

М. М. Біляєв, д. т. н., проф.; О. К. Нагорна

## 3D-РОЗРАХУНОК ВЕРТИКАЛЬНОГО ВІДСТІЙНИКА НА БАЗІ CFD-МОДЕЛІ

*Розглянуто побудову чисельної моделі масопереносу у вертикальному відстійнику. Моделювання здійснено на основі тривимірного рівняння переносу домішки і моделі потенціального руху. Для чисельного інтегрування використано неявні різницеві схеми. Наведено результати обчислювального експерименту.*

**Ключові слова:** чисельне моделювання, вертикальний відстійник, седиментація, обчислювальний експеримент, різницеві схеми.

### Вступ

На сьогодні у світі активно розвиваються теоретичні методи розрахунку вертикальних відстійників. Це пов'язано з тим, що проведення експериментальних досліджень у цій галузі потребує багато часу на постановку експерименту, його проведення та обробку експериментальних даних. Крім цього, під час проведення експериментальних досліджень використовують високовартісну апаратуру, причому вимір параметрів, які цікавлять, відбувається без «впровадження» приладу в потік [1] (наприклад, система ADV – *Acoustic Doppler Velocity measurements* і т. і.), яку можуть дозволити собі не всі лабораторії. У зв'язку з цим фізичний експеримент не може служити щоденним інструментом для розв'язання тих завдань, які виникають на етапі проектування споруд або їхньої реконструкції. Для розрахунку цих споруд використовують такі групи моделей: балансові моделі [2, 3], регресійні [4], одновимірні кінематичні моделі переносу забруднювача в спорудах [5, 6, 7]. Ці моделі економічні і прості для практичного застосування. Однак серйозним недоліком перерахованих груп моделей є те, що вони не враховують геометричну форму відстійника або інші його конструктивні особливості (наприклад, переділ всередині споруди). Застосування одновимірних кінематичних моделей для розрахунку відстійників, які мають складну геометричну форму, – неможливе. Врахування геометричної форми відстійника може бути здійснено тільки з використанням 2D- або 3D-моделей. Застосування багатовимірних моделей вимагає обов'язкового розв'язання гідродинамічної задачі з визначення поля швидкості потоку всередині відстійника. За кордоном для розв'язання гідродинамічної задачі застосовують, як правило, модель в'язкої рідини (рівняння Нав'є – Стокса). Реалізація цієї CFD-моделі потребує застосування дуже дрібної сітки, що є причиною значних часових затрат на отримання результату. Крім цього, необхідно суворе обґрунтування моделі турбулентності, що застосовується, для розрахунку цього класу течій. Варто зазначити, що розрахунок відстійника на основі спеціалізованого коду, що реалізує CFD-модель, коштує за кордоном більше 20 тисяч доларів [8]. В Україні багатовимірні CFD-моделі для розрахунку вертикальних відстійників практично не розробляють. У зв'язку з цим, актуальною проблемою є розробка ефективних методів розрахунку вертикальних відстійників, що ґрунтуються на застосуванні CFD-моделей, які дозволяють оперативну, з малими фінансовими витратами розраховувати ці споруди, що мають складну геометричну форму.

**Метою** цієї роботи є розробка 3D-CFD-моделі масопереносу у вертикальному відстійнику, що дозволяє враховувати під час моделювання геометричну форму відстійника. Зазначимо, що в роботах [9, 10] представлено 2D-CFD-модель розрахунку вертикального відстійника.

### Математична модель процесу масопереносу у вертикальному відстійнику

Процес транспорту забруднювача у вертикальному відстійнику розраховують на основі тривимірного рівняння переносу домішки [11]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial (w-w_s)C}{\partial z} + \sigma C = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (1)$$

де  $C$  – концентрація забруднювача у воді;  $u, v, w$  – компоненти вектора швидкості течії;  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  – коефіцієнти дифузії;  $t$  – час;  $w_s$  – швидкість осідання забруднювача;  $\sigma$  – коефіцієнт, що враховує процеси агломерації і т. і. у відстійнику.

#### Крайові умови для рівняння переносу

Стінки відстійника і різні об'єкти всередині нього (труба, перегороди і т. п.) є граничними лініями току. У побудованій чисельній моделі на цих кордонах реалізується гранична умова виду

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0,$$

де  $n$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до твердої поверхні.

На твердих горизонтальних поверхнях відстійника в чисельній моделі реалізується гранична умова «поглинання» забруднювача. На вхідному кордоні (кордон входу потоку стічних вод у відстійник) поставлено умову:

$$C|_{\text{кордон}} = C_E,$$

де  $C_E$  – відоме значення концентрації забруднювача.

На вихідному кордоні розрахункової області, в чисельній моделі, ставиться «циклічна» (м'яка) гранична умова виду

$$C(i+1, j, k) = C(i, j, k),$$

де  $i, j, k$  – номер різницевої чарунки.

У початковий момент часу приймаємо  $C = 0$  в розрахунковій області. Завдання поширення забруднювача у відстійнику розв'язують на встановлення розв'язку.

#### Модель гідродинаміки

Розв'язання рівняння переносу забруднювача всередині відстійника (1) можливе, якщо відомо поле швидкості потоку у вертикальному відстійнику. Тому для розрахунку транспорту забруднювача у відстійнику необхідно розв'язати гідродинамічну задачу і визначити це поле швидкості. Для розв'язання цієї гідродинамічної задачі використовують 3D-модель потенціальної течії. У цьому випадку моделювальне рівняння має вигляд [12]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

де  $P$  – потенціал швидкості.

Для рівняння (2) ставлять такі граничні умови [12]:

– на твердих стінках відстійника, перегородках всередині його:  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ , де  $n$  – одиничний

вектор зовнішньої нормалі до твердого кордону;

– на вхідному кордоні (область втікання стічних вод у відстійник):  $\frac{\partial P}{\partial n} = V_n$ , де  $V_n$  – відоме

значення швидкості втікання;

– на вихідному кордоні розрахункової області (область виходу освітлених вод з відстійника)  $P = P^*(x = const, y) + const$  (умова Дирихле).

Після розрахунку поля потенціалу швидкості виконують розрахунок компонент вектора швидкості потоку стічних вод на основі залежностей [5]

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

### Чисельний метод розв'язання рівняння переносу забруднювача

Для чисельного інтегрування рівняння переносу забруднювача у відстійнику застосовують поперемінно трикутну різницеву схему розщеплення [13, 14]. Чисельний розрахунок реалізують на прямокутній різницевій сітці. Значення концентрації забруднювача розраховують у центрах різницевих чарунок. Розглянемо побудову цієї різницевої схеми для рівняння переносу.

Замінімо похідну за часом розділеної різницею «назад»:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t}.$$

Конвективні похідні представимо у вигляді:

$$\frac{\partial u C}{\partial x} = \frac{\partial u^+ C}{\partial x} + \frac{\partial u^- C}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v C}{\partial y} = \frac{\partial v^+ C}{\partial y} + \frac{\partial v^- C}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w C}{\partial z} = \frac{\partial w^+ C}{\partial z} + \frac{\partial w^- C}{\partial z},$$

$$\text{де } u^+ = \frac{u + |u|}{2}; \quad u^- = \frac{u - |u|}{2}; \quad v^+ = \frac{v + |v|}{2}; \quad v^- = \frac{v - |v|}{2}; \quad w^+ = \frac{w + |w|}{2}; \quad w^- = \frac{w - |w|}{2}.$$

Виконаємо апроксимацію конвективних похідних розділеними різницями «проти потоку»:

$$\frac{\partial u^+ C}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j,k}^+ C_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^+ C_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial u^- C}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j,k}^- C_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^- C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- C^{n+1},$$

$$\frac{\partial v^+ C}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1,k}^+ C_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^+ C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial v^- C}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1,k}^- C_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^- C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- C^{n+1},$$

$$\frac{\partial w^+ C}{\partial z} \approx \frac{w_{i,j,k+1}^+ C_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^+ C_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} = L_z^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial w^- C}{\partial z} \approx \frac{w_{i,j,k+1}^- C_{i,j,k+1}^{n+1} - w_{i,j,k}^- C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z} = L_z^- C^{n+1}.$$

Другі похідні апроксимуємо так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \approx \tilde{\mu}_x \frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} - \tilde{\mu}_x \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta x^2} = M_{xx}^- C^{n+1} + M_{xx}^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \approx \tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} - \tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = M_{yy}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1}.$$

У використаних виразах  $L_x^+$ ,  $L_x^-$ ,  $M_{xx}^+$ ,  $M_{xx}^-$  і т. п. – позначення різницевого операторів. З урахуванням цих позначень різницевої аналог рівняння переносу домішки матиме вигляд:

$$\frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} + L_x^+ C^{n+1} + L_x^- C^{n+1} + L_y^+ C^{n+1} + L_y^- C^{n+1} + L_z^+ C^{n+1} + L_z^- C^{n+1} + \sigma C_{i,j,k}^{n+1} =$$

$$= \left( M_{xx}^+ C^{n+1} + M_{xx}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1} + M_{yy}^- C^{n+1} + M_{zz}^+ C^{n+1} + M_{zz}^- C^{n+1} \right)$$

Розщепимо розв'язки цього різницевого рівняння під час інтегрування на тимчасовому інтервалі  $\delta t$  таким чином:

на першому кроці  $k = \frac{1}{4}$ :

$$\frac{C_{i,j}^{n+k} - C_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^+ C^k + L_y^+ C^k + L_z^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{i,j,k}^k =$$

$$= \frac{1}{4} (M_{xx}^+ C^k + M_{xx}^- C^k + M_{yy}^+ C^k + M_{yy}^- C^k + M_{zz}^+ C^k + M_{zz}^- C^k),$$
(3)

на другому кроці  $k = n + \frac{1}{2}$ ;  $c = n + \frac{1}{4}$ :

$$\frac{C_{i,j,k}^k - C_{i,j,k}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^- C^k + L_y^- C^k + L_z^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{i,j}^k =$$

$$= \frac{1}{4} (M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^k + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^k + M_{zz}^- C^k + M_{zz}^+ C^k),$$
(4)

на третьому кроці  $k = n + \frac{3}{4}$ ;  $c = n + \frac{1}{2}$  використовують формулу (4);

на четвертому кроці  $k = n + 1$ ;  $c = n + \frac{3}{4}$  використовують формулу (3).

У наведених позначеннях прийнято  $w = w - w_s$ .

Невідоме значення концентрації забруднювача на кожному кроці розщеплення визначають за явною формулою «рахунку, що біжить».

### Чисельне інтегрування рівняння для потенціалу швидкості

Для чисельного інтегрування рівняння (2) використовують метод Лібмана [15]. У цьому випадку апроксимувальне рівняння має вигляд:

$$\frac{P_{i+1,j,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = 0.$$

На підставі цієї залежності отримуємо формулу для визначення значення потенціалу швидкості в центрі різницевої чарунки

$$P_{i,j,k} = \left[ \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right] / A ,$$

$$\text{де } A = \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right).$$

Розраховане поле потенціалу швидкості використовують для визначення компонент вектора швидкості на гранях контрольних обсягів (різницевих чарунок) за формулами:

$$u_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x},$$

$$v_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y},$$

$$w_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z}.$$

Розрахунок компонент вектора швидкості потоку на гранях різницевих чарунок, дозволяє побудувати консервативну різницеву схему для рівняння переносу забруднювача всередині відстійника.

Чисельний розрахунок поля швидкості і процесу транспорту забруднювача у вертикальних відстійниках проводиться в області складної геометричної форми. Формування геометричної форми відстійника на прямокутній різницевій сітці здійснюють за допомогою методу маркування [13]. Такий підхід дозволяє користувачу швидко формувати будь-яку геометричну форму відстійника, без будь-яких обмежень, що накладаються на неї.

### Практична реалізація моделі

На підставі побудованої CFD-моделі розроблено спеціалізований код «Settler-3D». Для програмування використано *FORTRAN*.

Побудовану чисельну модель використано для моделювання процесу масопереносу у вертикальному відстійнику з переділом (рис. 1) [2]. *Мета обчислювального експерименту* – оцінка ефективності очищення води у відстійнику розглянутого типу за різної швидкості осідання забруднювача  $w_s$  і за різного розташування переділу всередині відстійника.

Обчислюваний експеримент проводився за таких параметрів: довжина відстійника – 6 м; ширина – 5 м; глибина – 3,34 м; швидкість потоку на вході у відстійник 12 м/год; коефіцієнт дифузії за всіма координатними напрямками – 0,7 м<sup>2</sup>/год;  $w_s = 1,6$  м/год. та  $w_s = 0,5$  м/год;  $\sigma = 0$ . Концентрація забруднювача у входному у відстійник потоку дорівнює 100 од. (у безрозмірному вигляді). Довжина переділу – 1,66 м.

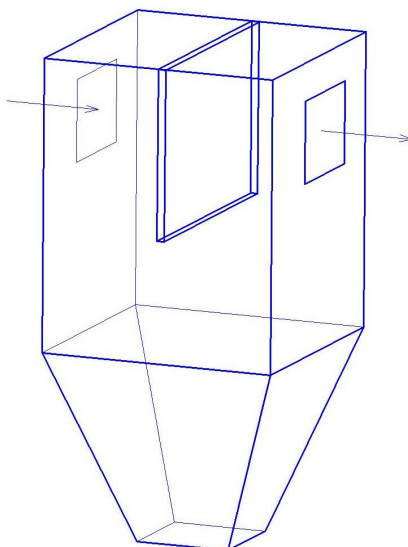


Рис. 1. Схема вертикального відстійника з переділом

Розглянемо результати обчислювального експерименту. На рис. 2 представлено розподіл значення концентрації забруднювача у відстійнику (вид збоку) у перерізі  $y=2,25$  м,  $w_s=1,2$  м/год. У цьому варіанті задачі переділ розташований посередині відстійника. На цьому рисунку показано, де здійснюється вхід та вихід води з відстійника. Для порівняння на рис. 3 представлено розподіл концентрації забруднювача в цьому ж перерізі відстійника, але за швидкості осідання забруднювача  $w_s=0,5$  м/год. Чітко видно, що за значення параметра  $w_s=1,2$  м/год розподіл концентрації забруднювача по висоті відстійника суттєво нерівномірний: основна маса забруднювача «сконцентрована» в нижній частині відстійника, а у висхідному потоці концентрація забруднювача значно менша (зона забурднення в цій частині відстійника ніби «розріджена»).

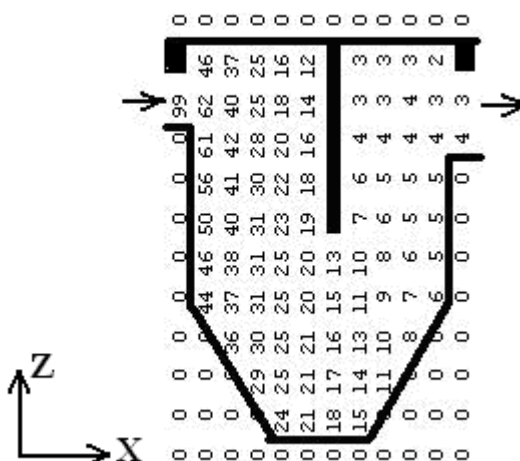


Рис. 2. Розподіл концентрації забруднювача у вертикальному відстійнику з переділом (вид збоку, переріз  $y=2,25$  м,  $w_s=1,2$  м/год,  $C_{max}=100$ )

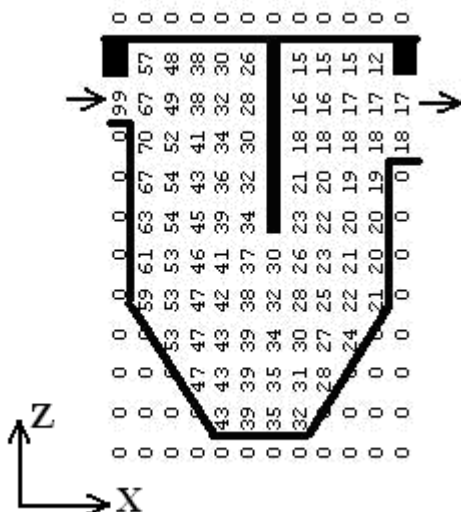


Рис. 3. Розподіл концентрації забруднювача у вертикальному відстійнику з переділом (вид збоку, переріз  $y=2,25$  м,  $w_s=0,5$  м/год,  $C_{\max}=100$ )

За значення  $w_s=0,5$  м/год розподіл концентрації забруднювача в цьому перерізі – інший, більш рівномірний, що явно свідчить про те, що процес очищення води відбувається менш ефективно. На інших рисунках (рис. 4, 5) показано розподіл концентрації забруднювача в різних перетинах відстійника за величини параметра  $w_s = 1,2$  м/год. Ці дані дозволяють оцінити ефективність очищення в різних частинах відстійника. На рис. 6 представлено розподіл концентрації забруднювача у відстійнику для варіанту, коли переділ зміщений ближче до вихідного отвору споруди.

Варто підкреслити, що на наведених рисунках значення концентрації представлено в безрозмірному вигляді: кожне число – це величина концентрації у відсотках від величини максимальної концентрації в цьому перетині. Тому під кожним рисунком подано інформацію про величину цієї максимальної концентрації для цього перерізу. Таке представлення результатів обчислювального експерименту дозволяє швидко аналізувати інформацію з оцінки величини концентрації в будь-якій частині відстійника. Варто зазначити, що виведення на друк результатів розрахунку здійснюються за форматом друку «цілих» чисел, тобто дробову частину числа не видають на друк. Це означає, якщо, наприклад, у якійсь точці розрахункове значення концентрації становить «1,85%» від концентрації на вході у відстійник, то на друк буде виведено число «1». Аналогічно, якщо значення концентрації менше 1%, то на друк буде видано «0». Цей підхід до такого висновку результатів на «друк» ефективний за проведення серійних розрахунків, коли відбувається «перебір» різних варіантів з метою вибору найоптимальнішої конструкції споруди. Для детальшого аналізу даних розрахунку розроблений код видає значення концентрації за форматом «дійсних» чисел, тобто із збереженням величини дробової частини числа.

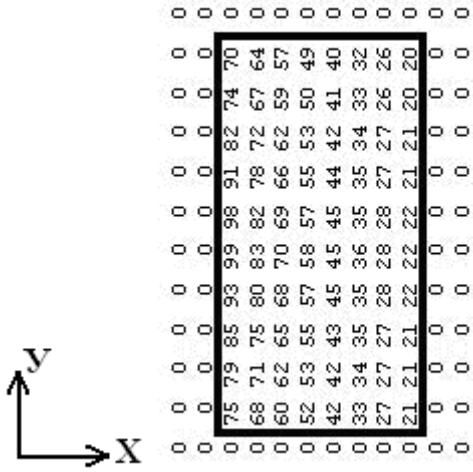


Рис. 4. Розподіл концентрації забруднювача у вертикальному відстійнику з переділом (вид зверху, переріз  $z = 0,82$  м,  $w_s = 1,2$  м/год,  $C_{\max} = 0,3$ )

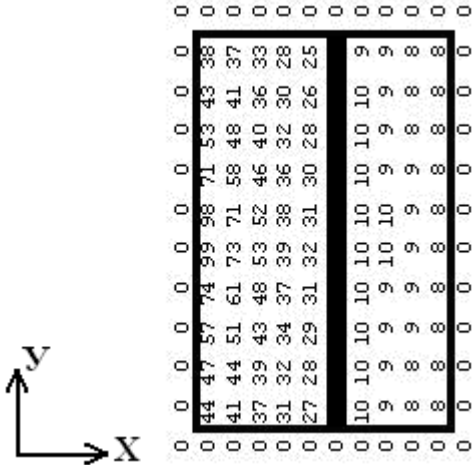


Рис. 5. Розподіл концентрації забруднювача у вертикальному відстійнику з переділом (вид зверху, переріз  $z = 2,14$  м,  $w_s = 1,2$  м/год,  $C_{\max} = 0,52$ )

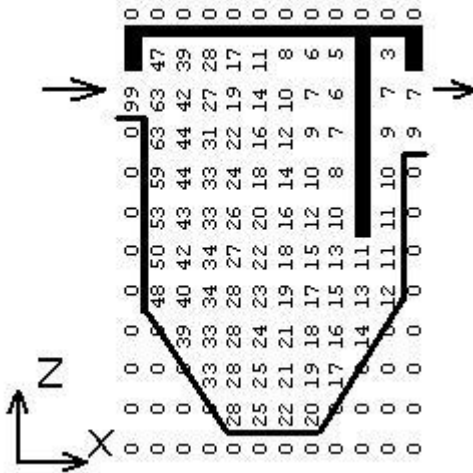


Рис. 6. Розподіл концентрації забруднювача у вертикальному відстійнику з переділом, що зміщена до вихідного отвору (вид збоку, переріз  $y = 2,25$  м,  $w_s = 1,2$  м/год,  $C_{\max} = 100$ )



На підставі проведеного обчислювального експерименту визначено ефективність роботи відстійника. Так, величина концентрації забруднювача на виході з відстійника (тобто ефективність очищення), за значення параметра  $w_s = 1,2$  м/год, становить:  $C_g = 2$  % від величини концентрації забруднювача на вході у відстійник, а за значення  $w_s = 0,5$  м/год, концентрація забруднювача на виході з відстійника становить  $C_g = 13 - 15$  %. Отже, зменшення швидкості осідання забруднювача приблизно у 2,4 рази призвело до істотного погіршення (приблизно в 7 разів) ступеня очищення води у відстійнику. Для відстійника зі зміщеним до вихідного отвору переділом ( $w_s = 1,2$  м/год) концентрація забруднювача на виході з відстійника становить  $C_g = 3\%$ .

Насамкінець зазначимо, що для розрахунку одного варіанту завдання потрібно близько 2 хвилин комп'ютерного часу. Такі мінімальні витрати часу на проведення обчислювального експерименту є важливою умовою під час проведення серійних розрахунків на практиці.

### Висновки

У роботі представлено ефективну 3D-чисельну модель для дослідження процесу масопереносу у вертикальних відстійниках складної геометричної форми. Створений спеціалізований код може бути використаний як інструмент розв'язання комплексу прикладних задач, що виникають під час проектування та реконструкції вертикальних відстійників. Особливістю побудованої чисельної моделі є можливість оперативного розрахунку споруд у тривимірному просторі. Подальший розвиток цієї роботи слід проводити в напрямі розробки моделі процесу масопереносу у відстійниках на основі моделі відривних вихрових течій ідеальної рідини.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Vanrolleghem P. A. New measurement techniques for secondary settlers: a review / P. A. Vanrolleghem, B. D. Clercq, J. D. Clercq, M. Devisscher, D. J. Kinnear, I. Nopens // *Water Science & Technology*, 2006. – Vol 53, No 4 – 5. – P. 419 – 429.
2. Таварткиладзе И. М. Математическая модель расчета вертикальных отстойников с перегородкой / И. М. Таварткиладзе, А. М. Кравчук, О. М. Нечипор // *Водоснабжение и санитарная техника*. – Вып. № 1. – 2006. – Ч. 2. – С. 39 – 42.
3. Stamou A. I. Validation and application of a simple model for circular secondary settling tanks / A. I. Stamou, D. L. Giokas, Y. Kim, P. A. Paraskevas // *Global NEST Journal*. – Greece, 2008. – Vol 10, No 1. – P. 62 – 72.
4. Токарь И. Я. К расчету вертикальных отстойников водоочистных сооружений / И. Я. Токарь, Г. И. Сухоруков, Д. Г. Сухоруков // *Науковий вісник будівництва*. – № 59. – 2010. – С. 293 – 296.
5. Олейник А. Я. Теоретический анализ процессов осаждения в системах биологической очистки сточных вод / А. Я. Олейник, Ю. И. Калугин, Н. Г. Степова, С. М. Зябликов // *Прикладная гидромеханика*. – Том 6 (78). – № 4. – 2004. – С. 62 – 67.
6. Степова Н. Г. До розрахунку вертикального відстійника з урахуванням форми його нижньої частини / Н. Г. Степова, Ю. І. Калугін, О. Я. Олійник // *Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравлики*. – Вип. № 14. – 2010. – С. 145 – 151.
7. Stamou A. I. A 1-D model for secondary circular clarifiers / A. I. Stamou // *Proc. of the Intern. Conference for the Restoration and Protection of the Environment V, Mykonos, Greece, 2004*. – P. 8
8. Shaw A. Optimizing Energy Dissipating Inlet (Edi) Design In Clarifiers Using An Innovative CFD Tool / A. Shaw, S. McGuffie, C. Wallis-Lage, J. Barnard // *WEFTEC*, 2005. – P. 8719 – 8736.
9. Беляев Н. Н. Математическое моделирование работы канализационного отстойника / Н. Н. Беляев, Е. К. Нагорная // *Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: 72 міжн. наук.-практ. конф.*, 19 – 20 квітня 2012 р.: тези доп. – Дніпропетровськ, 2012. – С. 209 – 210.
10. Беляев Н. Н. Численная модель работы вертикального отстойника / Н. Н. Беляев, Е. К. Нагорная // *Современные информационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: межд. научн.-практ. конф.*, 5 – 6 квітня 2012 р.: тезисы докл. – Днепропетровск, 2012. – С. 56.
11. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 735 с.

13. Згуровский М. З. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.
14. Беляев Н. Н. Компьютерное моделирование динамики движения и загрязнения подземных вод. / Н. Н. Беляев, Е. Д. Коренюк, В. К. Хрущ. – Днепропетровск: Наука и образование, 2001. – 156 с.
15. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

**Біляєв Микола Миколайович** – д. т. н., професор, завідувач кафедри гідравліки та водопостачання.

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна.

**Нагорна Олена Костянтинівна** – асистент кафедри гідравліки.

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури.