше було сформульовано **Аристотелем**. Він першим спробував описати та проаналізувати економічні закономірності. Саме Аристотель вперше висловив думку про перетворення грошей на капітал. Таким чином, ще в давній Греції в економіці було започатковано 2 напрямки:

- аналіз методів раціонального керування господарством (цей напрямок дав поштовх для розвитку в майбутньому сучасного менеджменту);
- вивчення основних економічних закономірностей, що відбуваються в суспільстві (цей напрямок дав поштовх для розвитку політекономії).

У 1778 р. лейб-медик короля Людовіка XV **Франсуа Кене** (1694–1774 рр.) опублікував працю «*Економічна таблиця*», в якій спробував описати процес суспільного виробництва.

Якісний стрибок у використанні математичного моделювання в економічних дослідженнях пов'язаний з ім'ям німецького політеконома **Карла Маркса** (1818–1883 рр.). Він розробив більш змістовну та глибоку, ніж Франсуа Кене, формалізовану схему суспільного відтворення, сформулював відповідну математичну модель цього процесу. Ця модель дала можливість виявити основні економічні закони суспільства та передбачити перспективи його розвитку.

Необхідно зауважити, що математичні методи в цій моделі мали допоміжний характер. В ті часи математичні моделі використовувалися з ілюстраційною метою, зокрема модель шотландця **Адама Сміта** (1723–1790 рр.) (класична макроекономічна модель), модель англійця **Давида Рікардо** (1772–1823 рр.) (модель міжнародної торгівлі).

У ХІХ столітті вагомий внесок в моделювання ринкової економіки зробила математична школа. Використання сучасних методів математичної статистики почалося в біології.

Засновником математичної статистики вважають англійського біолога, математика, статистика, філософа **Карла Пірсона** (1857–1936 рр.). Пірсон вивчав криві розподілу характеристик людського мозку, а також чисельні характеристики всього людського організму.

Перша робота з економетрії була опублікована в 1897 р. Опублікував її один із засновників математичної школи в економіці – **Вільфредо Парето** (1848–1923 рр.). Ця робота була присвячена статистичному вивченню доходів населення в різних країнах світу. Була запропонована **крива Парето**:

$$y = A(x - a) - \alpha,$$

де y – чисельність населення, яка має дохід, що є більшим за x ;

x – досліджувана величина доходу;

a – мінімальний дохід;

A, α – параметри залежності, які було отримано статистичними методами.

З 1830-х рр. найбільш розвинені країни стали відчувати незрозумілі з погляду економічної науки того часу потрясіння: занепад ділової активності, виникнення масового безробіття. Вже в кінці XIX століття неокласична теорія стала сприйматися як занадто віддалена від дійсності. Теорія могла стати переконливою у тому випадку, якщо вона б змогла пояснити зміни, що відбуваються в економіці. Для її практичного застосування були потрібні кількісні вираження базових економічних термінів.

На початку XX століття англійський статист Р. Г. Гукер (1867–1944 рр.) застосував кореляційно-регресійні методи, розроблені Пірсоном, для вивчення взаємозв'язку різних економічних показників, а саме впливу кількості банкрутств на Берлінській товарній біржі на ціну зерна (1901 р.), залежність врожаю пшениці від погоди (1907 р.). Р. Г. Гукер вимірював зв'язок між рівнем шлюбності та добробутом (1901 р.), в якому використовував кілька індикаторів добробуту (зокрема, зовнішню торгівлю). Йому також належать перші дослідження часових рядів економічних змінних. Гукер встановив, що вплив змін в експорті та імпорті Англії найбільше позначається через 5 місяців, а зміни оборотів розрахункових палат – через 1 р. і 2,5 р. (коефіцієнт кореляції $r \approx 0,86$ і $r \approx 0,94$, відповідно). Гукеру належить ідея кореляції не самих величин, а їх послідовних збільшень¹.

Важливим етапом формування економетрії стало розроблення **економічних барометрів**. Вони були основані на ідеї, що існують показники, які змінюються раніше за інші й тому можуть слугувати сигналами змін останніх. Першим і найвідомішим став Гарвардський барометр, який був створений в 1903 році під керівництвом **Уоррена Персона** (1878–1937 рр.) та **Уеслі Клер Мітчелла** (1874–1948 рр.). Приблизно з 1925 р. він втратив свою чутливість. Його крах пояснюється появою потужного регулювального чинника в економіці США.

У 1911 р вийшла книга американського економіста **Генрі Мура** (1869–1958 рр.) «Закони заробітної плати: есе зі статистичної економіки». У своєму дослідженні Г. Мур провів аналіз ринку праці, статистично перевірів теорію продуктивності Дж. Кларка (1847–1938 рр.) і виклав основи стратегії об'єднання пролетаріату. Г. Мур показав, що за допомогою статистико-математичних моделей, основаних на фактичних даних, можна розробити основу для соціальної політики.

У цей самий час італійський економіст **Р. Беніні** (1862–1956 рр.) вперше використав множинну регресію під час оцінювання функції попиту.

Отже, як **самостійна дисципліна** економетрія сформувалася у 20–30 рр. XX століття завдяки працям **Генрі Мура** і **Теодора Шульца**. У перших працях

¹ Р. Г. Гукер виявив специфічні проблеми застосування кореляції до рядів динаміки та особливості математико-статистичного вивчення динаміки загалом, які виникають, насамперед, з тієї причини, що рівні динамічного ряду, які описують тенденцію, є взаємозалежними величинами, і тому до них не можна застосувати кореляційний метод в його традиційному вигляді. Щоб усунути цю обставину, Гукер запропонував корелювати не самі рівні, а їх послідовні різниці ($dx = x_i - x_{i-1}$ і $dy = y_i - y_{i-1}$). Він вказав на явище лага, тобто випередження або запізнювання динаміки одного показника порівняно з іншим. Гукер показав, що найбільш точно кореляційний зв'язок між рядами динаміки може виявитися не між одночасними значеннями змінних, а тоді, коли корелюються запізнілі значення однієї змінної порівняно з іншою.

розроблялися аналітико-статистичні моделі. Здебільшого це були рівняння лінійної регресії з параметрами, оцінюваними за методом найменших квадратів (МНК). Такі рівняння дозволяли описувати функції попиту і залежність їх від прибутків, обсягів випуску продукції, цін, податків та інших чинників, а також функцій пропозиції, виробничих функцій, які відображали технологічну залежність випуску продукції від витрат праці та засобів виробництва.

Одна з **перших виробничих функцій** (1928 р.) була побудована **Чарльзом Коббом** (1875–1949 рр.) та **Полом Дугласом** (1892–1976 рр.). Пізніше вона була вдосконалена **Робертом Солоу** (нар. у 1924 р.).

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

де Q – обсяг продукції;

L – робоча сила;

K – основний капітал;

α , β – коефіцієнти еластичності обсягу виробництва за витратами праці та капіталу; вони показують на скільки відсотків зросте Q за зростання L або K на 1%.

Ця виробнича функція широко використовується в економіко-математичному аналізі завдяки відносній простоті функціональної залежності і є достатньо універсальною. Але вона має деякі обмеження: не дозволяє забезпечити задану точність відновлення економічного процесу у разі фіксованого числа даних маркетингового дослідження.

Засновниками економетрії вважають норвежця **Рагнара Фріша** (1895–1973 рр.), австрійця **Йозефа Шумпетера** (1883–1950 р.), голландця **Яна Тінбергена** (1903–1994 р.) – послідовників неокласичної економічної школи і кейнсіанства. Вони одними з перших цілеспрямовано намагалися поєднати економічну теорію з математичними та статистичними методами. Основним внеском цих учених в економетрію є розроблення економетричних моделей прийняття рішень.

У **XX столітті** математичні моделі застосовувалися достатньо широко. З їх використанням пов'язані більшість праць, які були нагороджені Нобелівською премією. Це праці **Джона Хікса** (1972 р.), **Рагнара Фріша** (1969 р.), **Яна Тінбергена** (1969 р.), **Василія Леонтьєва** (1973 рр.), **Роберта Солоу** (1987 р.), **Пола Самуельсона** (1970 р.).

У **Росії** на початку XX століття великий внесок у розвиток економетричної теорії зробили **Володимир Дмитрієв** (1868–1913 рр.) та **Євген Слуцький** (1880–1948 рр.).

Зауважимо, що термін «економетрія» вперше запровадив львівський учений **Павло Чомпа** (1867–1913 рр.), опублікувавши у Львові в 1910 р. книгу *«Нариси економетрії і природної теорії бухгалтерії, яка ґрунтується на політичній економії»*². Однак це поняття не набуло поширення, оскільки на той час не було фундаментальних праць у цій галузі науки.

² Лауреат Нобелівської премії з економетрії Рагнар Фріш визнав, що до появи його статті у 1926 р., присвяченої економетрії, з цієї проблеми була опублікована монографія у 1910 р. у Львові.

Економетрія як окрема галузь науки відома під такою назвою лише з 1930 р. Саме тоді було засновано економетричне товариство, яке визначало себе так: *«Міжнародне товариство для розвитку економічної теорії і її зв'язку зі статистикою та математикою»*.

У 30-50 рр. у СРСР спостерігався занепад у розвитку економіко-математичних методів. У 60-80 рр. **Василь Немчинов** (1894–1964 рр.) та **Віктор Новожилов** (1892–1970 рр.) спробували описати систему оптимального функціонування соціалістичної економіки.

До числа типових економіко-математичних моделей **на сучасному етапі вивчення** належать виробничі функції, функції попиту різних груп споживачів, статичні та динамічні міжгалузеві моделі виробництва, розподілу, споживання продукції, моделі загальної економічної рівноваги.

Особливі досягнення пов'язані з розвитком економетрії за останні 30 років. Сюди можна віднести такі проблеми:

- 1) вивчення і врахування мультиколінеарності;
- 2) специфікація помилок;
- 3) коваріаційний аналіз параметрів моделі;
- 4) побудова моделі з фіктивними змінними;
- 5) визначення лагових змінних і побудова та аналіз моделей розподіленого лагу.

Сьогодні економетрія посідає провідне місце в ряду економічних наук. Економетрію вивчають у провідних світових університетах, прийшло розуміння, що без економетричних методів неможливо проводити сучасний макро- і мікроекономічний аналіз.

ТЕМА 2

ПОНЯТТЯ МОДЕЛІ, КЛАСИФІКАЦІЯ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МЕТОДІВ ТА МОДЕЛЕЙ І ГАЛУЗІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1 *Поняття моделі. Сфери і особливості застосування математичного, комп'ютерного та натурного моделювання.*

2.2 *Класифікація економетричних моделей*

2.3 *Галузі та сфери застосування економетричного аналізу. Економічні задачі, які розв'язують за допомогою економетричних методів*

2.1 Поняття моделі. Сфери і особливості застосування математичного, комп'ютерного та натурного моделювання

Господарська діяльність завжди була пов'язана з необхідністю проведення принаймні найпростіших арифметичних та геометричних розрахунків. Крім того, математика як наука виникла внаслідок практичних господарчих потреб, тому розрахункова робота є необхідною для ведення господарської діяльності.

Ринкова економіка пов'язана з необхідністю оброблення великих масивів статистичної інформації, яка характеризує господарську діяльність, тому вона потребує широкого застосування обчислювальної техніки. Побудова надійної інформаційної бази неможлива без урахування впливу різнобічних факторів, які формують результати роботи. Для вивчення різнобічних економічних явищ використовують їх **моделі**, які є формальними спрощеними описами цих явищ.

Математична модель є абстрактним формально описаним об'єктом, вивчення якого можливе математичними методами. Формалізована математична модель відображає лише найсуттєвіші закономірності процесу або системи, що вивчається.

Моделі системи на етапі формалізації мають бути притаманні такі **властивості**:

- незалежність результатів розв'язання задачі згідно з виробленою моделлю від конкретної фізичної природи об'єкта;
- змістовність, тобто здатність моделі відображати всі характеристики і властивості об'єкта;
- дедуктивність, тобто можливість конструктивного використання моделі для отримання результатів із застосуванням засобів і методів наукової області сфери, галузі, в термінах якої побудована модель.

Математична модель, як правило, містить:

- опис множини можливих станів системи;
- опис закону, згідно з яким система переходить з одного стану до іншого.

Застосування більшості економічних моделей на конкретному суб'єкті господарювання потребує на їх комп'ютерну реалізацію. Для **комп'ютерного моделювання** необхідно перетворити математичну модель економічної системи чи об'єкта на спеціальний алгоритм, що далі подається послідовністю комп'ютерних команд. Відповідно до цього комп'ютером продукується інформація, що описує елементарні явища процесу, який вивчається, з урахуванням

їх зв'язків та взаємних впливів. Необхідна інформація виводиться на екран або на друк і використовується для визначення результуючих характеристик системи. Цей метод дозволяє досліджувати різноманітні процеси незалежно від їх фізичної природи, сукупності шуканих величин і прикладної направленості задачі.

Натурні моделі – це реальні системи, що вивчаються, або їх частини. Ці моделі характеризує повна адекватність реальній системі і зумовлена цим висока точність та достовірність результатів моделювання. З одного боку, це системи, для яких неможливо побудувати більш абстрактну модель (авіаційні системи з високим ступенем надійності, які не можуть бути забезпечені абстрактним моделюванням і тому проводять льотні випробування дослідних моделей літаків). З іншого боку – системи, натурне моделювання яких обходиться дешевше, ніж створення і дослідження моделей більш високого рівня абстракції (прості системи, наприклад, глобус), або вже існують системи, для яких потрібно деталізувати характеристики чи отримати нові дані.

Загальним критерієм вибору класу або виду моделі є мінімум витрат ресурсів на отримання потрібної інформації про систему за умови виконання заданих обмежень на її точність і достовірність. Це обмежує сферу та галузь їх застосування.

2.2 Класифікація економетричних моделей та методів

Існує багато різних класифікаційних напрямків економетричних моделей. Розглянемо один із підходів до їх поділу, запропонований на рис. 2.1.

Отже, за *способом математичного подання* економетричні моделі поділяють на:

- прості – економетричні моделі, подані одним рівнянням (залежністю);
- складні – економетричні моделі, подані кількома рівняннями (залежностями).

За кількістю факторних ознак, що містяться у моделі, економетричні моделі поділяють на:

- однофакторні – моделі містять одну незалежну ознаку;
- багатофакторні моделі мають два або більше незалежних фактори.

Однофакторні і багатофакторні моделі можуть подаватися лінійними або нелінійними функціями.

Складні економетричні моделі містять кілька рівнянь і описуються такими типами систем одночасних рівнянь, що залежать від того, як враховуються у правій частині ендогенні змінні. Зазвичай виділяють три типи систем:

- системи, розв'язані відносно ендогенних змінних;
- рекурсивні системи;
- системи, не розв'язані відносно ендогенних змінних.

Залежно від того, чи присутній (відсутній) у моделі фактор часу, моделі бувають:

- динамічні: моделі часових рядів, зокрема, трендові моделі; моделі згладжування; моделі декомпозиції часового ряду; авторегресії – ковзного середнього;
- статичні.

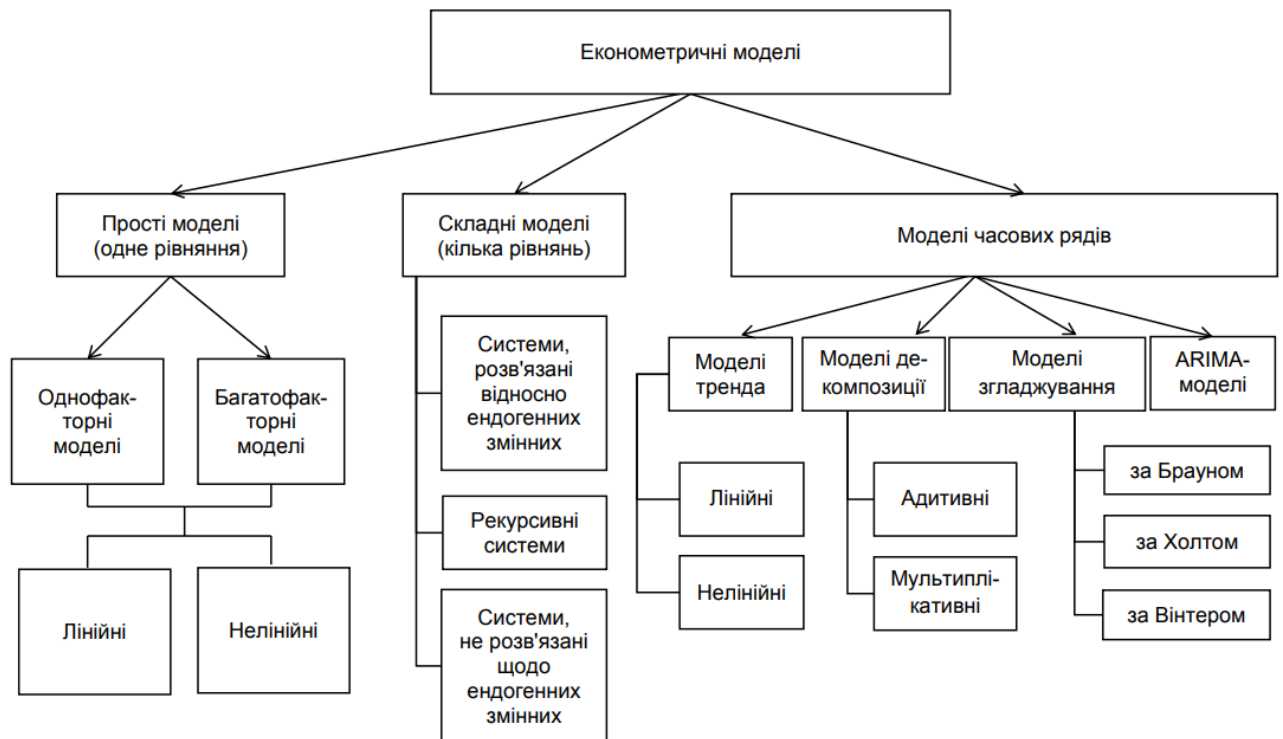


Рисунок 2.1 – Класифікація економетричних моделей

Наука економетрія описує як економетричні методи, так і економетричні моделі економічних процесів і явищ.

У цьому курсі переважно вивчається матеріал, що стосується саме економетричних методів, які поділяють на такі **чотири класи** (рис. 2.2):

- перший клас описує методи оцінювання параметрів класичної економетричної моделі, зокрема, метод найменших квадратів (МНК);
- другий клас стосується методів оцінювання параметрів узагальненої моделі, тобто, під час порушення певних передумов коректного застосування МНК;
- третій клас містить методи оцінювання параметрів динамічних економетричних моделей;
- четвертий клас враховує методи оцінювання параметрів економетричних моделей, що побудовано на базі системи одночасних структурних рівнянь.

2.3 Галузі та сфери застосування економетричного аналізу. Задачі, які розв'язують за допомогою економетричних методів

Впровадження економетричних методів на різних рівнях економічної діяльності дає змогу будувати відповідні економетричні моделі, що уможливлюють розв'язок економічних проблем різного рівня складності.

На рівні макроекономіки економетричними засобами досліджують закономірності розвитку виробничої та невиробничої сфери на рівні держави, розподілу або перерозподілу і використання ВВП. Це явища і процеси, які визна-

чають механізми формування державного бюджету, податкової політики, страхування, кредитування, ощадної справи тощо.

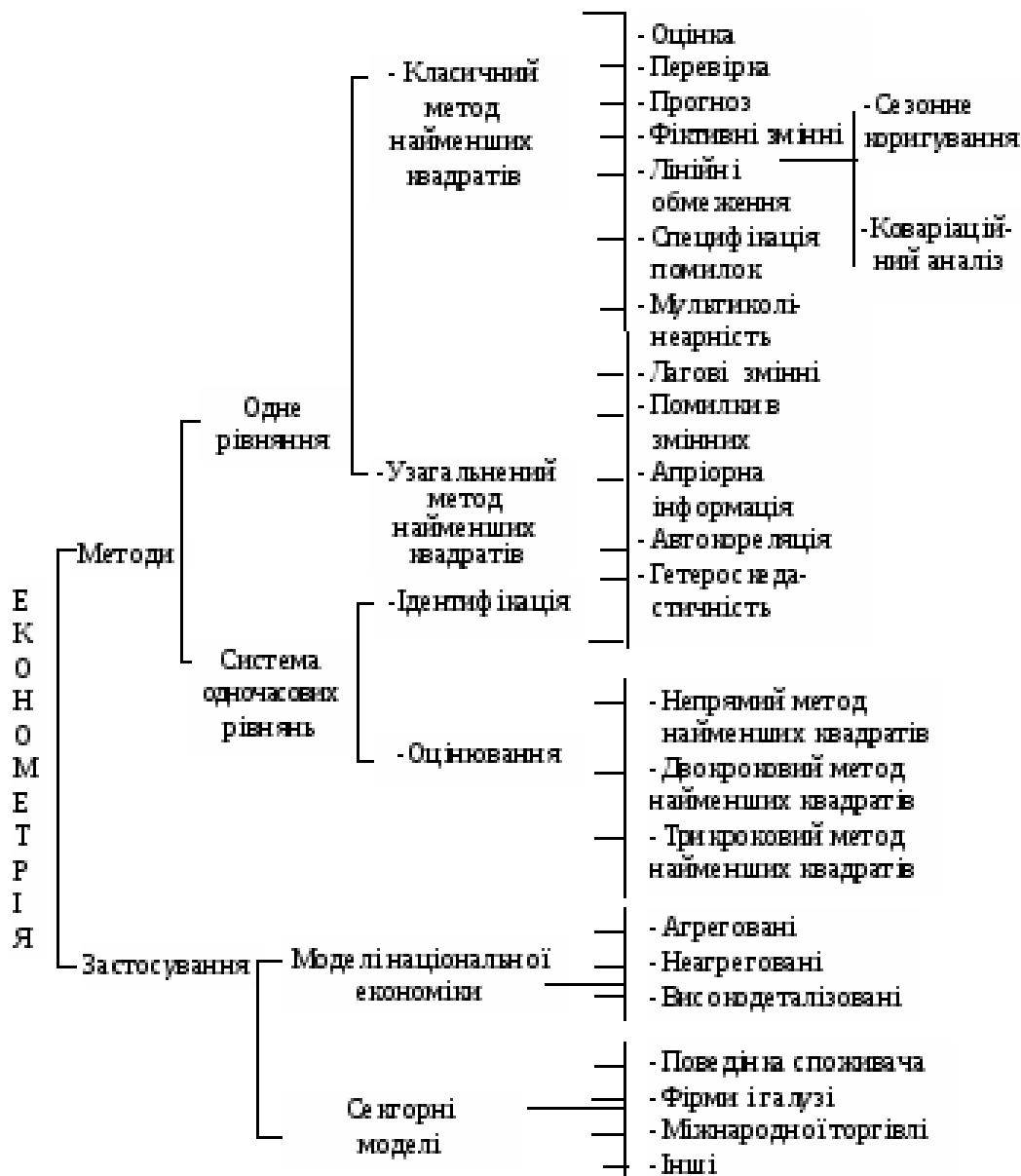


Рисунок 2.2 – Структура економетричних методів і моделей

Варто зауважити, що узгодженість відповідних сфер фінансово-кредитної системи відображає ефективність розподільчих відносин, збалансованість доходів і витрат у господарстві, забезпечення процесів відтворення грошових ресурсів, фінансову захищеність державного і колективного майна від інфляції та інших негативних явищ.

Мікрорівень описується економетричними дослідженнями, які зумовлюють обґрунтованість у прийнятті управлінських рішень, як тактичних, так і стратегічних, що приймаються на підприємствах усіх форм власності і враховують вплив не лише збурень внутрішнього, а й зовнішнього середовищ.

Економетричні моделі мають застосовуватися для вивчення динаміки економічних і соціально-економічних показників, які описують конкретну еко-

номічну систему, із метою прогнозування їх подальшого змінювання або відтворення потенційних сценаріїв соціально-економічного розвитку системи, що вивчається, за умови цілеспрямованої зміни певних показників.

Отже, за рівнем ієрархії виокремлюють:

- макрорівень (країна, континент, весь світ);
- мезорівень (регіональний, галузевий, корпоративний);
- мікрорівень (родина, підприємство, фірма, організація).

Засобами економетричного моделювання вивчають проблеми фінансових, фондових та інших видів ринку, соціальної політики, проблем ціноутворення, зокрема, попиту та пропозиції тощо.

Варто зазначити, що пріоритетну роль економетрія здобуває саме в макроекономічних дослідженнях, де взаємозв'язки між різними аналізованими величинами не є очевидними або постійно змінюються. Крім того, мінливість зовнішнього середовища спричиняє можливу появу інших важливих чинників у моделі, яких раніше не було в ній враховано. Зрозуміло, що такі явища ускладнюють формалізацію досліджуваних економічних процесів, проте саме вони і зумовлюють, часто-густо, розвиток макроекономіки. Тут на допомогу класичній макроекономіці приходять саме економетричний апарат, що уможливорює обґрунтування та уточнення не лише низки вибраних факторів у макроекономічній моделі, але й форми залежності, дозволяє усвідомити процеси взаємозв'язку між різними чинниками.

Отже, інтегруючи в собі як економічну теорію, так і статистичні методи, економетрія широко використовується під час прийняття практичних тактичних та стратегічних рішень в економіці, зокрема, у бізнесі, державному регулюванні економіці, банківській справі), а також є підґрунтям для отримання нових знань у різних економічних напрямках.

ТЕМА 3

ЕТАПИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МЕТОДІВ В ОРГАНІЗАЦІЙНОМУ ПРОЄКТУВАННІ

Побудова економетричної моделі спричиняє потребу у виконанні багатоетапних досліджень, кожен з яких є базою для формування наступного етапу вивчення досліджуваного економічного явища.

Загалом, процес економетричного моделювання має складатися з таких етапів:

- 1) вибір конкретної форми аналітичної залежності між економічними показниками (специфікація моделі) на підставі відповідної економічної теорії;
- 2) збирання та підготовка статистичної інформації;
- 3) оцінювання параметрів моделей;
- 4) перевірка адекватності моделі та достовірності її параметрів;
- 5) застосування моделі для прогнозування розвитку економічних процесів з метою подальшого керування ними.

Кейнс стверджував, що споживання збільшується за умови зростання доходів, але не на ту саму величину, на яку збільшився дохід.

Хоча й Кейнс підкреслював, що існує позитивна залежність між споживанням та доходом. Він не визначав чіткого функціонального зв'язку між усіма цими величинами. Отже, для спрощення вважатимемо, що кейнсіанська функція споживання має вигляд, поданий на рис. 3.1, і описується таким лінійним рівнянням:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e, \quad 0 < \beta_1 < 1,$$

де x – дохід;

β_0, β_1 – параметри моделей;

β_1 – тангенс кута нахилу дорівнює *граничній схильності до споживання (MPC)*;

e – випадкова величина (похибка).

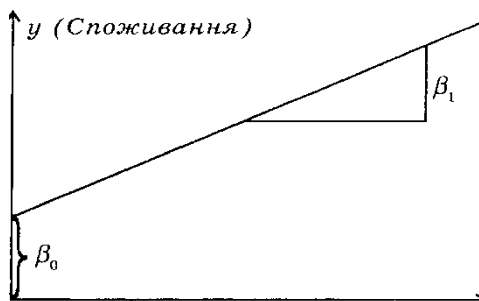


Рисунок 3.1 – Графік кейнсіанської функції споживання (спрощеної)

Ця модель показує лінійну залежність між споживанням та доходом. Вона є одним із можливих прикладів економетричної моделі.

Якщо модель побудовано лише з одного рівняння, то вона називається *простою*, в іншому випадку – *складною*.

Використання моделі для аналізу. Припустимо, що економіст-урядовець оцінює кейнсіанську функцію споживання та отримує такі результати:

$$\hat{y} = 5 + 0.7x,$$

де \hat{y} – витрати на споживання;

x – доход у мільярдах гривень.

Припустимо, уряд вважає, що витрати на суму 1060 мільярдів гривень утримають безробіття на низькому рівні, скажімо, 5%. Який рівень доходу гарантуватиме саме таку кількість витрат на споживання?

Припускаємо, що ця модель дійсна, тоді:

$$1060 = 5.0 + 0.7x, \quad x = 1055/0.7 = 1507,$$

тобто доход на суму 1507 мільярдів гривень за MPC=0.7 спонукає до витрат на суму 1060 мільярдів гривень.

Як показують обчислення на найпростішому умовному рівні, досліджувана модель може використовуватись для аналізу та досягнення різних політичних цілей. Завдяки відповідній податковій чи кредитно-грошовій політиці уряд може контролювати змінну y чи маніпулювати нею, щоб створити бажаний рівень доходу x .

ТЕМА 4

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ТА ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ СУКУПНОСТІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Оскільки всі явища в природі та в суспільстві пов'язані між собою, то постає задача у виявленні зв'язків між ними та їх кількісній оцінці. Зв'язки бувають функціональними, але, поряд із цим, зустрічаються зв'язки між двома величинами, коли вказану відповідність неможливо однозначно встановити, хоча й існує конкретний вплив одної величини на іншу. Водночас на результативну ознаку, окрім врахованого фактора впливає велика кількість інших факторів, які не враховуються в дослідженні, тому кожному значенню врахованої факторної ознаки відповідає ряд розподілу результативної ознаки.

Статистичною називається залежність, за якої зміна одної величини спричиняє зміну розподілу іншої величини.

Якщо за зміни однієї величини змінюється середнє значення іншої, то таку залежність називають **кореляційною**.

Під час вивчення статистичних зв'язків між величинами (ознаками) результати масового дослідження заносять до кореляційної таблиці.

Показники можуть знаходитись у таких **видах зв'язку**:

- балансовому;
- компонентному;
- факторному.

Балансовий зв'язок характеризує залежність між джерелами формування ресурсів та їх використанням. Наприклад.

Формула товарного балансу:

залишок на початок + надійшло = вибуло + залишок на кінець.

Компонентний зв'язок описує зміну статистичного показника, яка спричиняється зміною компоненти, що входить до цього показника як множник, тобто $a = b \cdot c$.

Факторний зв'язок виявляє себе у варіації показників, що досліджуються. У цьому випадку одні показники – факторні, а інші – результативні. Факторний зв'язок може бути як **функціональним**, так і **кореляційним**.

Функціональний зв'язок $y = f(x)$ – це коли зміна результативної ознаки y зумовлена впливом факторної ознаки x .

Наприклад: $l = 2\pi r$. Довжина дуги – l (результативна ознака) однозначно визначається радіусом r (факторна ознака), тобто на неї жоден інший фактор окрім врахованого в моделі (r) не впливає.

Кореляційний зв'язок зумовлює опосередкований вплив одної величини на іншу, тобто на зміну результативної ознаки впливає не лише фактор x , а також інші, не враховані в моделі, фактори, а саме: $y = \varphi(x) + \varepsilon$.

Особливості формування сукупності спостережень для побудови кореляційно-регресійних моделей. Для побудови кореляційно-регресійної моделі необхідно враховувати особливості формування сукупності спостережень (вибірки).

Дані вибірки можуть бути отримані на певний момент часу за різними економічними об'єктами: підприємствами, організаціями, страховими компаніями, інвестиційними компаніями, банками, регіонами, країнами і т. п. Такі дані називають **просторовою вибіркою** (cross-sectional data).

Разом із тим, дані можуть бути вибрані як **часові (динамічні) ряди** (time-series data), тобто бути послідовністю спостережень, упорядкованих по періодах.

Крім того, вони можуть бути сформовані за обома критеріями одночасно – це **просторово-часова вибірка**.

Зрозуміло, що для здійснення кореляційно-регресійного аналізу необхідно, щоб дані було взято з однієї сукупності одиниць, що зумовлює ідентичний вплив факторів.

Отже, для **забезпечення статистичної достовірності регресійної моделі кількість спостережень має бути в 8 – 10 разів більшою за кількість факторів впливу, що враховуються у моделі**.

Іншим обмеженням на формування варіативного ряду є той факт, що факторні ознаки впливають на результативну ознаку, причому вплив одного фактора не залежить від впливу інших факторів. Якщо цього не дотримуватися, то зміна одного з факторів спричинить як прямий, так і опосередкований (через інші фактори) вплив, що призведе до помилки в інтерпретації результатів побудови регресійної моделі.

ТЕМА 5

ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МЕТОДІВ В ОРГАНІЗАЦІЙНОМУ ПРОЄКТУВАННІ. ПРОСТА ВИБІРКОВА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

- 5.1 Загальне поняття про лінійну регресію.
- 5.2 Оцінювання параметрів лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів.
- 5.3 Основні припущення класичного кореляційного аналізу
- 5.4 Дослідження процесу оцінювання побудованої однофакторної кореляційної моделі. Коефіцієнти кореляції та детермінації. Стандартна помилка оцінювання.
- 5.5 Аналіз результатів діяльності організації та зіставлення їх з факторами впливу зовнішнього та внутрішнього середовища засобами простого ANOVA-аналізу. Поняття про ступені вільності. Простий ANOVA-аналіз у лінійній регресії.
- 5.6 Перевірка простої регресійної моделі на адекватність поняття F-критерію Фішера.
- 5.7 Проблеми, що виникають у кореляційному аналізі.
- 5.8 Алгоритм розв'язання задачі однофакторного кореляційного аналізу.

5.1 Загальне поняття про лінійну регресію

Прості лінійні регресійні моделі встановлюють залежність між двома змінними: факторною і результативною ознаками. Наприклад, між витратами на відпустку і складом родини, між обсягом реалізованої продукції і витратами на рекламу.

У загальному вигляді **проста вибіркова лінійна** регресія записується так:

$$y = b_0 + b_1x + e \quad (6.1)$$

де y – вектор спостережень за результативною ознакою $y = \{y_1, \dots, y_n\}$;

x – вектор спостережень за факторною ознакою $x = \{x_1, \dots, x_n\}$;

e – вектор помилок $e = \{e_1, \dots, e_n\}$;

b_0 та b_1 – невідомі параметри регресійної моделі.

Регресійна модель називається **лінійною**, якщо вона лінійна за своїми параметрами. Отже, модель (6.1) є лінійною регресійною моделлю.

5.2 Оцінювання параметрів лінійної регресії за методом найменших квадратів (МНК)

Для того, щоб визначити залежність між y та x потрібно знайти невідомі параметри b_0 та b_1 . Це можливо, якщо мати певний критерій. Розглянемо приклад.

Приклад. Бюро економічного аналізу фабрики «Світоч» оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок і тістечок. Для такого оцінювання є досвід роботи у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потен-

ційні клієнти, ставлення до товарного знака і т. п.). У цих зонах зафіксовано протягом однакового періоду обсяги продажу (млн коробок) – y_i , витрати (млн грн.) фірми на просування товару на ринку – x_i . Розглянемо дані у табл. 5.1, для чого ці спостереження зобразимо точками у системі координат (X,Y), як показано на рис. 5.1. Візуально можна припустити, що між даними є лінійна залежність, тобто їх можна апроксимувати прямою лінією.

Таблиця 5.1 – Дані щодо залежності між витратами та обсягами продажу

№	y_i	x_i
1	25	5
2	20	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18

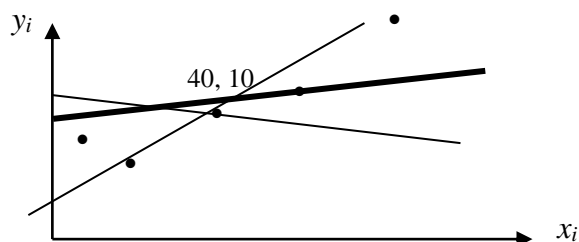


Рисунок 5.1 – Графік точок залежності

Взагалі існує безліч прямих, які можна провести через множину спостережуваних точок. Для цього потрібно скористатися критерієм, який дасть змогу обрати «найкращу» із них за цим критерієм. Найпоширенішим є **критерій мінімізації суми квадратів відхилень**, тобто **метод найменших квадратів (МНК)**.

На рис. 5.1 будь-яка з прямих, яку можна провести через задані точки, має точки, які знаходяться над прямою і під нею. На основі цього можна встановлювати відхилення від безпомилкової прямої, зображені на рис 5.2.

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1x_i, \quad (5.2)$$

де \hat{y}_i – i -та точка на прямій, яка відповідає значенню x_i .

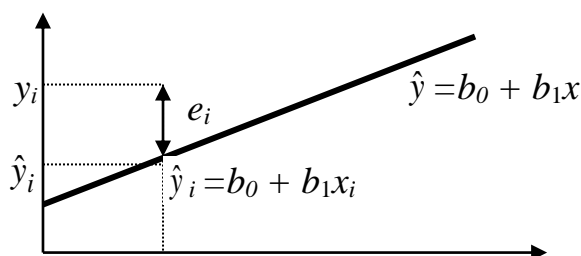


Рисунок 5.2 – Відхилення оцінених значень від емпіричних

Відхилення (помилки) називають ще залишками. Зрозуміло, що логічно вибирати таку пряму, щоб сума квадратів помилок була мінімальною. У цьому й полягає **критерій найменших квадратів**: невідомі параметри b_0 та b_1 визначаються таким чином, щоб мінімізувати суму квадратів помилок:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = f(b_0, b_1) \rightarrow \min \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right)}{\partial b_0} = \frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right)}{\partial b_1} = \frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_1} = 0; \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right)}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0; \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right)}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0,$$

звідки отримаємо систему лінійних рівнянь (розкриємо дужки):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = n \cdot b_0 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i = b_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Виразимо b_0 з першого рівняння і підставимо у друге, отримаємо b_1 :

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (5.7)$$

Із метою спрощення помножимо числівник та знаменник на $1/n$:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (5.8)$$

Вираз (5.8) можна записати ще таким чином:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}. \quad (5.9)$$

Доведемо це:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}; \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2. \quad (5.11)$$

Чисельник (5.9) є коефіцієнтом коваріації між x та y . За означенням, **коефіцієнт коваріації (співзмінення)** цих величин) визначається за формулою:

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}. \quad (5.12)$$

Коваріація (cov) – це абсолютна міра зв'язку між двома величинами.

Знаменник (5.9) є **дисперсією** величини x , тобто:

$$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2. \quad (5.13)$$

Отже, кут нахилу прямої регресії можна встановити за формулами (5.7), (5.8), (5.9).

Для визначення параметра b_0 повернемося до формули (5.5):

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right)}{\partial b_0} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n [y_i - b_0 - b_1 x_i]^2 \right)}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) = \sum_{i=1}^n e_i = 0. \quad (5.14)$$

Вираз (5.14) дає підтвердження про те, що сума помилок дорівнює нулю. Дійсно:

$$y_i - b_0 - b_1 x_i = e_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n e_i = 0. \quad (5.15)$$

Розкриємо дужки у виразі 5.14 та поділимо його на n , отже, b_0 визначається:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - b_0 - b_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \quad (5.16)$$

Таким чином, ми знайшли формули для визначення невідомих параметрів b_0 та b_1 і можемо записати у явному вигляді регресію y від x , в якій параметри обчислені за МНК:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x, \quad (5.17)$$

виходячи з рис. 5.2, отримаємо:

$$y = \hat{y} + e = b_0 + b_1x + e_i. \quad (5.18)$$

5.3 Основні припущення класичного кореляційного аналізу

Розглянемо припущення, які є основою класичного кореляційно-регресійного аналізу (за методом найменших квадратів).

1. Вектор помилок ε_i будемо називати збуренням.
2. Математичне сподівання збурень дорівнює нулю:

$$M(\varepsilon_i) = 0$$

(або математичне сподівання залежної змінної y_i дорівнює лінійній функції регресії: $M(y_i) = \beta_0 + \beta_1x_i$).

3. Дисперсія збурення ε_i (або залежної змінної y_i) є сталою для довільного i :

$$D(\varepsilon_i) = \sigma^2,$$

(або $D(y_i) = \sigma^2$) – умова гомоскедастичності чи рівнозмірності збурень (залежної змінної)).

4. Збурення ε_i та ε_j некорельовані:

$$M(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0, (i \neq j),$$

або

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

5. Незалежність між значеннями випадкової величини ε і значеннями незалежної змінної x :

$$\text{cov}(\varepsilon_i, x_i) = 0, i = \overline{1, n}.$$

6. Випадкова величина ε_i розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням, яке дорівнює нулю, та дисперсією σ^2 .

7. Якщо параметри вибіркової лінійної кореляційно-регресійної моделі розраховані методом найменших квадратів за зроблених вище припущень, то

$$M(b_0) = \beta_0,$$

$$M(b_1) = \beta_1.$$

8. Регресійну модель специфіковано правильно (вибрано правильну функціональну форму моделі).

Зауважимо, що:

1) математичне сподівання збурень $M(\varepsilon_i)$ буде завжди дорівнювати нулю через специфіку методу найменших квадратів;

2) перевірку сталості дисперсії $D(\varepsilon_i)$ можна провести за допомогою критерію І. Фішера;

3) нормальність розподілу помилок за умови великої кількості спостережень перевіряється за допомогою відомих із математичної статистики методів, використовуючи критерій χ^2 або критерій Колмогорова. У разі малої кількості спостережень надійну перевірку нормальності розподілу помилок зробити не можна і припущення про нормальність розподілу помилок доводиться брати на віру.

Економетричне дослідження містить етап специфікації моделі, що має бути адекватною економічному об'єкту, процесу, явищу, що вивчається.

Під час специфікації моделі потрібно з'ясувати такі запитання:

- 1) які змінні потрібно вносити в модель;
- 2) якою має бути функціональна форма моделі: лінійною чи нелінійною, якщо нелінійною, то якою: степеневою, показниковою тощо. Це з'ясовують за допомогою графіка експериментальних точок;
- 3) які можливі припущення щодо змінних x , y , ε можна зробити в моделі?

На етапі специфікації економетричної моделі потрібно залучати експертів або проводити послідовні економетричні дослідження для вдосконалення моделі.

Лема 3.1 Якщо під час кореляційно-регресійного аналізу виконуються перераховані вище припущення, то залежна змінна y має нормальний розподіл з математичним сподіванням

$$M(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

та дисперсією

$$D(y_i) = \sigma^2.$$

Доведення

$$M(y_i) = M(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) = M(\beta_0) + M(\beta_1 x_i) + M(\varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i,$$

оскільки β_0, β_1 – константи, а за припущенням $M(\varepsilon_i) = 0$.

$$D(y_i) = M(y_i - M(y_i))^2 = M(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = M(\varepsilon_i)^2 = \sigma^2.$$

Лема 3.2 Якщо параметри лінійної кореляційно-регресійної моделі розраховано з використанням методу найменших квадратів за припущень 1–8, то

$$D(b_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2};$$

$$D(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Доведення

Дисперсію параметра b_1 визначимо за формулою

$$D(b_1) = M(b_1 - M(b_1))^2 = M(b_1 - \beta_1)^2.$$

Позначивши $\alpha_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, можна записати $b_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Тоді

$$D(b_1) = D\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 D(y_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma^2.$$

Знайдемо $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Остаточно формулу для обчислення дисперсії параметра b_1 подають так:

$$D(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Дисперсію параметра b_0 визначимо за формулою

$$D(b_0) = M(b_0 - M(b_0))^2 = M(b_0 - \beta_0)^2.$$

Оскільки $b_0 = \bar{y}_x - b_1 \bar{x} = \bar{y}_x - \bar{x} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - \bar{x} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \alpha_i \right) y_i$, то

$$D(b_0) = D\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \alpha_i\right) y_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \alpha_i\right)^2 D(y_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \alpha_i\right)^2 \sigma^2.$$

Обчислимо $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \alpha_i\right)^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \alpha_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2\bar{x}\alpha_i}{n} + \bar{x}^2 \alpha_i^2\right) = \frac{1}{n} - \frac{2\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \\ &= \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) + n\bar{x}^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \end{aligned}$$

Остаточна формула для обчислення дисперсії параметра b_0 така:

$$D(b_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Виникає природне запитання, чи є оцінки b_0 та b_1 параметрів β_0 та β_1 найкращими? Відповідь на це запитання дає теорема Гаусса–Маркова: якщо регресійна модель задовольняє припущення 1-5, то оцінки b_0 та b_1 мають найменшу дисперсію в класі усіх лінійних несуміщених оцінок.

Таким чином, в певному сенсі, оцінки b_0 та b_1 є найбільш ефективними лінійними оцінками параметрів β_0 та β_1 .

5.4 Дослідження процесу оцінювання побудованої однофакторної кореляційної моделі. Коефіцієнти кореляції та детермінації

Найпростішим критерієм, який дає кількісну оцінку зв'язку між двома показниками, є коефіцієнт кореляції. Він розраховується за допомогою такої формули:

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)}\sqrt{\text{var}(y)}} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (5.19)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)}, \sigma_y = \sqrt{\text{var}(y)}.$$

Коефіцієнт кореляції, на відміну від коефіцієнта коваріації, є не абсолютною, а **відносною мірою зв'язку між двома факторами**, тому значення коефіцієнта кореляції (*corr*) змінюються у межах: від -1 до +1, тобто $-1 \leq \text{corr} \leq +1$

Додатне значення коефіцієнта кореляції свідчить про прямий зв'язок між показниками, а від'ємне – про зворотний зв'язок. Коли коефіцієнт кореляції прямує до $r_{xy} \rightarrow \pm 1$, це свідчить про наявність щільного зв'язку між двома факторами. У протилежному випадку – коефіцієнт кореляції прямує до нуля ($r_{xy} \rightarrow 0$), тобто зв'язку між змінними немає.

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною, яка характеризує ступінь залежності цих величин, яка виявляється в тому, що за умови зростання однієї випадкової величини інша також виявляє тенденцію до зростання (чи убування). У першому випадку говорять, що випадкові величини пов'язані позитивною кореляцією, а в другому – кореляція негативна.

Перевірка адекватності побудованої регресійної моделі реальному економічному явищу (об'єктові), тобто правильності вибору форми зв'язку між двома змінними здійснюється за допомогою **коефіцієнта детермінації**. Наприклад, якщо перевіряється адекватність оціненої лінійної моделі, то коефіцієнт детермінації визначає, чи справді змінна у лінійно залежить від змінної x . Таким критерієм є :

$$D = \frac{\sigma_{\text{рег}}^2}{\sigma_{\text{заг}}^2} = \frac{SSR}{SST}, \quad (5.20)$$

де $\sigma_{\text{рег}}^2$ – це дисперсія, що пояснює регресію;

$\sigma_{\text{заг}}^2$ – це загальна дисперсія;

SST – загальна сума квадратів;

SSR – сума квадратів, що пояснює регресію.

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2. \quad (5.21)$$

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (5.22)$$

Перепишемо (5.21), враховуючи (5.17), так:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - [b_0 + b_1 \bar{x}])^2 = b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.23)$$

Внесемо зміни до (5.20), враховуючи (5.21) – (5.23), помножуючи на $1/n$. Отримаємо:

$$D = \frac{SSR}{SST} = \frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n}}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{b_1^2 \cdot \sigma_x^2}{\sigma_y^2}. \quad (5.24)$$

Відомо, що коефіцієнт кореляції:

$$R = \frac{b_1 \cdot \sigma_x}{\sigma_y}. \quad (5.25)$$

Отже, порівнюючи вирази (5.24) та (5.25), отримаємо:

$$R^2 = D. \quad (5.26)$$

Якщо значення коефіцієнта детермінації у межах $[0.55 - 1]$, тобто близьке до одиниці, то модель є адекватною. Якщо ж значення коефіцієнта детермінації знаходиться у межах $(0 - 0,44)$, то модель є неадекватною. У випадку, коли $D \in [0,45-0,54]$, для перевірки правильності припущення про форму зв'язку між ознаками (адекватності моделі) застосовують F -критерій (критерій Фішера).

Крім коефіцієнта детермінації придатність лінії регресії можна перевірити, визначивши **стандартну помилку оцінювання**:

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{SSE}{(n-m)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m}}, \quad (5.27)$$

$$\text{де } SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2; \quad (5.28)$$

m – кількість оцінюваних параметрів у регресійній моделі. У разі простої лінійної регресії $m = 2$.

5.5 Аналіз результатів діяльності організації та зіставлення їх з факторами впливу зовнішнього та внутрішнього середовища засобами простого ANOVA-аналізу. Поняття про ступені вільності. Простий ANOVA-аналіз у лінійній регресії

Розглянемо тотожність, яка пов'язує загальну суму квадратів із сумою квадратів помилок та із сумою квадратів, що пояснюють регресію:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (5.28)$$

$$SST = SSE + SSR. \quad (5.29)$$

Кожна сума квадратів пов'язана з числом, яке називається її **ступенем вільності**, це число показує, скільки незалежних елементів інформації, які утворюються з елементів (y_1, \dots, y_n) потрібно для розрахунку цієї суми квадратів (n – кількість дослідів (або аналізованих періодів)).

Розглянемо, скільки ступенів вільності має кожна вивчена нами сума квадратів.

Для утворення SST потрібно $(n - 1)$ незалежних чисел, тому що з чисел $\{(y_1 - \bar{y}), (y_2 - \bar{y}), \dots, (y_n - \bar{y})\}$ незалежні тільки $(n - 1)$ завдяки властивості:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = 0.$$

Сума квадратів, що пояснює регресію, SSR має $(m-1)$ -у незалежну одиницю інформації (m – кількість параметрів у регресійній моделі), яка утворюється з y_1, \dots, y_n , тобто незалежними одиницями інформації є параметри $b_1 \dots b_p$, оскільки параметр b_0 не утворюється з y_1, \dots, y_n . У випадку простої (однофакторної) лінійної регресії SSR має лише одну незалежну одиницю інформації, а саме параметр b_1 , оскільки параметр b_0 не утворюється на базі незалежних одиниць y_1, \dots, y_n .

Доведемо це. Запишемо відхилення, що пояснює регресію, у вигляді:

$$\hat{y}_i - \bar{y} = b_1(x_i - \bar{x}).$$

Візьмемо суми з обох боків рівняння і піднесемо їх до квадрата:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Таким чином, дійсно SSR можна утворити, використовуючи лише єдину незалежну одиницю інформації b_1 .

Сума квадратів помилок SSE базується на кількості ступенів вільності, що дорівнює $(n - m)$, тобто різниці між кількістю дослідів n і кількістю параметрів, що оцінюються m . У разі простої лінійної регресії оцінюються два параметри b_0 та b_1 , то в такому випадку SSE має $(n - 2)$ ступеня вільності.

Отже, для багатофакторної лінійної регресії:

$$\begin{aligned} SST &= SSE + SSR \\ n-1 &= n-m + m-1 \end{aligned}$$

У разі простої (однофакторної) лінійної регресії:

$$\begin{aligned} SST &= SSE + SSR \\ n-1 &= n-2 + 1 \end{aligned}$$

Простий ANOVA-аналіз у лінійній регресії. Використовуючи суми квадратів та відповідні їм ступені вільності, введемо поняття про середні квадрати.

Середнім квадратом називається сума квадратів, поділена на відповідний їй ступінь вільності.

Середній квадрат помилки (MSE) – сума квадратів помилок, поділена на відповідний їй ступінь вільності:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m},$$

для однофакторної регресійної моделі $MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}$.

Середній квадрат, що пояснює регресію, позначається через **MSR** та відповідно дорівнює сумі квадратів, що пояснює регресію, поділену на її ступінь вільності $\nu_1 = m - 1$:

$$MSR = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m - 1} = \frac{SSR}{m - 1}.$$

Оскільки у разі простої лінійної регресії кількість параметрів $m=2$, то **SSR** має лише один ступінь вільності $\nu_1 = 2 - 1 = 1$, тобто середній квадрат збігається із сумою квадратів, а саме: $MSR = SSR$.

Потрібно зазначити, що для загальної суми квадратів середній квадрат не розраховується.

Суми квадратів, пов'язані з певними джерелами варіації, а також їх ступенями вільності та середніми квадратами, наведено у табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – ANOVA-таблиця

Сума квадратів	Кількість ступенів вільності (ν)	Середні квадрати
$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\nu_1 = m - 1$, для однофакторної $\nu_1 = 1$	$MSR = \frac{SSR}{m - 1}$, для однофакторної: $MSR = SSR$
$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\nu_2 = n - m$, для однофакторної $\nu_2 = n - 2$	$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}$ для однофакторної: $MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}$
$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	$n - 1$	–

5.6 Перевірка простої регресійної моделі на адекватність. Поняття F-критерію Фішера

У попередніх підрозділах було показано, що адекватність простої лінійної регресивної моделі можна перевірити за допомогою коефіцієнта детермінації. Якщо його значення близьке до одиниці, то можна вважати, що модель адекватна. Якщо його значення наближається до 0, то модель неадекватна, тобто лінійного зв'язку між двома змінними немає. Але, який висновок можна зробити, якщо значення коефіцієнта детермінації має нечітко виражене граничне значення, наприклад 0.44, 0.45, 0.5, 0.54 і т. п. Зрозуміло, що в таких випадках важко зробити однозначний висновок про наявність зв'язку відповідної форми, тобто про адекватність моделі. Потрібен інший критерій, який би однозначно відповідав на питання про адекватність моделі.

Найпоширенішим серед таких критеріїв є **критерій Фішера**. Він дозволяє перевірити базову гіпотезу (в статистиці вона називається нульовою гіпотезою і позначається H_0), що краще апроксимувати дані середнім значенням ($\hat{y} = \bar{y}$), ніж регресійною прямою ($\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$). Це дає змогу перевірити наявність або відсутність лінійного зв'язку між змінними, тобто перевірити адекватність побудованої регресійної моделі реальності.

Перевірка моделей на адекватність за F -критерієм Фішера передбачає такі етапи:

- На першому етапі розрахунок величини F -відношення:

$$F_{\nu_1=(m-1), \nu_2=(n-m)} = \frac{SSR/(m-1)}{SSE/(n-m)} = \frac{MSR}{MSE},$$

де $\nu_1 = m-1$ – ступінь вільності для SSR ;

$\nu_2 = n-m$ – ступінь вільності для SSE ;

n – кількість дослідів (періодів);

m – кількість параметрів (для однофакторної моделі $m = 2$).

MSR – середній квадрат, що пояснює регресію;

MSE – середній квадрат помилок.

Тоді для однофакторної лінійної регресійної моделі F -відношення:

$$F_{\nu_1=1, \nu_2=n-2} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{SSR/1}{SSE/n-2}.$$

Отже, для однофакторної лінійної регресійної моделі ступені вільності, що відповідно пов'язані з MSR і MSE , становлять $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = n - 2$.

- На другому етапі задаємо рівень значимості α або $\alpha 100\%$. Наприклад, якщо ми вважаємо, що можлива помилка для нас становить 0,05 (5%), то це означає, що ми можемо помилитися не більше, ніж у 5% випадків, а у $95\% = (100(1-\alpha))\%$ наші висновки будуть правильними.

- На третьому етапі за статистичними таблицями F -розподілу Фішера зі ступенями вільності ν_1 і ν_2 (для однофакторної моделі $\nu_1=1$, $\nu_2=n-2$) і рівнем значимості $(100(1-\alpha))\%$ обчислимо критичне (табличне) значення $F_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$.
- Якщо розраховане нами значення $F_{\nu_1, \nu_2} > F_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$, то побудована нами регресійна модель є адекватною (ризик помилитися є не більшим, ніж у 5% випадків) і нульова гіпотеза H_0 не справджується. Якщо навпаки: $F_{\nu_1, \nu_2} < F_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$, то побудована нами регресійна модель є неадекватною (ризик помилитися є не більшим, ніж у 5% випадків) і нульова гіпотеза H_0 справджується.

5.7 Проблеми, що виникають у кореляційному аналізі

Серед базових проблем, що виникають під час кореляційного аналізу основними є такі:

- визначення типу кореляційної залежності за даними кореляційної таблиці;
- встановлення щільності зв'язку між результативною у та факторною x ознаками.

Пошук рівняння регресії – це одна з найважливіших проблем, що розглядається в кореляційному аналізі. Найбільш часто зустрічаються:

- лінійна форма зв'язку;
- гіперболічна;
- параболічна;
- показникова;
- степенева та ін.

На практиці тип кореляційного рівняння визначають за допомогою графіка емпіричних точок та його аналізу. Тип рівняння можна визначити шляхом порівняння середніх приростів факторних і результативної змінних.

Не існує універсального методу визначення типу рівняння. Є лише способи перевірки своїх гіпотез відносно типу залежності між x та y .

Якщо знайдено тип кореляційного відношення, то його параметри знаходять, розв'язуючи систему нормальних рівнянь.

Для параболічної залежності (рис. 5.3):

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 \rightarrow \begin{cases} nb_0 + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 = \sum y_i; \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i; \\ b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i. \end{cases}$$

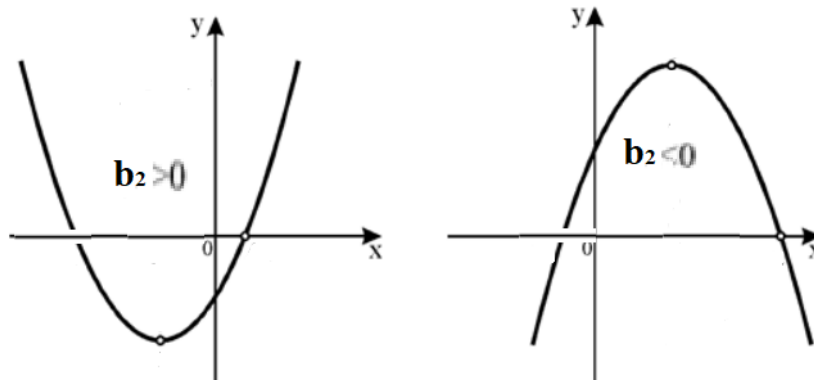


Рисунок 5.3 – Графіки параболічної залежності
Для гіперболічної залежності (рис. 5.4):

$$\hat{y} = b_0 + \frac{b_1}{x} \rightarrow \begin{cases} nb_0 + b_1 \sum \frac{1}{x_i} = \sum y_i; \\ b_0 \sum \frac{1}{x_i} + b_1 \sum \frac{1}{x_i^2} = \sum \frac{y_i}{x_i}; \end{cases}$$

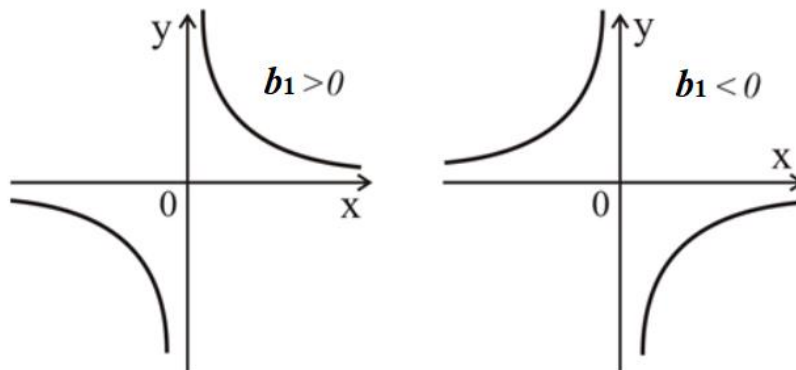


Рисунок 5.4 – Графіки гіперболічної залежності
Для показникової залежності (рис. 5.5):

$$\hat{y} = b_0 b_1^x \rightarrow \begin{cases} n \lg b_0 + \lg b_1 \sum x_i = \sum \lg y_i; \\ \lg b_0 \sum x_i + \lg b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \lg y_i. \end{cases}$$

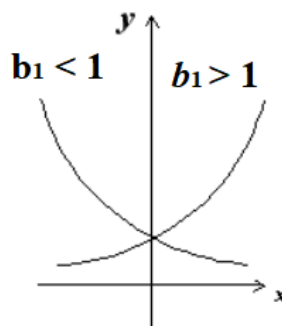


Рисунок 5.5 – Графіки показникової залежності

Для степеневї залежності (рис. 5.6):

$$\hat{y} = b_0 x^{b_1}, \rightarrow \begin{cases} n \lg b_0 + b_1 \sum \lg x_i = \sum \lg y_i; \\ \lg b_0 \sum \lg x_i + b_1 \sum \lg x_i \lg y_i = \sum \lg y_i \lg x_i. \end{cases}$$

modi $\lg \hat{y} = \lg b_0 + b_1 \lg x$

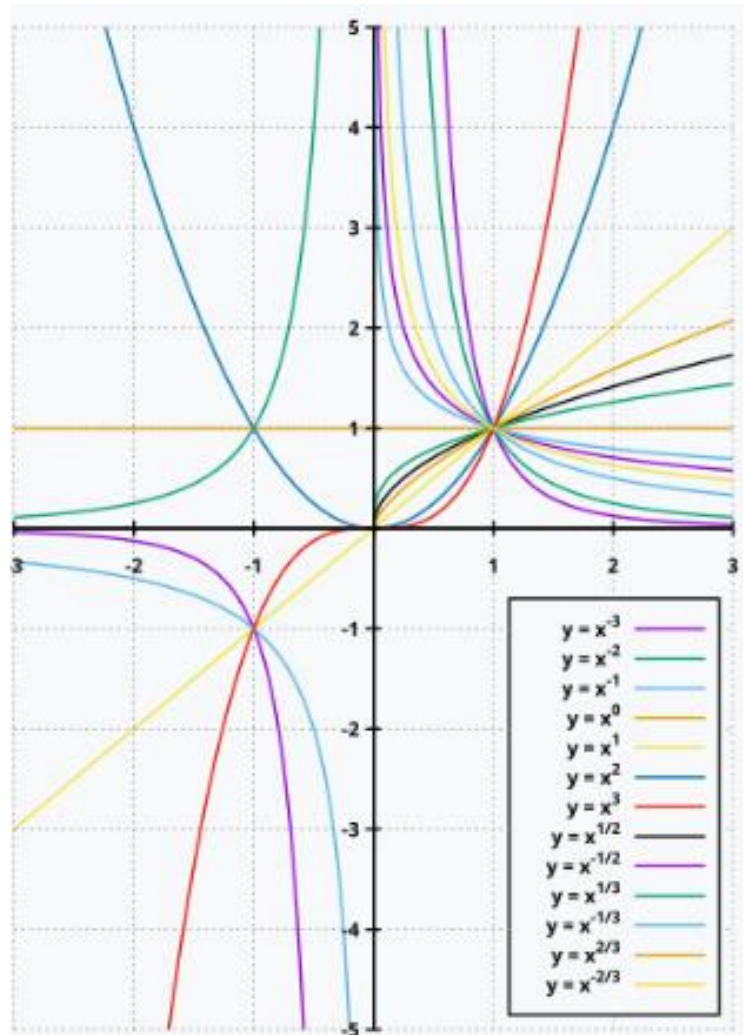


Рисунок 5.6 – Графіки степеневї залежності

5.8 Алгоритм розв'язання задачі однофакторного кореляційного аналізу

Алгоритм розв'язання задачі однофакторного кореляційного аналізу полягає у виконанні таких кроків:

Крок 1. Вибрати форму зв'язку (відмічають емпіричні дані на координатній площині, тобто зображають графік цієї залежності).

Крок 2. Обчислити параметри відповідного кореляційного рівняння (для цього складають спеціальну кореляційну таблицю) за допомогою системи нормальних рівнянь та записати шукане оцінене рівняння.

Крок 3. Оцінити щільність зв'язку між результативною і факторною ознаками за допомогою коефіцієнта кореляції.

Крок 4. Перевірити адекватність моделі за допомогою коефіцієнта детермінації (або Фішера, якщо $D \in [0,45-0,54]$).

Відповідні кореляційні рівняння можна використовувати під час аналізу різнобічних економічних систем, явищ. Наприклад, їх можна застосовувати у граничному аналізі та для пошуку оптимальних: прибутку, витрат на виробництво та обсягу виробництва та ціни одиниці продукції.

Обсяг виробництва, ціна одиниці продукції та витрати на випуск цієї продукції і її реалізацію знаходяться у певних залежностях один від одного. Тому отримання максимального прибутку від реалізації продукції можливе лише за конкретних співвідношень між вказаними величинами.

Введемо такі позначення:

K – кількість виробленого та реалізованого продукту (або послуг);

C_i – ціна одиниці продукції;

$C_i \cdot K$ – виручка від реалізації товару (надання послуг);

Π – прибуток від реалізації,

Тоді бажання отримати максимальний прибуток від реалізації продукції можна сформулювати такою математичною моделлю:

$$\Pi_K = C_i \cdot K - B.$$

Необхідною умовою екстремуму цієї функції є похідна по K , що дорівнює 0:

$$\Pi_K' = (C_i \cdot K)' - B' = 0,$$

де Π_K' – граничний прибуток від реалізації;

$(C_i K)'$ – гранична виручка;

B' – граничні витрати.

Виходячи з цього рівняння маємо:

$(C_i K)' = B'$ – це співвідношення дозволяє здійснити аналіз на оптимальність обсягу виробленої та реалізованої продукції (послуг) за критерієм максимального прибутку від реалізації.

Умовою максимуму є те, що похідна Π_K' в точці максимуму дорівнює 0, причому в точці $(K-1)$ вона є більшою за 0, а в точці $(K+1)$ похідна є меншою за 0.

ТЕМА 6

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРСПЕКТИВ РОЗВИТКУ ОРГАНІЗАЦІЇ ЗАСОБАМИ КЛАСИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ БАГАТОФАКТОРНОЇ МОДЕЛІ

6.1 Класична нормальна лінійна модель множинної регресії

6.2 Оцінювання параметрів багатофакторної лінійної регресійної моделі

6.3 Перевірка значущості множинної регресії. Коефіцієнт еластичності.
Критерії детермінації, Фішера та Стьюдента

6.1 Класична нормальна лінійна модель множинної регресії

Економічні явища, як правило, визначаються великою кількістю факторів. Кожна економічна змінна залежить не від одного, а від багатьох факторів. Наприклад, валовий регіональний продукт залежить не лише від величини основних засобів, а й від величини оборотних фондів, величини інвестицій в основний капітал, кількості людей, зайнятих на підприємствах регіону, технологій, які використовуються, ефективності управлінських рішень тощо. Урожайність деяких культур залежить від родючості ґрунту, кількості внесених органічних і мінеральних добрив, сорту насіння, агротехнічного оброблення, природних умов тощо. Спільний вплив кількох факторів на одну результативну змінну досліджують за допомогою багатофакторних економетричних моделей.

У зв'язку з цим часто виникає задача дослідження залежності змінної y від змінних x_1, x_2, \dots, x_p . Ця задача розв'язується за допомогою множинного регресійного аналізу.

Позначимо i -те спостереження залежної змінної y_i , пояснювальні змінні – $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$. Тоді модель множинної регресії має вигляд:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad (6.1)$$

де ε_i – випадкова величина, $i = \overline{1, n}$;

$\beta_0 \dots \beta_p$ – параметри моделі.

Модель (6.1) називають класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії.

Залежна змінна y називається також пояснюваною ендогенною змінною, незалежні змінні x_i – пояснювальними, екзогенними змінними.

Введення більшої кількості пояснювальних змінних ускладнює математичне оброблення даних, тому виникла доцільність використання матричних позначень:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Звернемо увагу на те, що до матриці X введено додатковий стовпець, усі елементи якого дорівнюють 1, тобто умовно припускаємо, що в моделі (6.1) вільний член β_0 множиться на фіктивну змінну x_{i0} , яка дорівнює 1 для всіх значень i .

Враховуючи позначення (6.2) модель (6.1) набуває вигляду:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \quad (6.3)$$

Для побудови багатofакторних моделей, власне як і як однофакторних, необхідно дотримуватися таких передумов:

1. Математичне сподівання залишків (відхилень) має дорівнювати нулю, тобто

$$M(\varepsilon) = 0, \quad (6.4)$$

(або математичне сподівання залежної змінної y_i дорівнює лінійній функції регресії: $M(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$);

2. Значення вектора залишків (відхилень) ε незалежні між собою і мають постійну дисперсію:

$$D(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad (6.5)$$

тобто дисперсія вектора залишків ε_i (або залежної змінної y_i , що дорівнює $D(y_i) = \sigma^2$) є сталою для довільного i – умова гомоскедастичності чи рівномірності залишків (залежної змінної).

3. Незалежні змінні моделі створюють лінійно незалежну систему векторів, тобто

$$(X_k X_j) = 0, \quad k \neq j;$$

$$(X_k X_j) = 1, \quad k = j; \quad j = \overline{1, m}.$$

– наслідок відсутності мультиколінеарності між факторними ознаками.

4. Випадкові величини (відхилення) ε_i та ε_j некорельовані:

$$M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \quad (i \neq j)$$

або

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0. \quad (6.6)$$

Це є необхідною умовою відсутності автокореляції (явище кореляції значень результуючої змінної Y , що виникає унаслідок залежності між будь-якими значеннями випадкової величини ε).

5. Незалежність між значеннями випадкової величини ε і значеннями незалежної змінної x :

$$\text{cov}(\varepsilon_i, x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.7)$$

6. Випадкова величина ε_i розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, та дисперсією σ^2 .

6.2 Оцінювання параметрів багатofакторної лінійної регресійної моделі

Оцінкою моделі (6.3) є рівняння вигляду:

$$Y = Xb + e, \quad (6.8)$$

$$\text{де } b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

За методом найменших квадратів параметр b має бути таким, щоб сума квадратів відхилень була б мінімальною, тобто:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \rightarrow \min.$$

Згідно із цим методом параметр b знаходиться за формулою:

$$b = (X^T X)^{-1} \cdot X^T Y. \quad (6.9)$$

Тоді лінійна модель має вигляд:

$$\hat{Y} = X_0^T b, \quad (6.10)$$

$$\text{де } X_0^T = (1 \quad x_{10} \quad x_{20} \quad \dots \quad x_{p0}).$$

6.3 Перевірка значущості множинної регресії. Коефіцієнт еластичності. Критерії детермінації Фішера та Стьюдента

Для перевірки адекватності багатofакторної регресійної моделі, як і у випадку однофакторного кореляційного аналізу, використовується *коефіцієнт детермінації* D , який показує, яка частина зміни Y залежить від врахованих у моделі екзогенних змінних X і обчислюється так:

$$D = \frac{SSR}{SST} = \frac{b^T X^T Y - n\bar{y}^2}{Y^T Y - n\bar{y}^2} = \frac{b^T X^T Y - n\bar{y}^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}. \quad (6.11)$$

Нагадаємо, що чим ближчим є цей коефіцієнт до одиниці, тим краще регресія описує залежність між пояснювальними X та залежною Y змінними.

Разом із тим використання лише одного коефіцієнта детермінації для вибору найкращого рівняння регресії може виявитись недостатнім. На практиці зустрічаються випадки, коли неправильно визначена модель регресії (неадекватна) може мати досить високий коефіцієнт детермінації. Недоліком коефіцієнта детермінації є той факт, що він збільшується під час додавання нових пояснювальних змінних, хоча це не обов'язково означає покращення якості регресійної моделі. Тому доцільніше використовувати *скоригований (адаптований, виправлений) коефіцієнт детермінації* \bar{D} , що визначається за формулою

$$\bar{D} = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-D), \quad (6.12)$$

де n – кількість дослідів (аналізованих періодів) у моделі;

p – кількість пояснювальних змінних X у моделі.

Із рівності (6.12) випливає, що чим більшою є кількість змінних X (число p), тим меншим є коефіцієнт \bar{D} порівняно з D . Скоригований коефіцієнт детермінації \bar{D} , на відміну від D , може зменшуватися під час введення до моделі нових пояснювальних змінних, що не мають істотного впливу на залежну змінну. Однак навіть збільшення скоригованого коефіцієнта детермінації під час введення до моделі нової пояснювальної змінної не завжди означає, що її коефіцієнт регресії є значущим (це відбувається лише в тому випадку, коли відповідне значення t -статистики більше за одиницю (за абсолютною величиною), тобто $|t| > 1$). Іншими словами, збільшення \bar{D} ще не означає покращення якості регресійної моделі.

Якщо є відомим коефіцієнт детермінації D , то критерій значущості рівняння регресії може бути записаний у вигляді **критерію Фішера**:

$$F = \frac{D(n-p-1)}{(1-D)p} > F_{\alpha; \nu_1; \nu_2}, \quad (6.13)$$

де $\nu_1 = p$, $\nu_2 = n - p - 1$, оскільки в рівнянні множинної регресії разом із вільним членом оцінюється кількість параметрів $m = p + 1$;

$F_{\alpha; \nu_1; \nu_2}$ – табличне значення функції Фішера-Снедекора.

У множинному регресійному аналізі досить часто виникає питання відсоткової оцінки відокремленого впливу екзогенної змінної X_j на ендогенну змінну Y . Із цією метою розглядається *коефіцієнт еластичності* E_j , який обчислюється так:

$$E_j = b_j \frac{\overline{x_j}}{\overline{y}}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (6.14)$$

де b_j – відповідний коефіцієнт з рівняння регресії,

$\overline{x_j}$ – середнє арифметичне змінної x_j ;

\overline{y} – середнє арифметичне ендогенної змінної Y .

Коефіцієнт еластичності E_j показує на скільки відсотків зміниться в середньому Y , якщо x_j збільшити на 1%.

t -критерій Стюдента. Значущість коефіцієнта регресії b_j можна перевірити, якщо врахувати, що статистика $\frac{(b_j - \beta_j)}{s_{b_j}}$ має t -розподіл Стюдента із

$\nu_2 = n - p - 1$ ступенями вільності. Тому b_j істотно відрізняється від нуля (гіпотеза H_0 про рівність параметра β_j нулю, тобто $H_0: \beta_j = 0$, відкидається) на рівні

значимості α , якщо $|t| = \frac{|b_j|}{s_{b_j}} > t_{1-\alpha; n-p-1}$, де $t_{1-\alpha; n-p-1}$ – табличне значення t -

критерію Стюдента, визначене на рівні значимості α для числа ступенів вільності $\nu_2 = n - p - 1$.

У загальній постановці гіпотеза H_0 про рівність параметра β_j заданому числу β_{j0} , тобто $H_0: \beta_{j0} = 0$, відкидається, якщо

$$|t| = \frac{|b_j - \beta_{j0}|}{s_{b_j}} > t_{1-\alpha; n-p-1}.$$

Тому довірчий інтервал для параметра β_j :

$$b_j - t_{1-\alpha; n-p-1} \cdot s_{b_j} \leq \beta_j \leq b_j + t_{1-\alpha; n-p-1} \cdot s_{b_j}.$$

ТЕМА 7

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ ЗАСОБІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ. МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ УПРАВЛІНСЬКИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ, ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ РОЗВИТКУ УКРАЇНИ

7.1 Економетричний аналіз динаміки інфляційних процесів в Україні

7.2 Визначення чинників впливу на рівень інфляції в Україні

7.3 Побудова кореляційно-регресійної моделі для оцінювання впливу рівня безробіття на рівень інфляції в Україні

7.1 Економетричний аналіз динаміки інфляційних процесів в Україні

Інфляція, як один з основних економічних показників, завжди викликала великий інтерес у економістів, політиків та широкої громадськості. Україна, яка перебуває на перехідному етапі свого розвитку, не є винятком і знаходиться під впливом низки факторів, що впливають на інфляційні процеси в країні. Важливість розуміння цих процесів та їх залежності від різних економічних чинників важко переоцінити, оскільки це є основою для прийняття раціональних економічних рішень, спрямованих на стабілізацію валюти країни та сприяння економічному розвитку.

Інфляція – це явище нестабільне та залежне від великої кількості чинників, як мікро-, так і макросередовища. В нашій країні, яка є незалежною лише 33 роки, дуже важко виявити, від яких чинників прямо залежна інфляція. Історично Україна зазнавала періодів високої інфляції, а потім, завдяки реформам, здійснювалася спроба стабілізації.

Розглянемо рівень інфляції протягом 2010-2022 рр. (рис. 7.1).

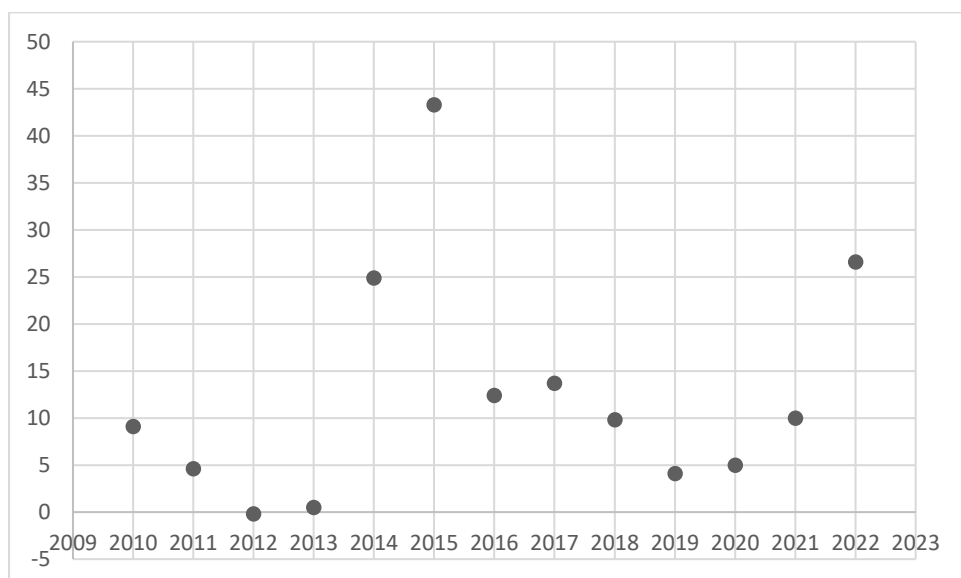


Рисунок 7.1 – Графік зміни індексів інфляції за 2010-2022 роки

Графік залежності дозволяє спостерігати найвищий рівень інфляції у 2015 році. Неконтрольований вибух споживчих цін у першому кварталі цього року був спровокований панікою на валютному ринку. І це при тому, що більшість цих товарів виробляються в Україні і лише частково залежать від валютного курсу. Як наслідок, українці зіткнулися зі зростанням цін на 5,3% у лютому та на 10,8% у березні. Наступним ціновим шоком року стало підвищення тарифів на природний газ для населення у 5,5 разів з 1 квітня. Це призвело до зростання споживчих цін на 14% лише у квітні.

Інфляційне таргетування здійснюється з метою запобігання розриву між заздалегідь оголошеним показником інфляції (таргетом) і фактичним його значенням. Перехід Національного банку до проведення грошово-кредитної політики на засадах інфляційного таргетування (ІТ), який відбувся у 2015 році, став однією із найбільших реформ для Національного банку України. Запровадження нового монетарного режиму можна порівняти з грошовою реформою 1996 року або розробкою Закону про НБУ в 1999 році.

Після впровадження інфляційного таргетування рівень інфляції почав знижуватись. Національний банк розпочав політику ІТ з поступового зниження інфляційної цілі з 12% на кінець 2016 року до 5% у середньостроковій перспективі, також знизилась волатильність інфляції.

Основною причиною зростання інфляції стала девальвація національної валюти (її тенденцію продемонстровано на рис. 7.2), яка різною мірою вплинула на ціни на різні товари та послуги. Проте, через вплив інфляційного таргетування, прямої залежності між рівнем інфляції та девальвацією гривні не спостерігається. Це доведено на рис. 7.3. Крім того, певну роль у цьому явищі відіграла недосконала політика обмінного курсу в період з 2009 по 2013 роки.

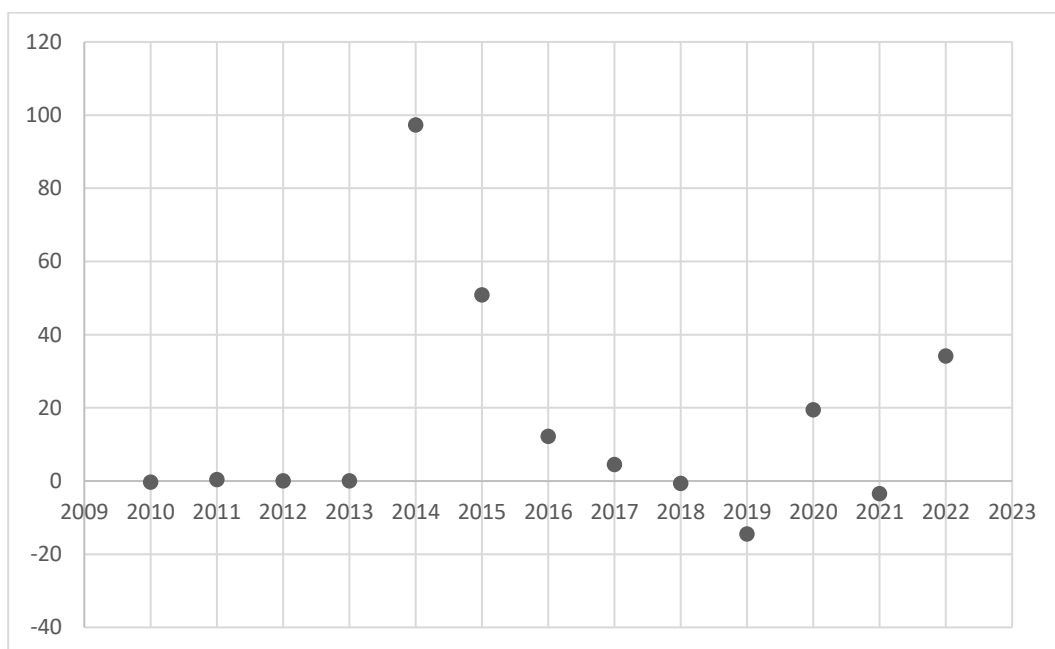


Рисунок 7.2 – Графік зміни індексів девальвації гривні за 2010-2022 роки

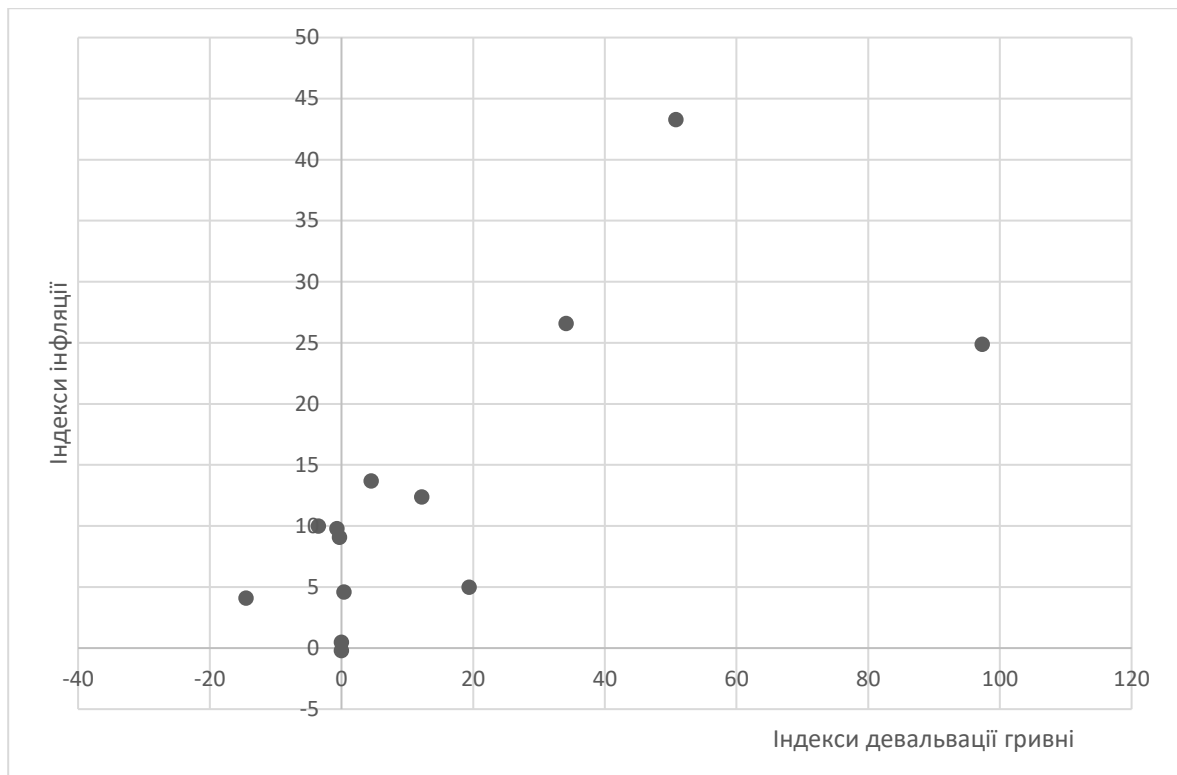


Рисунок 7.3 – Графік залежності зміни рівня інфляції та девальвації гривні

Підсумовуючи, можна сказати, що основними факторами, які сприяли зростанню рівня інфляції в Україні, була недостатньо збалансована фіскальна та монетарна політика. Крім того, загострення військово-політичного конфлікту на сході країни ще більше погіршило ситуацію. Це пов'язано з тим, що обмінний курс національної валюти залишається нестабільним через триваючу політичну та економічну кризу в Україні.

Найнижчий рівень інфляції спостерігався у 2013 році і становив 0,5%. У період з 2012 року до 2013 року економіка України перебувала у фазі рецесії, тому інфляція в ті роки знизилась до історичного мінімуму: -0,2% у 2012 році та 0,5% відповідно у 2013 році.

Після різкого прискорення рівня індексів споживчих цін у 2015 році, спостерігались незначні коливання до зниження та підвищення, що свідчить про регресію до середнього значення. Проте, у 2022 році він стрімко зріс, порівняно з попереднім роком, на 16,6%.

У грудні 2022 року споживча інфляція в річному вимірі становила 26,6%, продемонструвавши мінімальну варіацію порівняно з темпами зростання в листопаді (26,5%) та жовтні (26,6%). У місячному вимірі ціни зросли на 0,7%, як повідомляє Державна служба статистики України³.

Зростання інфляції протягом 2022 року, насамперед, пов'язане з наслідками повномасштабної військової агресії росії. Це призвело до руйнування підприємств та інфраструктури, перебоїв у виробництві та ланцюгах поставок, підвищення собівартості продукції для бізнесу та тимчасового сплеску попиту

³ сайт Державної служби статистики України

на окремі товари та послуги. Непрямі наслідки конфлікту, такі як коливання валютного курсу та погіршення очікувань домогосподарств і бізнесу протягом року, також відіграли свою роль. Крім того, глобальне зростання інфляції чинило тиск на ціни в Україні, оскільки багато країн світу того ж року пережили багаторічні максимуми інфляції.

Рівень інфляції в Україні різко зріс з 10,0% у 2021 році до 26,6% у 2022 році, а потім знизився до 5,1% у 2023 році за даними Державної служби статистики. Згідно з даними, інфляція споживчих цін зросла з 0,5% у листопаді до 0,7% у грудні 2023 року, але знизилася до 0,8% у грудні 2022 року, внаслідок чого річна інфляція становила 5,1%, як і в листопаді. Базова інфляція знизилася з 0,3% у листопаді до нуля в грудні 2023 року; враховуючи, що в грудні 2022 року базова інфляція становила 0,8%, річний показник базової інфляції знизився до 4,9% порівняно з 22,6% у 2022 році.

Національне управління статистики вказує, що середньорічна інфляція за 2023 рік (січень-грудень) становила 12,9% порівняно з 20,2% у попередньому році. Як повідомлялося раніше, наприкінці жовтня Національний банк України підвищив прогноз інфляції на 2023 рік з 10,6% до 5,8%, але знизив його з 8,5% до 9,5% на 2024 рік. На початку листопада уряд підвищив прогноз інфляції на 2023 рік з 14,7% до 7,1% та на 2024 рік з 10,8% до 9,7%.

Враховуючи прогнози аналітиків та експертів щодо рівня інфляції у 2024 році, можна сказати, що знову спостерігатиметься тенденція до стабілізації цього показника, тобто він буде прямувати до середнього історичного рівня.

7.2 Визначення чинників впливу на рівень інфляції в Україні

Вплив економічних чинників на інфляцію є складним і багатобічним. Нижче наведено деякі ключові економічні фактори, які відіграють значну роль у впливі на інфляцію:

1) динаміка попиту та пропозиції. Інфляція попиту та пропозиції: Якщо сукупний попит на товари та послуги в економіці перевищує сукупну пропозицію, це може призвести до інфляції попиту. Зазвичай відбувається це в періоди стійкого економічного зростання, збільшення споживчих витрат або фіскальних стимулів;

2) монетарні чинники:

– пропозиція грошей: збільшення грошової маси, спричинене політикою центрального банку або іншими факторами, може сприяти інфляції. Якщо в обігу з'являється більше грошей без відповідного збільшення виробництва товарів і послуг, люди можуть мати більше грошей, щоб витратити їх, що призведе до зростання попиту і цін.

– процентні ставки: центральні банки використовують процентні ставки як інструмент контролю над інфляцією. Вищі відсоткові ставки можуть зменшити обсяги запозичень і витрат, сповільнюючи економічну активність та інфляцію. І навпаки, нижчі процентні ставки можуть стимулювати економічне зростання, але також можуть сприяти інфляційному тиску;

3) стан ринку праці:

3.1) рівень безробіття. Зв'язок між рівнем безробіття та інфляцією часто описується кривою Філіпса (рис. 7.4) [1].

Нижчий рівень безробіття асоціюється з вищим тиском на заробітну плату, що може сприяти інфляційним тенденціям. Філіпс показав зв'язок між рівнем безробіття і темпами зростання середньої заробітної плати.

У період зростання економіки та скорочення рівня безробіття темп інфляції підвищується, і навпаки. Безробіття високе, коли заробітна платня зростає повільніше, і безробіття спадає, коли заробітна платня зростає швидше.

Високий рівень інфляції зазвичай супроводжується низьким рівнем безробіття і навпаки:

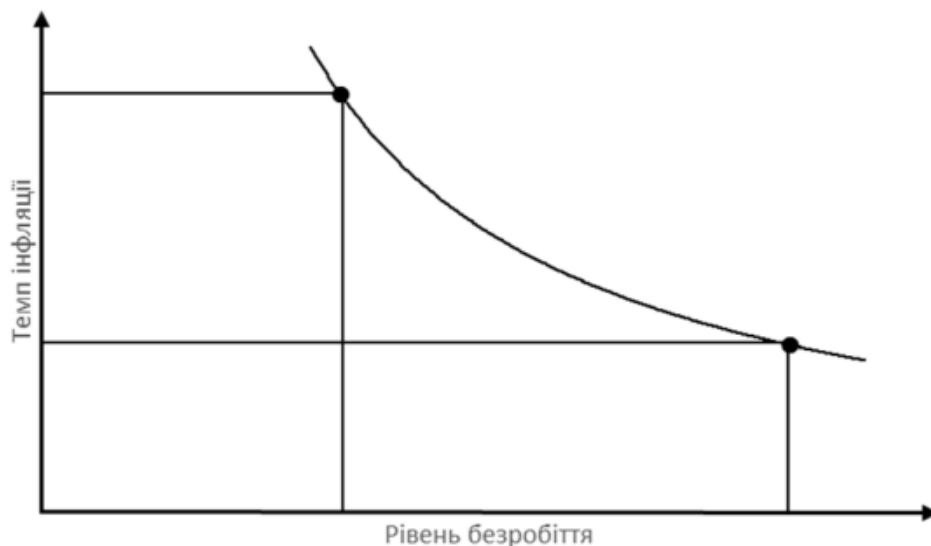


Рисунок 7.4 – Крива Філіпса

Крива Філіпса показує, що між рівнем безробіття та темпом інфляції існує обернений зв'язок, який означає, що в період зростання економіки та скорочення рівня безробіття темп інфляції підвищується, і навпаки.

Кейнсіанці пояснюють одночасність появи більш високих темпів безробіття та інфляції зміщенням кривої Філіпса праворуч або вгору як наслідок шоку пропозиції (або цінових шоків). Повна зайнятість змушує ціни та заробітну плату до зростання; значне безробіття та незавантаженість потужностей спонукає їх до зниження. Рівень зайнятості – причина, рух цін та заробітної плати – наслідок. Не зважаючи на те, що повна зайнятість спричиняє інфляцію, зовсім не впливає те, що інфляція викликає повну зайнятість.

У довгостроковому періоді ця крива взагалі стає вертикальною прямою, інакше кажучи, показує відсутність залежності між рівнем інфляції π і природним рівнем безробіття:

$$\pi = \pi_e - \beta(U - U_n) + \pi_s ,$$

де π_e – очікуваний темп інфляції;

π_s – темп інфляції, спричинений збуреннями сукупної пропозиції;
($U - U_n$) – циклічне безробіття;
 β – коефіцієнт, який показує реакцію інфляції на динаміку циклічного безробіття, яке спричинюється збуреннями сукупного попиту.

Спробуємо застосувати цю теорію для вивчення інфляційних процесів України в довгостроковому періоді.

Побудуємо графік залежності рівня інфляції від безробіття, щоб визначити ступінь цього зв'язку. Візьмемо дані за період 2010 – 2022 рр. На рис. 7.5 продемонстровано графік, на якому видно, що кореляція між такими показниками є надзвичайно слабкою.

Якщо відкинути дані 2022 р. з координатами (21,1; 26,6), то точки групуються навколо вертикальної прямої, що і стверджує теорія Філіпса для довгострокового періоду, тобто залежність між рівнем інфляції і природним рівнем безробіття у довгостроковому періоді майже відсутня [1].

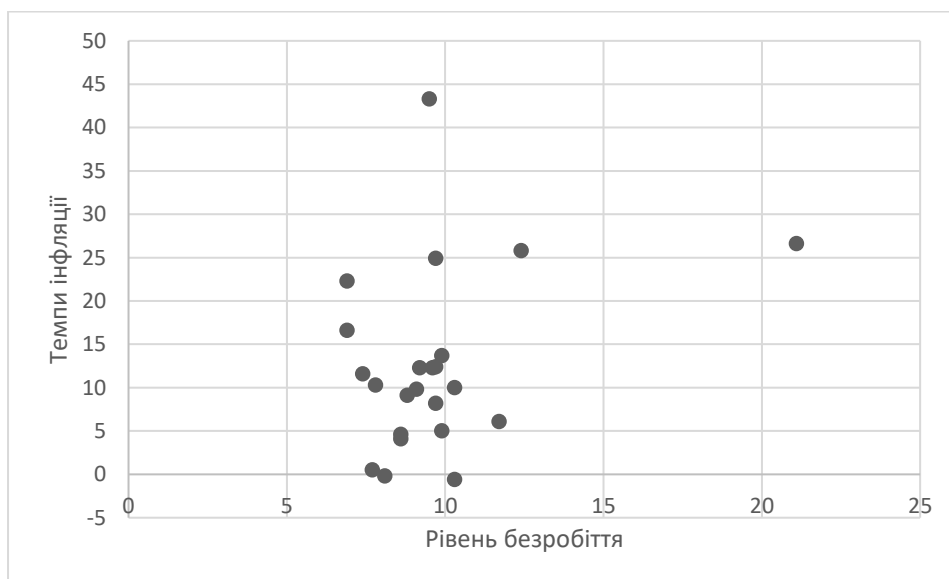


Рисунок 7.5 – Крива Філіпса за період 2010-2022 рр.

3.2) зростання заробітної плати, особливо якщо воно випереджає зростання продуктивності праці, може призвести до збільшення виробничих витрат підприємств. Якщо ці підвищені витрати перекладаються на споживачів, це може сприяти інфляції;

4) глобальні економічні чинники:

– обмінні курси: зміна обмінного курсу може впливати на ціни імпортованих товарів та послуг. Знецінення національної валюти може призвести до зростання цін на імпорт, що сприятиме інфляції;

– ціни на сировинні товари: коливання цін на сировинні товари, такі як нафта та продукти харчування, можуть мати значний вплив на інфляцію. Зрос-

тання цін на сировинні товари часто призводить до збільшення виробничих витрат і зростання споживчих цін.

Щоб з'ясувати силу впливу цього показника на рівень інфляції, побудуємо графік такої залежності. На рис. 7.6 продемонстровано графік залежності рівня інфляції від індексу цін виробників⁴.

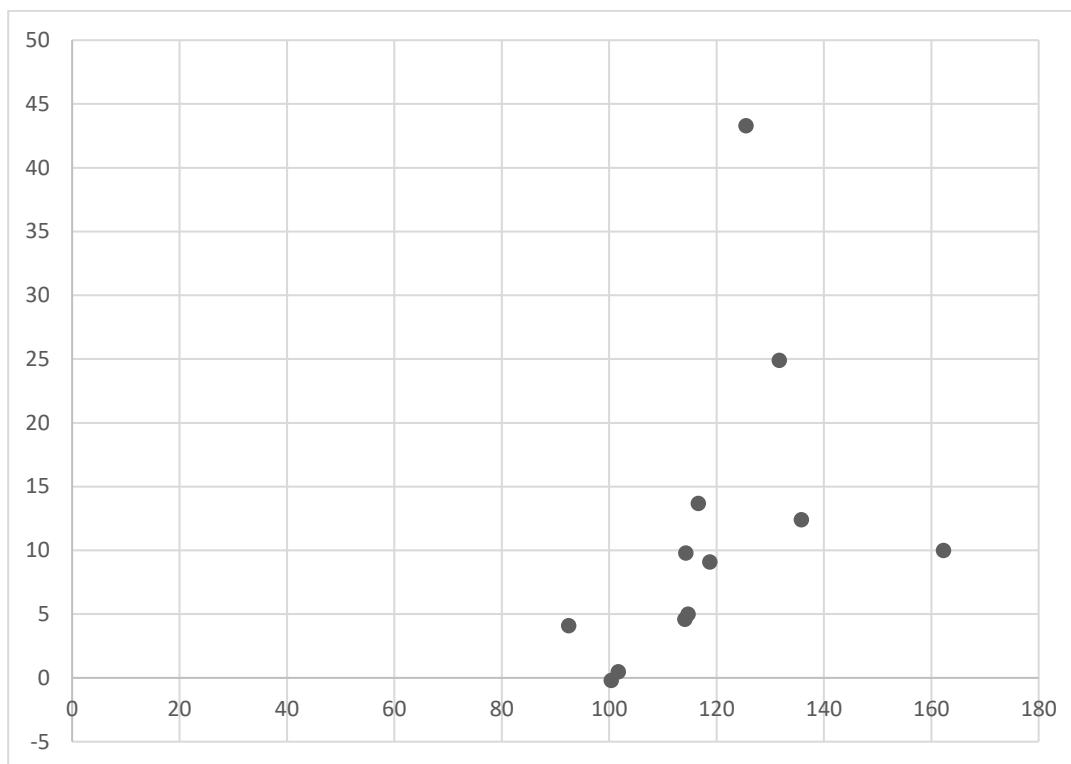


Рисунок 7.6 – Графік залежності рівня інфляції від зміни індексів цін виробників за 2010-2021 рр.

Аналізуючи графік залежності, поданий на рис. 7.6, можна побачити, що вплив зміни індексів цін виробників на рівень інфляції є статистично незначимим.

7.3 Побудова кореляційно-регресійної моделі для оцінювання впливу рівня безробіття на рівень інфляції в Україні

Розглянемо ретельно вплив на рівень інфляції рівня безробіття, оскільки:

– рівень безробіття часто слідує за економічними циклами. У періоди економічного піднесення безробіття має тенденцію до зниження, а під час рецесії – до зростання;

– динаміка кривої Філіпса: крива Філіпса ілюструє зворотний зв'язок між інфляцією та безробіттям. Згідно з цією концепцією, періоди низького безро-

⁴ індекс цін виробників – показник середнього рівня зміни оптових цін на сировину, матеріали та товари проміжного споживання, за якими продають свої товари національні виробники

біття можуть бути пов'язані з вищою інфляцією, і навпаки. Перевіримо це твердження на прикладі української економіки.

Розглянемо дані, наведені у табл. 7.1⁵.

Таблиця 7.1 – Рівень інфляції та рівень безробіття в Україні

Рік	y_i	x_i
2010	9,10	8,80
2011	4,60	8,60
2012	-0,20	8,10
2013	0,50	7,70
2016	12,40	9,70
2017	13,70	9,90
2018	9,80	9,10
2021	10,00	10,30

У табл. 7.1 факторною ознакою x_i є рівень безробіття, а результуючою – y_i – рівень інфляції. Щоб вибраний варіативний ряд даних був статистично придатним, було розглянуто ті роки, що відображають сталу тенденцію розвитку країни.

Таким чином, роки з різкою дестабілізацією економіки країни, спричиненої початком російської агресії на Донбасі у 2014, 2015 рр., власне, як і початок пандемії коронавірусу в 2019, 2020 рр. не варто брати до такої вибірки даних.

Отже, побудуємо графік залежності рівня інфляції від безробіття (рис. 7.7).

Згідно з рис. 7.7, очевидно, що теорія Філіпса не підтверджується для цього періоду, оскільки зі збільшенням рівня безробіття не відбувається зменшення рівня інфляції. Це можна пояснити тим, що існують більш вагомні чинники впливу на рівень інфляції в Україні. Отже, теорія Філіпса не дає пояснення інфляційних процесів в Україні, оскільки вона розглядається лише як функція від одного чинника – безробіття. Ігнорування інших причин інфляції не дозволяє пояснити феномен стагфляції. Разом із тим, цей чинник було розглянуто у дослідженні, оскільки інфляційне таргетування не мало на нього такого впливу, як на інші чинники, а саме на монетарні.

Для оцінювання впливу на рівень інфляції показника безробіття розглянемо статистичні дані у табл. 7.1.

⁵ Джерело: звітність Міністерства фінансів України.

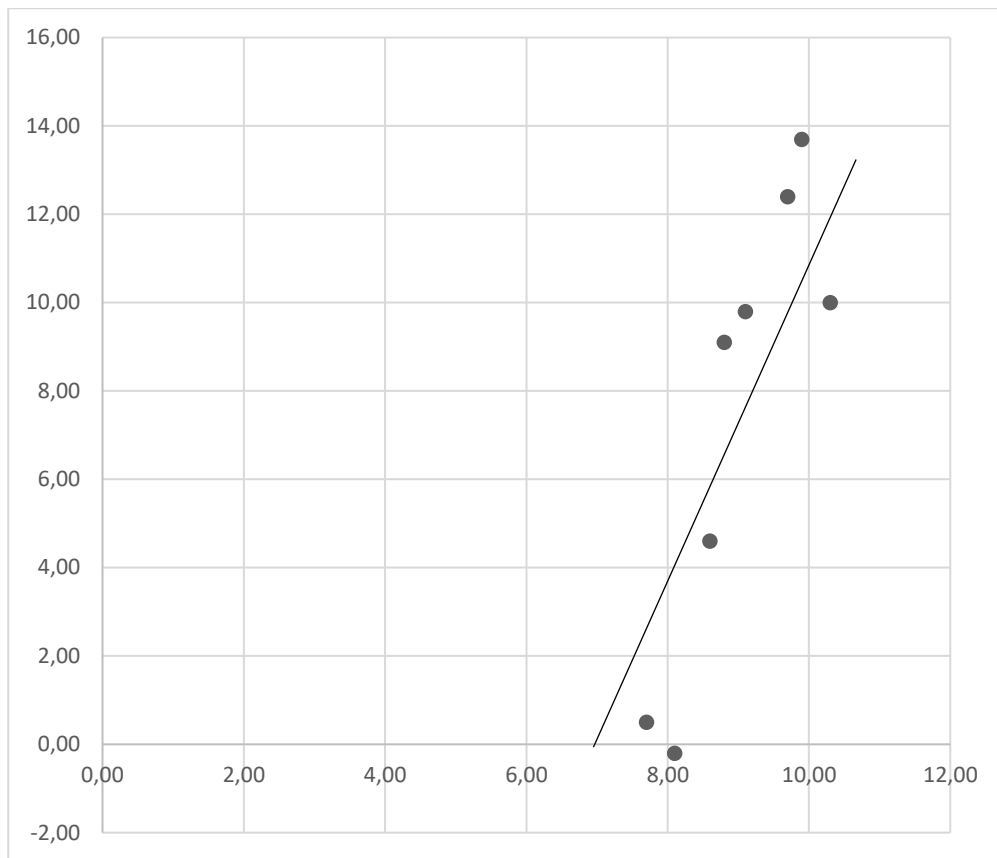


Рисунок 7.7 – Апроксимація даних залежності рівня інфляції від рівня безробіття

Згідно з рис. 7.7 можна зробити припущення, що така залежність буде лінійною, тому опишемо її рівнянням простої лінійної регресії:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon,$$

де y_i – рівень інфляції;
 x_i – рівень безробіття;
 β_0, β_1 – параметри моделі;
 ε – стохастична змінна.

Обов'язковим етапом побудови моделі є перевірка статистичних даних на:

1) відсутність автокореляції: явище кореляції значень результуючої змінної, що виникає унаслідок залежності значень випадкової величини у різних спостереженнях.

2) відсутність гетероскедастичності: одним з основних припущень моделі класичної лінійної регресії є припущення про сталість дисперсії кожної випадкової величини (гомоскедастичність). Якщо це припущення не задовольняється у якомусь окремому випадку, то має місце гетероскедастичність.

Отже, спочатку визначимо, чи задовольняють дані вимогам застосування методу найменших квадратів.

Дані для побудови лінійної однофакторної моделі подано у табл. 7.2.

Таблиця 7.2 – Дані для побудови лінійної однофакторної моделі

Рік	y_i	x_i	\hat{y}_i	$e_i = y_i - \hat{y}_i$
2010	9,10	8,80	6,33	2,77
2011	4,60	8,60	5,30	-0,70
2012	-0,20	8,10	2,72	-2,92
2013	0,50	7,70	0,66	-0,16
2016	12,40	9,70	10,97	1,43
2017	13,70	9,90	12,00	1,70
2018	9,80	9,10	7,87	1,93
2021	10,00	10,30	14,06	-4,06
Σ	59,90	72,20	59,90	0,00
$\Sigma/8$	7,49	9,03		

Отже, на базі даних табл. 7.2, отримаємо таке рівняння лінійної залежності:

$$y_i = -39,0439 + 5,1558x_i + \varepsilon.$$

Щоб перевірити цю модель на наявність або відсутність автокореляції, було використано два методи: графічний та метод тестування автокореляції за критерієм Дарбіна-Уотсона.

Спробуємо спочатку визначити наявність цього явища кореляції за допомогою графічного методу. Для цього спершу розрахуємо оцінене значення результуючої ознаки та відхилення за даними табл. 7.2. Подамо послідовно-часовий графік, що зображає випадкові відхилення e_t в моменти часу t на рис. 7.8.

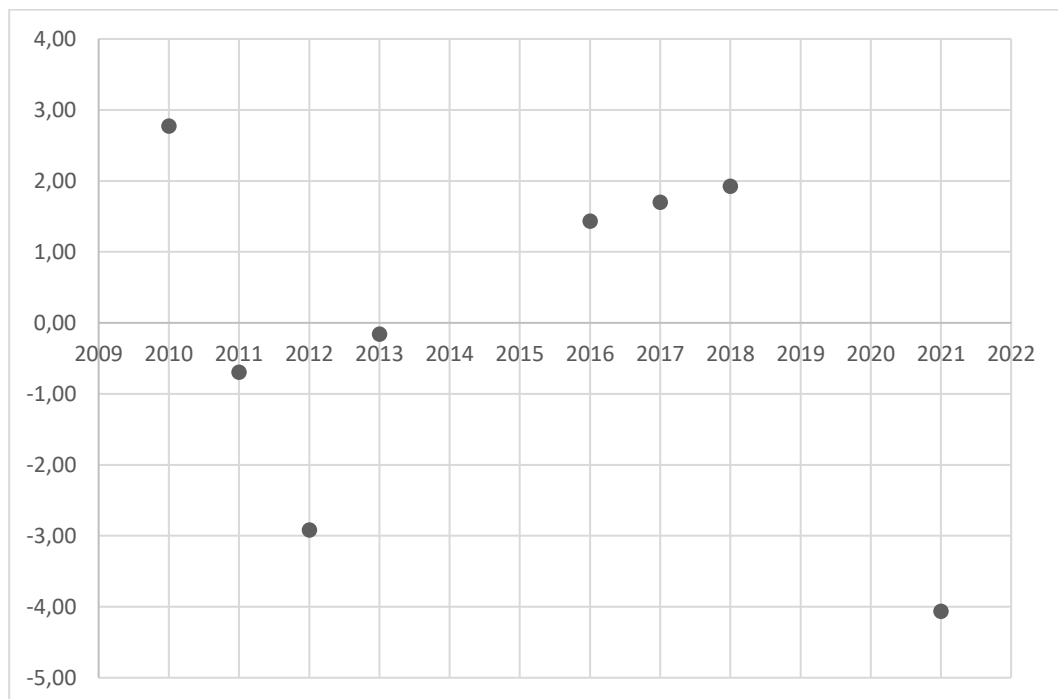


Рисунок 7.8 – Послідовно-часовий графік випадкових відхилень

На рис. 7.8 можемо бачити відсутність залежності між випадковими відхиленнями e_t .

Розглянемо графік залежності e_t від e_{t-1} , що зображено на рис. 7.9.

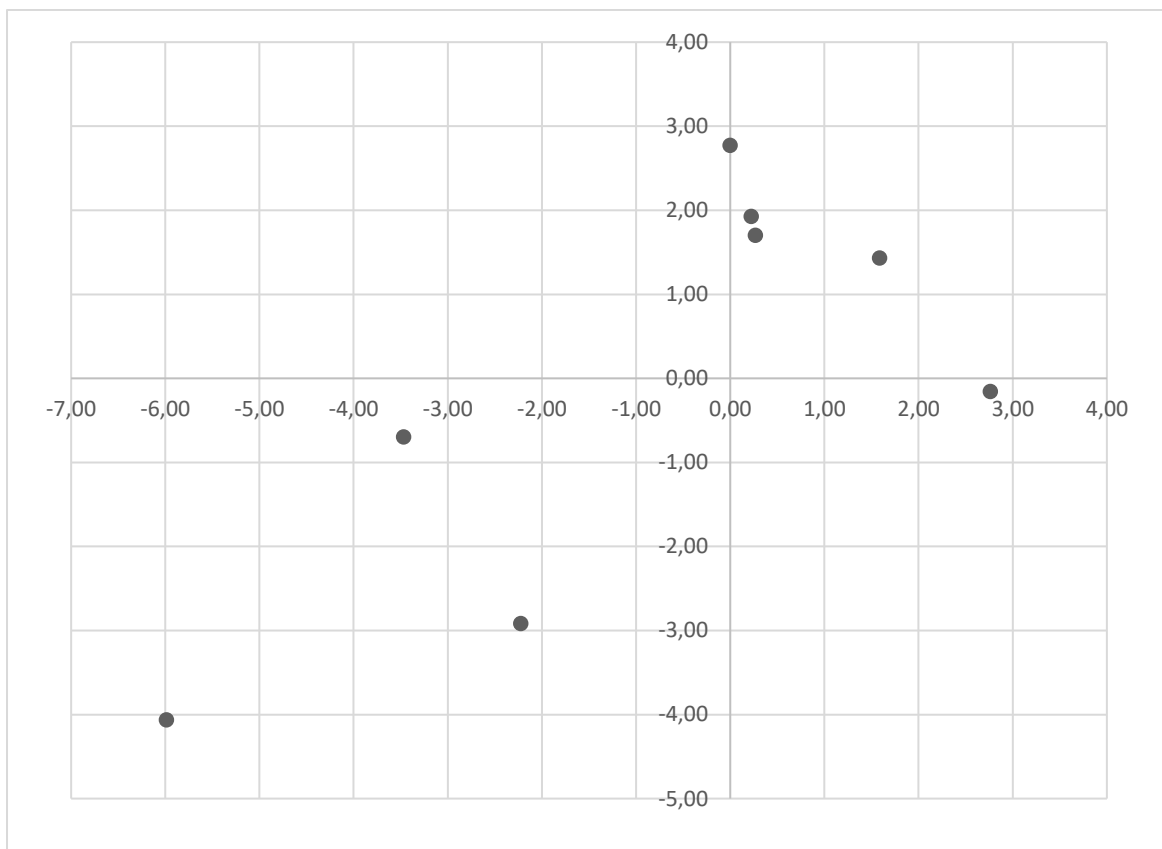


Рисунок 7.9 – Залежність поточних значень e_t відхилень від попередніх e_{t-1}

Для тестування автокореляції застосуємо Критерій Дарбіна-Уотсона. Для цього складемо відповідну допоміжну табл. 7.3.

Таблиця 7.3 – Дані для тестування автокореляції

$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$(e_i - e_{i-1})^2$	e_i^2
2,77	0	7,687109
-0,70	12,0327976	0,48479
-2,92	4,93764296	8,516763
-0,16	7,63049676	0,02434
1,43	2,52277024	2,051509
1,70	0,07227081	2,893882
1,93	0,05047695	3,708752
-4,06	35,8442426	16,4933
0,00	63,0906979	41,86044

Розрахуємо коефіцієнт Дарбіна-Уотсона (DW) для нашої лінійної однофакторної моделі:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^T e_t^2}. \quad DW = \frac{63,09069}{63,09069} = 1,507.$$

У таблиці розподілу Дарбіна-Уотсона для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та кількості спостережень $n = 8$ значення критичної точки $du = 1,33$. Оскільки розраховане значення $1,507$ знаходиться в межах $du \leq DW \leq 4 - du$, тобто $1,33 \leq DW \leq 2,67$, то, з імовірністю $p = 0,95$, можна стверджувати, що у вибірковій сукупності автокореляція відсутня.

Для тестування гетероскедастичності було вибрано два методи: графічний та метод рангової кореляції Спірмена.

Перевіримо наявність гетероскедастичності даних для побудованої моделі графічним методом. Впорядкувавши дані по x_i та \hat{y}_i за зростанням, відобразимо їх залежності від квадрата залишків на рис. 7.10 та рис. 7.11.

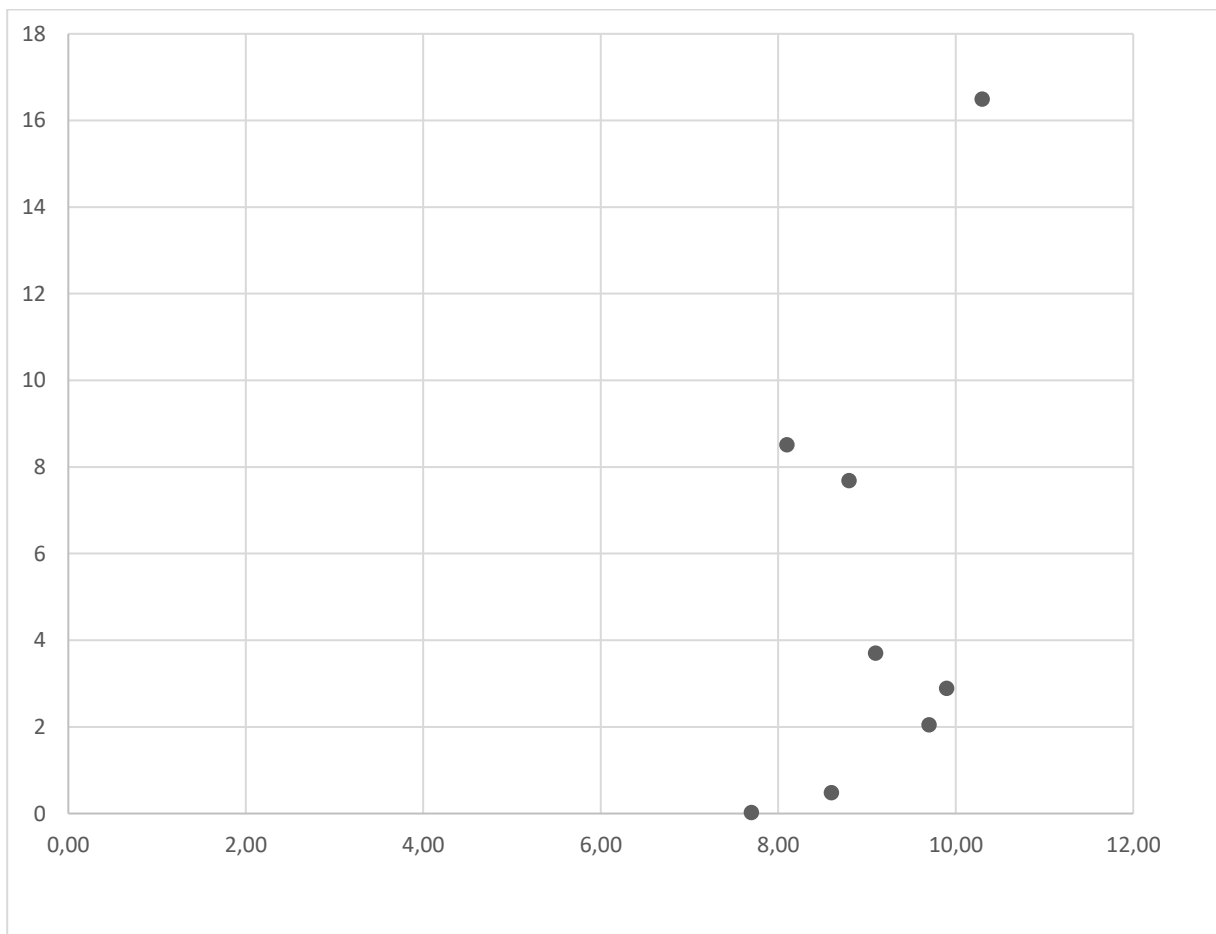


Рисунок 7.10 – Залежність впорядкованої факторної ознаки від залишків

Проаналізувавши дані графіки, можна зробити висновок, що на жодному з них немає залежності між квадратом залишків та ознаками (факторною та оціненою). Це означає, що гетероскедастичність відсутня.

Перевіримо також наявність гетероскедастичності за більш точним – аналітичним методом, а саме тестом рангової кореляції Спірмена.

Для розрахунку коефіцієнта рангової кореляції Спірмена було проведено ранжування впорядкованих за зростанням даних щодо факторної ознаки та залишків та занесено їх до табл. 7.4.

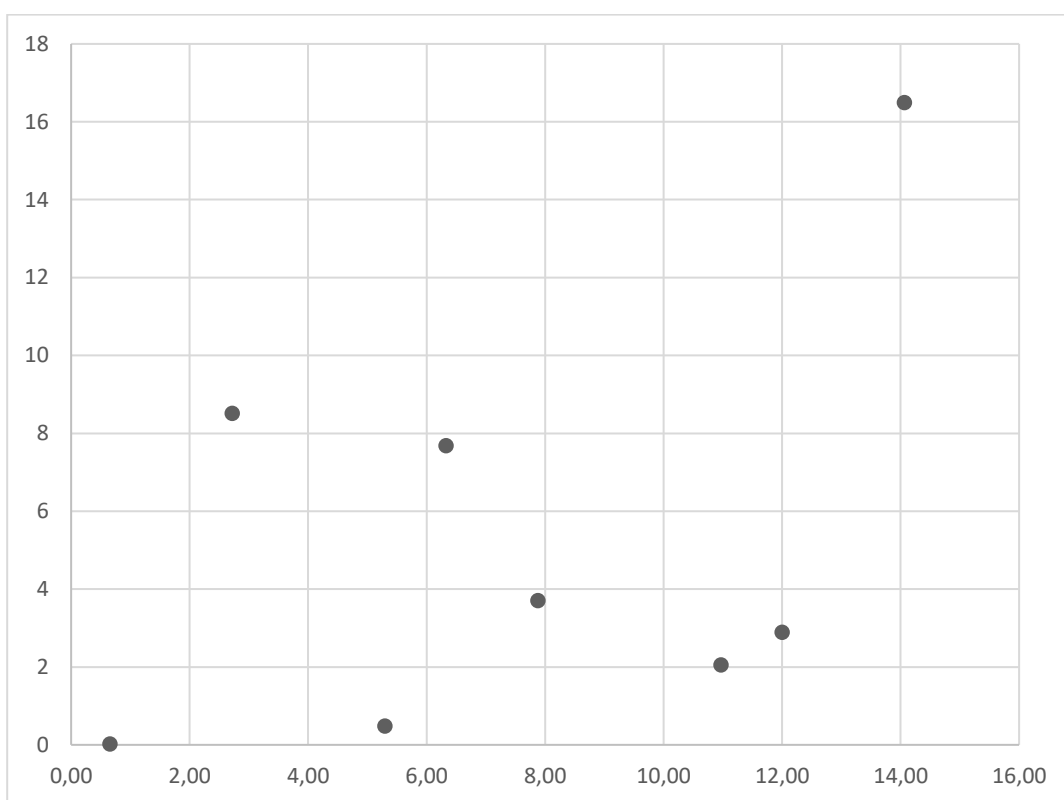


Рисунок 7.11 – Залежність впорядкованої оціненої ознаки від залишків

Таблиця 7.4 – Дані для розрахунку тесту Спірмена

x_i	Ранг	e	Ранг e	d_i	d_i^2
7,70	1	0,16	1	0	0
8,10	2	2,92	7	5	25
8,60	3	0,70	2	-1	1
8,80	4	2,77	6	2	4
9,10	5	1,93	5	0	0
9,70	6	1,43	3	-3	9
9,90	7	1,70	4	-3	9
10,30	8	4,06	8	0	0
Σ	36		36	0	48

На базі даних табл. 7.4 розрахуємо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена так [2]:

$$r_{x,e} = 1 - 6 \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)}. \quad r_{x,e} = 1 - 6 \frac{48}{8(64-1)} = 0,42857.$$

Отже, зв'язок між випадковим відхиленнями та факторною ознакою є слабким.

Використаємо t -статистику для перевірки нульової гіпотези H_0 :

$$t = \frac{r_{x,e} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,e}^2}} = \frac{0,43 \sqrt{8-2}}{\sqrt{1-0,43^2}} = 1,1618.$$

Порівняємо табличне значення $t_{кр}$ за ступеня вільності $df = 8-2 = 6$ (для кількості спостережень $n = 8$) із розрахованим значенням t . Табличне значення (для рівня значимості 0,5) становить $t_{кр} = 1,72$. Оскільки $t < t_{кр}$, то H_0 гіпотеза про нульове значення коефіцієнта рангової кореляції $\rho_{x,e}$ справджується (коефіцієнт рангової кореляції є статистично незначимим), тобто гетероскедастичність залишків регресійної моделі є відсутньою.

Згідно з попередніми розрахунками, ми виявили, що автокореляція та гетероскедастичність в цій лінійній моделі відсутні. Отже, застосування в цьому випадку методу найменших квадратів для побудови однофакторної лінійної регресійної залежності впливу безробіття на рівень інфляції було коректним.

Для перевірки адекватності побудованої моделі, визначимо коефіцієнт детермінації [2]:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{151,39}{193,25} = 0,78.$$

Оскільки, $D = 0,78 > 0,55$, то побудована лінійна однофакторна модель є адекватною. Отже, рівень інфляції в короткостроковій перспективі залежить на 78% від рівня безробіття і на 22% – від інших чинників впливу.

Розрахувавши коефіцієнт кореляції $R=0,8851$ ($R=\sqrt{D}$), можна сказати, що зв'язок між факторною та результуючою ознаками є прямим і щільним. Отже, в короткостроковій перспективі, у роки, коли немає серйозних економічних потрясінь та інфляційних викликів, рівень інфляції суттєво пов'язаний зі зміною рівня безробіття.

Розрахуємо коефіцієнт еластичності для цієї залежності, щоб визначити на скільки відсотків зміниться рівень інфляції за рахунок зміни рівня безробіття на 1% :

$$E = b_1 \cdot \frac{\bar{x}_t}{\bar{y}_t}; \quad E = 5,16 \cdot \frac{72,2}{59,9} = 6,21455.$$

Отже, при зростанні рівня безробіття в Україні на 1% рівень інфляції зростає на 6,21% [2].

На основі проведених досліджень було виявлено, що рівень безробіття в короткостроковій перспективі (без урахування років, що знаменували інфляційні виклики, спричинені маржинальними подіями в економіці) суттєво впливає на зміну рівня інфляції.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Азарова А., Єлісеєва О., Нікіфорова Л., Химич В. Кореляційно-регресійне моделювання впливу експорту, імпорту та індексу інфляції на рівень ВВП України. *Innovation and Sustainability*. 2024. №4. С. 43–54. <https://doi.org/10.31649/ins.2024.4.43.54>
2. Азарова А. О., Краєвська А. С., Міронова Ю. В., Краус О. О. Кореляційно-регресійне моделювання впливу базових чинників на рівень інфляції в Україні. *Innovation and Sustainability*. 2024. № 1. С. 63–72. <https://doi.org/10.31649/ins.2024.1.63.72>
3. Азарова А., Нікіфорова Л., Рузакова О., Химич В. Економетричне моделювання впливу експортно-імпортних операцій на рівень ВВП України. *Herald of Khmelnytskyi National University. Economic Sciences*. 2024. № 336 (6). С. 363–369. <https://doi.org/10.31891/2307-5740-2024-336-57>
4. Азарова А. О., Лесько О., Міронова Ю., Гнатюк С. Оцінювання ефективності роботи маркетингового відділу засобами кореляційно-регресійного моделювання. *Modeling the development of the economic systems*. 2024. №4. С. 77–86. <https://doi.org/10.31891/mdes/2024-14-10>
5. Азарова А. О., Краус О. О. Ідентифікація чинників впливу на рівень інфляції в Україні засобами економетричного моделювання. Україна та світ: виміри сьогодення : кол. моногр. Харків : СГ НТМ «Новий курс», 2024. 220 с. С. 98–108. ISBN 978-617-7886-50-0.1.
6. Азарова А. О., Белякова К. С. Математичне моделювання процесів оцінювання фінансового стану підприємства. Управління інноваційним розвитком соціально-економічних систем : колективна монографія / під заг. ред. Храпкіної В. В., Пічик К. В.; Національний університет «Києво-Могилянська академія». К. : Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2024. [Підрозділ] 6.6. С. 648 – 666.
7. Azarova A., Solomoniuk I. Modeling of the process of estimating the influence of internal factors on price on the basis of the correlation-regression method least squares. *Innovation and entrepreneurship: collection of scientific articles*. Ajax Publishing, Montreal, Canada, 2020. P. 27–31. 208 p.
8. Азарова А. О., Азарова Л. Є., Міронова Ю. В., Соломонюк І. Л. Максимізація прибутку та оптимізація базових економічних показників виробництва із використанням кореляційно-регресійного моделювання. Існуюча практика та новітні тенденції в управлінні суб'єктами господарювання різних організаційно-правових форм : монографія / за ред. Л. М. Савчук, Л. М. Бандоріної. Дніпро : Пороги, 2020. С. 344 – 358. 480 с.
9. Економетрія : навчальний посібник із грифом МОНУ №1/11–7160 від 17.04.13. / Азарова А. О., Сачанюк-Кавецька Н. В., Роїк О. М., Міронова Ю. В. Вінниця : ВНТУ, 2014. 304 с.
10. Кобець В. М. Економетрика в RSTUDIO : навчальний посібник. Херсон : Видавництво «ОлдіПлюс», 2021. 132 с.
11. Доля В. Т. Економетрія : навч. посібник. Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. Х. : ХНАМГ, 2020. 171 с.

12. Кузьмічов А. І. Економетрія : навчальний посібник. К. : Вид-во «Ліра-К», 2020. 212 с.
13. Здрок В. В., Лагоцький Т. Я. Економетрія : підручник. К. : Знання, 2020. 541 с.
14. Мороз В., Диха М. Економетрія. К. : Центр навчальної літератури. 2019. 206 с.
15. Кузьменко О., Козьменко О. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика). Суми : Видавництво «Університетська книга», 2019. 406 с.
16. Кузьменко О. Економіко-математичне забезпечення функціонування перестрахового ринку. Суми : Видавництво «Університетська книга», 2019. 430 с.
17. Лугінін О. Є. Економетрія. Навч. пос. 2-е видання, перероб. та доп. К. : Центр учбової літератури, 2018. 278 с.
18. Кузьмічов А. І., Медведєв М. Г. Економетрія. Моделювання засобами MS Excel : навчальний посібник. К. : Вид-во «Ліра-К», 2017. 212 с.
19. Навігатор по дисципліні «Економетрія» https://iq.vntu.edu.ua/b04213/html/nlr/nlr.php?card_id=60306&id=606&renum=1
20. Курс Датааналітик. Вступ до Excel. URL: <https://osvita.diiia.gov.ua/courses/data-analyst-excel> (дата звернення: 02.10.24).
21. Курс «Аналіз даних та статистичне виведення на мові R» на платформі Прометеус. URL : <https://prometheus.org.ua/prometheus-free/data-analysis-statistics/> (Дата звернення 16.05.24).
22. Курс «Word та Excel: інструменти і лайфхаки». URL: <https://prometheus.org.ua/prometheus-free/word-excel-instrumenty-lifhaku/>(дата звернення: 20.05.24).

Електронне навчальне видання

Анжеліка Олексіївна Азарова

ЕКОНОМЕТРІЯ. КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Конспект лекцій

Рукопис оформила *А. Азарова*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 30.12.2024 р.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2024-211.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

Email: rvv.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.