

Р. Н. Квєтний, д. т. н., проф.; В. Ю. Дементьєв

ТРИГОНОМЕТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КУБІЧНИХ ЕРМІТОВИХ СПЛАЙНІВ

У статті пропонується нове тригонометричне представлення кубічних ермітових сплайнів, яке дозволяє отримати точніший результат інтерполяції порівняно з існуючими сплайн-методами. Такі результати досягаються для майже періодичних, квазіперіодичних функцій та функцій вібраційного резонансу. Наводиться короткий огляд методів сплайн-інтерполяції та тригонометричної інтерполяції. У статті аналізуються переваги та галузі застосування запропонованого тригонометричного методу інтерполяції. Розглядаються похибки результатів інтерполювання тестових функцій при застосовуванні розробленого та існуючих сплайн-методів інтерполяції.

Ключові слова: інтерполяція, сплайни, тригонометрична інтерполяція, майже періодичний, квазіперіодичний, вібраційний резонанс.

Вступ

Постійний розвиток апаратного забезпечення в сучасному технологічному та інформаційному світі вимагає створення і впровадження нових ефективних методів та моделей обробки і представлення даних. Це стосується всіх галузей сучасної науки. Ця стаття покликана удосконалити та розширити застосування інтерполяції сплайнами. В статті пропонується новий метод інтерполяції тригонометричними сплайнами для обробки дискретних даних, застосування якого для майже періодичних та квазіперіодичних функцій дозволить отримати точніші результати порівняно з іншими методами.

Одне з цікавих явищ у математиці та теоретичній фізиці, що відносно нещодавно почало досліджуватися, – це вібраційний резонанс (ВР). ВР – квазіперіодичний рух (функція), що представляється як зміна динамічної системи і характеризується об'єднанням кінцевої кількості (два чи більше) несумісних сигналів. Під несумісністю автори розуміють періодичні сигнали, що кардинально відрізняються за амплітудою та частотою. ВР виникає при подачі на вхід нелінійної системи двох різних періодичних сигналів (потужного та слабкого). У цьому випадку слабкий сигнал із низькою частотою може бути підсилений потужним високочастотним сигналом. ВР подібний до стохастичного резонансу (СР), в якому високочастотний сигнал замінюють шумом [1]. Потрібно відзначити, що системи з комбінацією сигналів двох різних частот зустрічаються у таких галузях як зв'язок, акустика [2], нейробіологія [3], лазерна фізика [4] та ін. Тому задача точної обробки та представлення квазіперіодичних функцій є актуальною [5 – 8].

Огляд сучасних методів інтерполяції сплайнами

Інтерполяція – процес розрахунку проміжних значень невідомої функції, яка задана сіткою дискретних значень. Інтерполяція сплайнами – один з методів інтерполяції, який полягає в представленні невідомої функції між сусідніми точками дискретної сітки поліномом цілого степеня [9]. У цьому підрозділі наводиться короткий огляд сучасних методів інтерполяції сплайнами для кращого розуміння їх значення в теорії обробки дискретних даних та розуміння напрямків розвитку сучасної теорії сплайн-інтерполяції. З-поміж сучасних видів інтерполяції сплайнами можна виділити такі види.

Сплайни з автоматичною зміною коефіцієнтів напруженості

Вперше сплайни з постійним коефіцієнтом напруженості були опубліковані Швейкертом Наукові праці ВНТУ, 2011, № 2

(Schweikert) у 1966 році. Пізніше Ренка (Renka) у 1987 році запропонував інтерполяцію з використанням гіперболічних функцій. Для кожного інтервалу між сусідніми заданими точками розраховується мінімальний коефіцієнт напруженості, при якому виконуються умови неперервності першої та другої похідної у вузловій точці інтерполяції [10].

Ермітові сплайни

На кожному відрізку результуюча крива є поліномом третього степеня, який будується на основі заданих кутів нахилу (похідних) у вузлових точках та умов проходження поліному через вузлові точки. Кожний інтервал нормалізується до змінної $t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$, $t \in [0, 1]$.

Поліном ермітового сплайну для відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ запишеться як:

$$S_i(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)y_i + (t^3 - 2t^2 + t)m_i + (-2t^3 + 3t^2)y_{i+1} + (t^3 - t^2)m_{i+1},$$

де m_i, m_{i+1} – значення похідних у вузлових точках (x_i, y_i) та (x_{i+1}, y_{i+1}) відповідно. Для розрахунку значень m_i використовують як точні, так і наближені методи (сплайн Catmull-Rom).

В-сплайни (Basic splines)

Розроблені та опубліковані в 1970-тих роках на основі сплайнів Без'є. Сплайни Без'є записуються виразом:

$$P_0 f_0(t) + P_1 f_1(t) + P_2 f_2(t) + P_3 f_3(t),$$

де $f_i(t), i = \overline{0, 3}$ – функції переходу, які визначають ступінь впливу точки на результуючу криву. Для кривих Без'є використовується поліном Бернштейна [11]. P_0, P_3 – точки початку та кінця кривої. P_1, P_2 – точки, що визначають форму результуючої кривої, але не лежать на ній.

NURBS-сплайни (Non-Uniform Rational Basis Spline)

Основна перевага NURBS-сплайнів – це можливість точного представлення кривих та конічних поверхонь [12]. Сплайни NURBS дають можливість записати як криві, так і поверхні з урахуванням форми, фізичних (геометричних) чи параметричних (математичних) вимог неперервності. NURBS-крива будується не тільки на основі вузлових точок, але і з урахуванням вагових коефіцієнтів (визначається для кожної вузлової точки). Загальна формула NURBS-сплайнів записується:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)},$$

де ω_i – вагові коефіцієнти, P_i – вузлові точки, $N_{i,k}$ – нормалізовані базисні сплайн-функції степеня k .

Сплайни п'ятого порядку (Quintic Spline)

Створені для побудови плавної та стійкої до збурень базових точок кривої. Цей вид інтерполяції сплайнами має неперервні перші чотири похідні на кожному інтервалі (x_i, x_{i+1}) . На кожному відрізку інтерполювання функція сплайну запишеться таким виразом:

$$S(x) = y_i + B_i t + C_i t^2 + D_i t^3 + E_i t^4 + F_i t^5,$$

де $t = x - x_i$, $x_i \leq x < x_{i+1}$, $i = \overline{1, N}$. B_i, C_i, D_i, E_i, F_i – коефіцієнти сплайну [13].

Х-сплайни

Бланк (Blanc) та Шлік (Schlick) запропонували кардинально новий підхід у побудові сплайн-функцій [14]. Ідея полягає в тому, що кожна вузлова точка P_k впливає на чотири сегмента результуючої кривої, тому функція згладжування F_k не нульова на чотирьох послідовних інтервалах (F_k стає відмінною від нуля у вузлі t_{k-2} , максимальною в t_k та нульовою в t_{k+2}). Записуючи умови неперервності перших двох похідних у точці t_k для функцій згладжування F_{k-2} і F_{k+2} , Бланк та Шлік виводять таку формулу Х-сплайнів для відрізка $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, використовуючи базові точки $P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3}$:

$$C(t) = \frac{A_0(t)P_k + A_1(t)P_{k+1} + A_2(t)P_{k+2} + A_3(t)P_{k+3}}{A_0(t) + A_1(t) + A_2(t) + A_3(t)}, \quad (1)$$

де $A_0(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ – коефіцієнти, отримані з умов «перетину» двох функцій згладжувань F_{k-2} та F_{k+2} . Наведена формула Х-сплайнів (1) дозволяє виконати апроксимацію (результуюча крива не проходить через задані точки). Для інтерполювання Бланк та Шлік вводять додатковий параметр $s_k, k \in [0; 1]$. При $s_k = 1$ крива проходить відносно далеко від точки P_k , якщо $s_k = 0$, тоді крива точно проходить через P_k .

Огляд існуючих аналогів методу тригонометричної інтерполяції

Оскільки майже періодичні та квазіперіодичні функції формуються на основі суми періодичних сигналів, то природно перейти від поліноміальної форми запису сплайну до тригонометричної. В публікаціях, що пов'язані з інтерполюванням, досить часто використовуються тригонометричні функції для запису сплайнів. Проаналізуємо найбільш цікаві та вагомі з них.

Одним з найбільш поширених методів тригонометричної інтерполяції є застосування розкладання функції в ряд Фур'є [15]. Періодична функція $f(t) = f(t+T), \forall t \in (-\infty; \infty)$ використовуючи перетворення в ряд Фур'є, запишеться як

$$f(t) \approx p_n(t) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j \cdot t) + b_j \sin(j \cdot t)), |a_n| + |b_n| \neq 0,$$

де n – кількість врахованих у ряді Фур'є доданків для інтерполяційної формули сплайну, T – період. Нехай період функції $T = 2\pi$ (обране значення легко змінюється через введення додаткового коефіцієнта). Тоді для опису всієї інтерполяційної функції достатньо задати сітку точок:

$$f(t_i) = p_n(t_i); i = 0, 1, 2, \dots, 2n; 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{2n} \leq 2\pi.$$

Використовуючи вищезгадані початкові дані, значення невідомих коефіцієнтів a_j та b_j розраховують за формулами:

$$a_j = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) \cos(j \cdot t_k); b_j = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(t_k) \sin(j \cdot t_k).$$

Основна галузь застосування тригонометричних сплайнів на основі ряду Фур'є – це періодичні функції. Використання цього методу інтерполяції для псевдо або не періодичних функцій не доцільно через низьку точність результатів порівняно із застосуванням кубічних

чи ермітових сплайнів.

Інший форма запису інтерполяції сплайнами з використанням тригонометричних функцій представлено в [16]. Такий метод інтерполяції запишеться як:

$$S_i(t) = y_i \left[1 - \frac{1 - \cos(\pi \cdot t)}{2} \right] + y_{i+1} \left[\frac{1 - \cos(\pi \cdot t)}{2} \right], t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, t \in [0;1], \quad (2)$$

де $S_i(t)$ – інтерполяційний поліном представлення функції на проміжку $[x_i; x_{i+1}]$. t – додаткова нормалізована змінна.

Хоча форма запису (2) є дуже простою, вона містить серйозний недолік – значення першої похідної інтерпольованої функції в точках основної сітки дорівнюють нулю. Такий недолік суттєво обмежує застосування цієї тригонометричної форми запису сплайну в практичних задачах.

У статті [17] Роберт Кауфман (Robert F. Kauffmann) пропонує розраховувати тригонометричний сплайн на основі чотирьох базових точок. Тригонометричний сплайн Роберта Кауфмана в матричній формі запишеться:

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\pi \cdot t/2)(\cos(\pi \cdot t/2) - 1) \\ \sin(\pi \cdot t/2)(\sin(\pi \cdot t/2) + 1) \\ \cos(\pi \cdot t/2)(\cos(\pi \cdot t/2) + 1) \\ \sin(\pi \cdot t/2)(\sin(\pi \cdot t/2) - 1) \end{bmatrix}; P_x = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \\ x_{i+3} \end{bmatrix}; P_y = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{bmatrix}; t \in [0;1]; \quad (3)$$

$$S_x(t) = P_x^T \cdot F; S_y(t) = P_y^T \cdot F.$$

У вираз (3) вводиться та використовується штучна змінна $t \in [0;1]$. Крім розрахунку значення інтерполяційної функції $S_y(t)$ також розраховується значення аргументу $S_x(t)$ на основі чотирьох точок сітки заданих значень P_x та P_y .

Цей тип сплайн-інтерполяції найкраще застосовувати при побудові кола чи інших кінцевих фігур. Недоліками сплайну є гірші інтерполяційні характеристики порівняно з кубічними чи ермітовими сплайнами; складність розрахунку значення інтерпольованої функції в заданій точці; неможливість виконати інтерпольовання на першому та останньому інтервалах сітки заданих значень.

У статті [18] пропонується інтерполяція з використанням модифікованих ермітових сплайнів. У роботі поліном ермітового сплайну на кожному відрізку інтерполяції пропонується замінити емпірично виведеними тригонометричними виразами (таблиця 1).

$$S_i(t) = f1(t) \cdot y_i + f2(t) \cdot y'_i + f3(t) \cdot y_{i+1} + f4(t) \cdot y'_{i+1}.$$

Таблиця 1

Порівняння виразів базових функцій ермітових та тригонометричних сплайнів

Оригінальні базові функції кубічного ермітового сплайну	Запропоновані тригонометричні вирази для базових функцій
$f1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1;$	$f1(t) = \cos(t)^2;$
$f2(t) = t^3 - 2t^2 + t;$	$f2(t) = \sin(t)^2;$
$f3(t) = -2t^3 + 3t^2;$	$f3(t) = 0,096225(\sin(3t) + \sin(t));$
$f4(t) = t^3 - t^2;$	$f4(t) = 0,096225(\cos(3t) - \cos(t));$
$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}; t \in [0,1].$	$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{\pi}{2}; t \in [0, \frac{\pi}{2}].$

Наведений варіант тригонометричного сплайну дозволяє для окремих псевдоперіодичних функцій точніше побудувати інтерполяційну функцію в порівнянні з кубічними ермітовими сплайнами та задати крайові початкові умови значеннями похідних високих порядків. Недоліками цього методу є емпіричне виведення виразів базових функцій та неможливість застосування таких сплайнів для загальних практичних задач.

Проведений огляд моделей тригонометричних сплайнів розкриває їх загальні недоліки – вузьку спеціалізацію методів та в деяких випадках складність алгоритмізації.

Основна задача цього дослідження – удосконалення процесу інтерполяції сплайнами, критерії досягнення якого полягають у підвищенні точності та швидкості отримання результатів для майже періодичних та квазіперіодичних функцій.

Основна мета дослідження – розробка нової моделі тригонометричної сплайн-інтерполяції, яка дозволить отримати точніший результат порівняно з іншими методами для майже періодичних та квазіперіодичних функцій без ускладнення обчислень.

Модель модифікованого тригонометричного сплайна

Нехай відомі значення функції $f(x)$ в заданих точках $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, n}$, $A = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = B$ та значення перших похідних в крайніх точках $f'(x_1) = R_1$, $f'(x_n) = R_n$. Для побудови модифікованого тригонометричного сплайну візьмемо вираз

$$S(t) = a + bt + c \cdot \cos(t) + d \cdot \sin(t), \quad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad t \in [0; \pi/2].$$

Змінна x між точками інтерполяційної сітки $[x_i; x_{i+1}]$ нормується до змінної t . Знайдемо невідомі коефіцієнти a, b, c, d , виразивши їх через значення функції та її похідних R_i та R_{i+1} в точках інтервалу інтерполяції x_i та x_{i+1} (рис. 1).

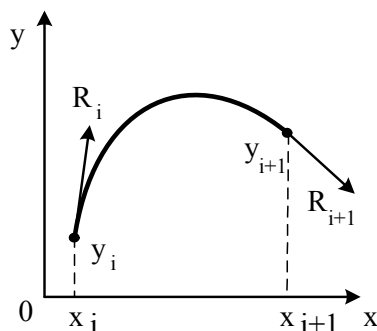


Рис. 1. Модель побудови тригонометричного сплайну

Розрахуємо $S(t)$ та $S'(t) = b - c \cdot \sin(t) + d \cdot \cos(t)$ для $t = 0$; $t = \pi/2$.

$$S(0) = a + c; \quad S'(0) = b + d;$$

$$S(\pi/2) = a + b \cdot \pi/2 + d; \quad S'(\pi/2) = b - c.$$

Запишемо попередній вираз у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pi/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\pi/2) \\ S'(0) \\ S'(\pi/2) \end{bmatrix} \text{ або } A \cdot K = S.$$

Перетворимо попереднє рівняння до вигляду $A^{-1} \cdot S = K$. Невідомі коефіцієнти a, b, c, d у матричному вигляді запишуться як:

$$\frac{1}{(\pi - 4)} \cdot \begin{bmatrix} \pi - 2 & -2 & 2 & \pi - 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -(\pi - 2) \\ 2 & -2 & \pi - 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\pi/2) \\ S'(0) \\ S'(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Підставимо отримані значення a, b, c, d до загального виразу сплайну $S(t)$.

$$\begin{aligned} S_i(t) = & \frac{-2t + 2\sin(t) + (\pi - 2) - 2\cos(t)}{\pi - 4} S(t_i) + \\ & + \frac{-2 + 2t + 2\cos(t) - 2\sin(t)}{\pi - 4} S(t_{i+1}) + \\ & + \frac{-2\cos(t) + 2 - 2t + \sin(t) \cdot (\pi - 2)}{\pi - 4} S'(t_i) + \\ & + \frac{-2t + (\pi - 2) - \cos(t) \cdot (\pi - 2) + 2\sin(t)}{\pi - 4} S'(t_{i+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Отриманий вираз і є модифікованим тригонометричним сплайном. Розглянемо його особливості. Побудуємо графіки для виразів, що є коефіцієнтами $S(t_i)$, $S(t_{i+1})$, $S'(t_i)$ та $S'(t_{i+1})$ на нормованому діапазоні зміни параметра $t \in [0; \pi/2]$ (рис. 2). Графіки базових функцій $f1(t)$, $f2(t)$, $f3(t)$ та $f4(t)$ подібні до графіків базових функцій, що використовуються в кубічних ермітових сплайнах.

Замість кубічного поліному в тригонометричних сплайнах використовуються функції $\sin(x)$ та $\cos(x)$. Комбінацією базових функцій із різними коефіцієнтами досягається необхідна форма результуючої інтерполяційної кривої.

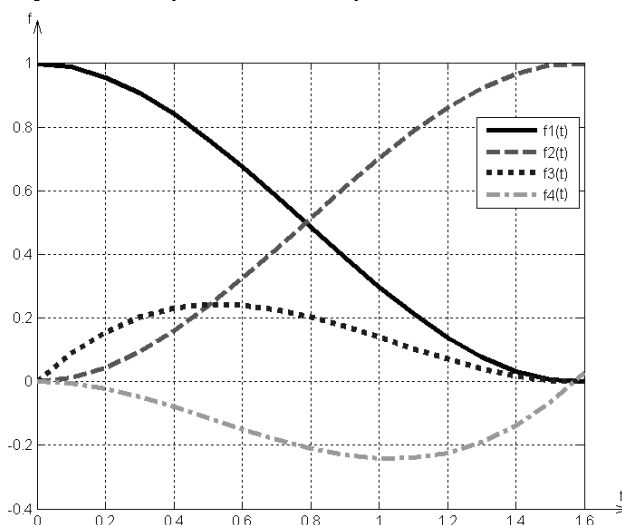


Рис. 2. Графіки базових функцій модифікованого тригонометричного сплайну

У модифікованих тригонометричних сплайнах умова рівності перших похідних наступного та попереднього сплайнів у точках інтерполяційної сітки виконується автоматично.

Для практичної перевірки розроблених сплайнів використовується наближений та точний методи розрахунку значень похідних функції у базових точках. У наближеному методі використовується така формула для оцінювання похідної в точці:

$$S'(t_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right); i = \overline{2; n-1}; S'(t_1) = R_1; S'(t_n) = R_n.$$

Для розрахунку похідних аналітичним (точним) методом використовувалась умова рівності другої похідної сусідніх сплайнів у точці базової сітки. В результаті отримуємо тридіагональну матрицю, для якої розроблені прості, швидкі та ефективні методи розв'язання.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pi-2 & 4 & \pi-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi-2 & 4 & \pi-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \pi-2 & 4 & \pi-2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1' \\ S_2' \\ S_3' \\ \dots \\ S_{n-1}' \\ S_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 2S(t_3) - 2S(t_1) \\ 2S(t_4) - 2S(t_2) \\ \dots \\ 2S(t_n) - 2S(t_{n-2}) \\ R_n \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де R_1, R_n – це крайові умови, значення першої похідної функції в першій та останній точці інтерполювання відповідно.

Тестування розроблених модифікованих тригонометричних сплайнів

Для тестування та порівняння результатів роботи з іншими методами інтерполяції запропоновані тригонометричні сплайни були реалізовані в математичному програмному пакеті Matlab. Для розрахунку похідних $S'(t_i)$ та $S'(t_{i+1})$ у формулі (4) формується та розв'язується система рівнянь (5), отримана з умов неперервності другої похідної в спільних точках двох сусідніх сплайнів.

У роботі виконано порівняння результатів інтерполяції тестових функцій (таблиця 2) розробленими тригонометричними, кубічними ермітовими та кубічними сплайнами. Критерієм точності вибрано середнє відхилення від заданої функції. Для тестування сплайн-методів було вибрано наступні види функцій:

1. Багаточлени;
2. Тригонометричні функції;
3. Дробово-раціональні функції;
4. Квазіперіодичні функції;
5. Квазіперіодичні функції вібраційного резонансу.

У роботі окрім функції вібраційного резонансу для тестування розроблених сплайнів розглянуто одну із квазіперіодичних функцій – θ функцію. Це аналітична функція двох змінних $\theta(z, \tau)$, яка визначається рядом:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z),$$

де $z \in \mathbb{C}$ та $\tau \in \mathbb{H}$ (\mathbb{H} – верхня півплощина $\text{Im}(\tau) > 0$). Як показано в [19] цей ряд абсолютно збігається на будь-якій компактній підмножині $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$. Квазіперіодичність θ функції проявляється при зсуві $z \rightarrow z + \tau$:

$$\theta(z + \tau, \tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \theta(z, \tau).$$

Тобто функція θ квазіперіодична відносно відліків $\Lambda_\tau \in \mathbb{C}$, створеній 1 та τ . Функція θ при зсуві на довільний елемент відліків задається формулою

$$\theta(z + a\tau + b, \tau) = \exp(-\pi i a^2 \tau - 2\pi i a z) \theta(z, \tau).$$

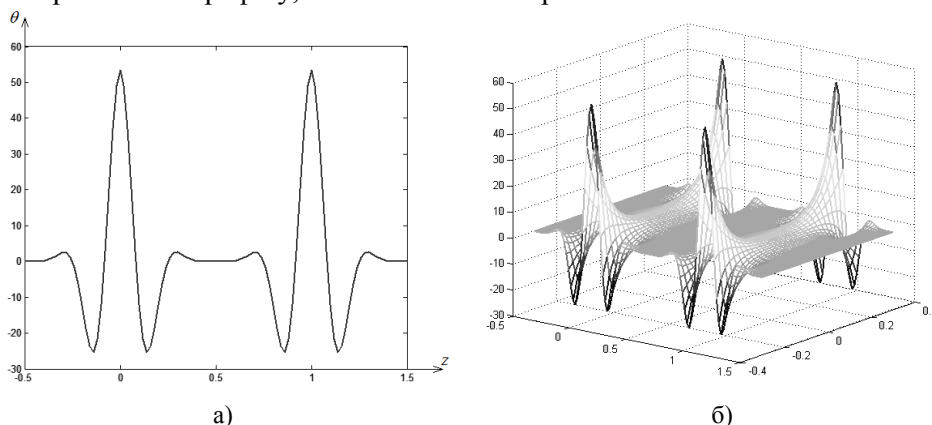
В таблиці наведено середні відхилення від тестових функцій в результаті сплайн-інтерполювання трьома методами. Відмічені комірки – кращий результат інтерполювання

Таблиця 2

Результати сплайн-інтерполювання тестових функцій трьома методами

#	Test function	Range [-4, 4] Base point step: 0.8			Range [-1, 4] Base point step: 1			Range [-1, 8] Base point step: 1.5		
		Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline	Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline	Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline
		1	$X^*X-1;$	0.2046	0.2503	0.0000	0.1879	0.1785	0.0000	0.0423
2	$0.5*X*X-2*X+5;$	0.1023	0.1267	0.0000	0.0940	0.0892	0.0000	0.0197	0.2304	0.0000
3	$X^3+X^2+X-1;$	1.2622	0.8164	0.0000	0.4503	1.0809	0.0000	1.0793	5.6380	0.0000
4	$\sin(X);$	0.0166	0.0547	0.0004	0.0213	0.0807	0.0017	0.0015	0.1306	0.0164
5	$\sin(X-5)/(X-5);$	0.0052	0.0133	0.0001	0.0085	0.0200	0.0006	0.2106	0.1919	0.2512
6	$5*\sin(2*(X-5))/(2*(X-5));$	0.0088	0.0859	0.0210	0.0757	0.1275	0.0983	1.1452	1.2725	1.3286
7	$\cos(X + \pi*\sin(X));$	0.0910	0.0767	0.0978	0.1812	0.1986	0.3667	0.5816	0.4872	0.5845
8	$X*X+6*X*\sin(2.35*X)-X;$	1.2789	2.1681	0.9252	0.8722	2.6891	1.8888	7.8886	10.6902	16.0174
9	$\exp(-X)*X-4*\sin(X)+X*fX$	3.6537	1.7549	0.1794	0.2180	0.5029	0.0251	0.0621	0.7292	0.1060
10	$X^3+X^2+X-0.1*X^4;$	1.2622	0.8017	0.0054	0.6073	0.7448	0.0244	0.0791	1.9092	0.0975
11	$\Theta(X);$	20.2603	16.5029	17.2130	51.6280	51.9296	51.9296	30.4656	29.8112	26.3949
12	$X-X^3+\cos(0.3*X)+10*\cos(3*X);$	1.6702	2.5697	2.2968	1.3421	1.7829	3.5551	7.4312	7.8747	8.3363

Для перевірки розроблених тригонометричних сплайнів використовувалась одновимірний θ функція, зображена на графіку, який показано на рис. 3а.

Рис. 3. Двовимірний та тривимірний графіки θ функції.

Висновки

Розроблено новий метод тригонометричної сплайн-інтерполяції, який на відміну від існуючих методів дозволяє підвищити точність інтерполювання при обробці майже періодичних дискретних даних. При створенні нового методу було використано модель побудови кубічного ермітового сплайну для зменшення кількості коефіцієнтів, що шукаються.

Розширено запропоновану одновимірну модель тригонометричної сплайн-інтерполяції для обробки двовимірних дискретних даних. Для розрахунку невідомих коефіцієнтів сплайну в роботі пропонується наближений та аналітичний підходи.

Виконано програмну реалізацію запропонованого методу в математичному програмному Наукові праці ВНТУ, 2011, № 2

пакеті Matlab. У роботі наведено результати інтерполяції тестових функцій як відомими так і розробленим методом. У результаті обробки отриманих даних зроблено висновок, що запропонований метод тригонометричної сплайн-інтерполяції має кращі інтерполяційні характеристики для майже періодичних функцій порівняно з іншими методами.

Подальше дослідження та розвиток задачі обробки майже періодичних функцій має відбуватися в напрямку збільшення вимірності (кількості незалежних змінних) та розширення практичних задач застосування розробленої моделі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Benzi R. The mechanism of stochastic resonance / R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1981. – Volume 14, Number 11. – P. 453 – 457.
2. Maksimov A. O. On the subharmonic emission of gas bubbles under two-frequency excitation / A. O. Maksimov // *Ultrasonics*. – 1997. – Volume 34, Number 35. – P. 79 – 86.
3. Victor J. D. Two-frequency analysis of interactions elicited by Vernier stimuli / J. D. Victor, M. M. Conte // *Visual Neuroscience*. – 2000. – Number 17. – P. 959 – 973.
4. Su D. C. Simple two-frequency laser / D. C. Su, M. H. Chiu, C. D. Chen // *Precision Engineering*. – 1996. – Volume 18. – P. 161 – 163.
5. Zaikin A. A. Vibrational resonance in a noise-induced structure / A. A. Zaikin, L. López, J. P. Baltanás, J. Kurths, M. A. Sanjuán // *Phys. Rev. E66*. – 2002. – Number 1. – P. 011106 (1 – 4).
6. Baltanás J. P. Experimental evidence, numerics, and theory of vibrational resonance in bistable systems / J. P. Baltanás, L. López, I. I. Blechman, P. S. Landa, A. Zaikin, J. Kurths, M. A. Sanjuán // *F. Phys. Rev. E67*. – 2003. – Number 6. – P. 066119 (1 – 7).
7. Casado-Pascual J. Effects of additive noise on vibrational resonance in a bistable system / J. Casado-Pascual, J. P. Baltanás // *Phys. Rev. E69*. – 2004. – Number 4, part 2. – P. 046108 (1 – 7)
8. Chizhevsky V. N. Vibrational resonance and the detection of aperiodic binary signals / V. N. Chizhevsky, G. Giacomelli // *Phys. Rev. E77*. – 2005. – Number 5. – P. 051126 (1 – 7).
9. Кветний Р. Н. Основи моделювання та обчислювальних методів / Р. Н. Кветний. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 150 с.
10. Renka R. J. Interpolatory tension splines with automatic selection of tension factors / R. J. Renka // *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*. – 1987. – Volume 8, Issue 3. – P. 393 – 415.
11. Farin G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design* / G. Farin. – San Diego: Academic Press., 1993. – 473 p.
12. Farin G. *NURB Curves and Surfaces: From Projective Geometry to Practical Use* / G. Farin. – PetersPress, 1995. – 229 p.
13. Herriot J. G. Procedures for Quintic Natural Spline Interpolation. Association for Computing Machinery / J. G. Herriot, C. H. Reinsch // *Transactions on Mathematical Software*. – 1976. – Volume 2, Number 3, September. – P. 281 – 289.
14. Blanc C. X-Splines: A Spline Model Designed for the End-User / C. Blanc, C. Schlick // *Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique*. – 1995. – Number 1. – P. 377 – 386.
15. Restrepo J. Introduction to scientific computing / J. Restrepo // *Numerical Analysis & Scientific Computing*. – 2001. – Number № 1. – P. 128 – 137.
16. Interpolation methods: [Електронний ресурс] / Paul Bourke // *Miscellaneous: projection, modelling, rendering* – 1999. – № 1. – P. 1. – Режим доступу до журн. : <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/miscellaneous/interpolation/>.
17. Kauffmann R. F. Implementing Uniform Trigonometric Spline Curves. Dobbs Portal / R. F. Kauffmann // *Architecture&Design*. – 2007. – Number 1. – P. 1 – 9.
18. Кветний Р. Н. Тригонометрична інтерполяція сплайнами / Р. Н. Кветний, В. Ю. Дементьев // *Вісник ВПІ*. – 2008. – № 5. – С. 67 – 68.
19. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях / Д. Мамфорд – М.: Мир. – 1988. – 448 с.

Кветний Роман Наумович – д. т. н., проф., завідувач кафедри автоматичної та інформаційно-виміральної техніки, E-mail: rkvetny@sprava.net.

Дементьев Віктор Юрійович – аспірант кафедри автоматичної та інформаційно-виміральної техніки. E-mail: victor.dementiev@gmail.com, тел: +38 096 45 98 112.

Вінницький національний технічний університет.