УДК 517.9

Д. Є. Акбаров, д. ф.-м. н., проф.;
В. М. Мізерний, к. т. н., доц.

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ОБ'ЄКТАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ. ЧАСТИНА II

Вступ

Дана стаття є продовженням роботи [1]. Тут розглядається екстремальна задача оптимального керування для об'єктів з розподіленими параметрами, які описуються нелінійними диференційними рівняннями з частинними похідними параболічного типу.

Постановка задачі

Розглянемо екстремальну задачу оптимального керування для об'єктів з розподіленими параметрами, які описуються нелінійними диференційними рівняннями з частинними похідними параболічного типу, аналогічно [1].

Припустимо, що функції, які визначають стан об'єкта $x\,(t,\,\omega)$ і параметр керування $u\,(t,\,\omega)$, визначені в обмеженій області $\Omega \subset R^N$ з границею $\partial\Omega$ на часовому відрізку $[0,\,T] = S$.

Нестаціонарна задача оптимального керування має вигляд:

$$\int_0^T \int_\Omega J\left[x(t,\,\omega),\; u(t,\,\omega)\right] d\omega dt = I(x,\,u) \to \inf\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_i^2} + Q\left(t,\omega;\; x(t,\omega),\; \frac{\partial x}{\partial \omega_1},\dots,\frac{\partial x}{\partial \omega_N},\; u(t,\omega)\right) = f(t,\omega)\,, \tag{2}$$

$$x(0,\cdot) = 0\,,\; x(t,\,\omega)\big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{3}$$

В даному випадку початкові граничні умови вибрані нульовими. Таке припущення не впливає на загальну постановку задачі, так як ненульові умови можна звести до нульових [2, 3].

Під час дослідження таких задач доводиться мати справу з функціями $x\,(t,\,\omega)$ незалежними від часу та положення, які ставлять у відповідність кожній парі $(t,\,\omega) \in S \times \Omega$ дійсне число або вектор $x\,(t,\,\omega)$. При цьому змінні t і ω присутні як незалежні. Для зручності математичного опису нестаціонарних процесів використовують функції часу, які кожному моменту часу t ставлять у відповідність функцію $x(t,\cdot)$ положення. Таким чином, розглядаються функції визначені на S із значеннями в деякому просторі X, тобто $x \in (S \to X)$ [4].

Введемо деякі позначення:

$$y(t) = x(t,\cdot)\,;\; \nu(t) = u(t,\cdot)\,;\; y'(t) = \frac{\partial x}{\partial t}\,;\; y(0) = x(0,\cdot) = 0\,;\; g(t) = f(t,\cdot)\,;$$

$$Ly(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial w_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 x(t,\, w)}{\partial w_i^2}\,;$$

$$G\big(y(t),\, v(t)\big) = Q\left(t,\, y(t),\, \frac{\partial y}{\partial \omega_1},\, \ldots,\, \frac{\partial y}{\partial \omega_N},\, \nu(t)\right). \tag{4}$$

Задачу (1)—(3) запишемо в операторному вигляді, врахувавши (4):

$$I(y,\, v) \to \inf\,, \tag{5}$$

$$y'(t) - Ly(t) + G\big(y(t),\, v(t)\big) = g(t)\,, \tag{6}$$

$$y(0) = 0\,. \tag{7}$$

Тут функція $I(t;\, \xi_1,\ldots,\xi_N) \in CAR$, яка відповідає лінійному відображенню

$$Ly(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial \omega_i^2}\,,$$

задовольняє умові

$$\big|I(t;\xi_1,\ldots,\xi_N)\big| = \left|\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N\right| \le \left|\xi_1\right| + \left|\xi_2\right| + \ldots + \left|\xi_N\right| \le \sum_{i=1}^{N} \left|\xi_i\right|^{p-1}, \quad p \ge 2\,.$$

Для функції $Q(t;\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_{N+2}) \in CAR$, що відповідає нелінійному відображенню

$$G\big(y(t),\, \nu(t)\big) = Q\left(t;\, y(t),\, \frac{\partial y}{\partial \omega_1},\ldots,\, \frac{\partial y}{\partial \omega_N},\, \nu(t)\right),$$

повинна виконуватись умова

$$Q\big(t;\, \xi_1,\ldots,\, \xi_{N+2}\big) \le a(t) + c\sum_{i=1}^{N+1} \left|\xi_i\right|^{p-1} + \eta^{r/q}\,,$$
$$a \in \big(S \to L_u(\Omega)\big), \quad c > 0, \quad p \ge 2.$$

Виходячи з граничних умов і враховуючи, що $X = \overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega) \cap W^2_p(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ і $X^* \subset L_q(\Omega)$, припускаємо, що

$$y \in (S \to X), y' \in (S \to X^*),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega_i} \in (S \to L_p(\Omega)), \quad \nu \in (S \to L_p(\Omega)), \quad g(t) \in L_q(\Omega)\,.$$

Тоді

$$I : L_p(S;\, X) \times L_r\big(S;\, L_r(\Omega)\big) \to IR,$$

$$L : L_p(S;\, X) \to L_q(Q), \quad Q = S \times \Omega\,,$$

$$G : L_p(S; X) \to L_q(Q)\,.$$

Для отримання необхідних умов оптимальності задачі (5)—(7), яка еквівалентна задачі (1)—(3), складаємо відповідну функцію Лагранжа, ввівши спряжену функцію $\psi \in \left(S \to L_p(\Omega)\right)$. Таким чином,

$$
\begin{aligned}
F(y, \nu) &= I(y, \nu) + \int_S \left\langle \psi(t),\, y'(t) - Ly(t) + G\big(y(t), \nu(t)\big) - g(t) \right\rangle_{L_q(\Omega)} dt = \\
&= I(y(t), \nu(t)) + \int_0^T \int_\Omega \psi(t) y'(t) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 y(t)}{\partial \omega_i^2} d\omega dt + \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \psi(t) Q\left(t, y(t), \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_N}, \nu(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t) d\omega dt.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Користуючись правилом інтегрування по частинах відносно першого і другого інтеграла та змінивши порядок інтегрування на першому інтегралі, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
F(y, \nu) &= I(y, \nu) + \int_\Omega \left\{ \left[\psi(0) y(0) - \psi(T) y(T)\right] - \int_0^T y(t) \psi'(t) dt \right\} d\omega - \left[\int_0^T \left\{ \left[\psi(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi(t)}{\partial \omega_i} \right]_{\partial\Omega} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi(t)}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_i} d\omega \right\} dt \right] + \int_0^T \int_\Omega \psi(t) Q\left(t, y(t), \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_N}, \nu(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t) d\omega dt = \\
&= I(y, v) + \int_\Omega \left\{ \left[\Psi(0) y(0) - \Psi(T) y(T)\right] - \int_0^T y(t) \Psi'(t) dt \right\} d\omega - \\
&- \left[\int_0^T \left\{ \left[\psi(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_i} \right]_{\partial\Omega} - \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi(t)}{\partial \omega_i} y(t) \right]_{\partial\Omega} + \int_\Omega y(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial \omega_i^2} d\omega \right\} dt \right] + \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \psi(t) Q\left(t, y(t), \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_N}, \nu(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t) d\omega dt.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Враховуючи, що $y(t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \;\; \forall t \in S$, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
F(y,\nu) &= I(y,\nu) + \int_\Omega \left\{ \left[\psi(0) y(0) - \psi(T) y(T)\right] - \int_0^T y(t) \psi'(t) dt \right\} d\omega - \int_0^T \int_\Omega y(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial \omega_i^2} d\omega dt + \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \psi(t) Q\left(t, y(t), \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_N}, \nu(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t) d\omega dt.
\end{aligned} \tag{10}
$$

За умови, що $y\,(0) = 0$ і для спряженої задачі $\psi(T) = 0$, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
F(y,\nu) &= I(y,\nu) - \int_0^T \int_\Omega y(t) \psi'(t) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega y(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial \omega_i^2} d\omega dt + \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \psi(t) Q\left(t, y(t), \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial y(t)}{\partial \omega_N}, \nu(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t) d\omega dt.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Далі знаходимо частинні варіації функціонала $F(y(t), \nu(t))$:

$$
\delta_y F = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial J}{\partial y(t)} \delta y(t) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi'(t) \delta y(t) dt d\omega - \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial \omega_i^2} \delta_{y(t)} d\omega dt +
$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\left[\frac{\partial Q}{\partial y(t)}\delta y(t)+\sum_{i=1}^N \frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y_{\omega_i}(t)\right]d\omega dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\tau}{\partial y(t)}\delta y(t)dtd\omega-\int_0^T\int_\Omega \psi'(t)\delta y(t)dtd\omega-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial\omega_i^2}\delta y(t)d\omega dt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\frac{\partial Q}{\partial y(t)}\delta y(t)d\omega dt+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\sum_{i=1}^N\left[\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)\right)-\delta y(t)\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i}(t)\partial\omega_i}\right]d\omega dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\tau}{\partial y(t)}\delta y(t)dtd\omega-\int_0^T\int_\Omega \psi'(t)\delta y(t)dtd\omega-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial\omega_i^2}\delta y(t)d\omega dt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\frac{\partial Q}{\partial y(t)}\delta y(t)d\omega dt+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\sum_{i=1}^N\delta y(t)\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i}(t)\partial\omega_i}d\omega dt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)\right)d\omega dt. \tag{12}$$

Позначимо перших п’ять інтегралів через Σ. Використовуючи формулу Гріна, отримаємо

$$\delta_y F=\Sigma+\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)\right)d\omega dt=\Sigma+\int_0^T \psi(t)\sum_{i=1}^N\delta y(t)\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i}(t)\partial\omega}\bigg|_{\partial\Omega}dt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial\psi(t)}{\partial\omega_i}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)d\omega dt=\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial J}{\partial y(t)}\delta y(t)dtd\omega-\int_0^T\int_\Omega\psi'(t)\delta y(t)dtd\omega-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial\omega_i^2}\delta y(t)d\omega dt+\int_0^T\int_\Omega\psi(t)\frac{\partial Q}{\partial y(t)}\delta y(t)d\omega dt-\int_0^T\int_\Omega\psi(t)\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i}(t)\partial\omega_i}\delta y(t)d\omega dt+$$

$$+\int_0^T\left[\psi(t)\sum_{i=1}^N\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)\right]\Bigg|_{\partial\Omega}dt-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial\psi(t)}{\partial\omega_i}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)d\omega dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial J}{\partial y(t)}-\sum_{i=1}^N\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial\omega_i^2}+\frac{\partial\psi(t)}{\partial\omega_i}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}+\\&+\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i}(t)\partial\omega}-\frac{\partial Q}{\partial y(t)}\right]\psi(t)+\psi'(t)\end{aligned}\right\}\right)\delta y(t)d\omega dt+$$

$$+\int_0^T\left[\psi(t)\sum_{i=1}^N\frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}(t)}\delta y(t)\right]\Bigg|_{\partial\Omega}dt. \tag{13}$$

$$\delta_u F=\int_\Omega\frac{\partial J}{\partial u(t)}\delta u(t)d\omega+\int_0^T\int_\Omega\psi(t)\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2 Q}{\partial u_{\omega_i}\partial\omega_i}\delta u(t)d\omega dt=\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial J}{\partial u(t)}\delta u(t)dtd\omega+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega\psi(t)\frac{\partial Q}{\partial u(t)}\delta u(t)d\omega dt=\int_0^T\int_\Omega\left[\frac{\partial J}{\partial u(t)}+\frac{\partial Q}{\partial u(t)}\psi(t)\right]\delta u(t)dtd\omega. \tag{14}$$

Для отримання необхідних умов оптимальності прирівняємо частинні варіації (13), (14) до нуля:

$$\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial \omega_i^2} + \frac{\partial \psi(t)}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}} + \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i} \partial \omega_i} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right] \psi(t) \right\} = 0\,, \tag{15}$$

$$\psi\langle T \rangle = 0, \quad \left[\psi(t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}} \right] \Bigg|_{\partial\Omega} = 0 \ (\text{або } \psi(t)\big|_{\partial\Omega} = 0), \tag{16}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial u} \psi(t) = 0\,. \tag{17}$$

Висновки

Таким чином, для знаходження можливого оптимального розв'язку задачі керування (1)—(3) маємо систему трьох функціональних рівнянь (2), (15), (17) з граничними умовами (3), (16) для невідомих $x_o = y_o$, u_o, ψ_o.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акбаров Д. Є., Мізерний В. М. Необхідні умови оптимального управління об'єктами з розподіленими параметрами. Частина I. // Вісник ВПІ. — 2003. — № 5. — С. 104—110.
2. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972. — 415 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 542 с.
4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 430 с.

Рекомендована кафедрою інтеграції навчання з виробництвом

Надійшла до редакції 10.07.03
Рекомендована до друку 18.11.03

Акбаров Давлаталі Єгіталієвич — професор кафедри математичного аналізу.

Ташкентський національний університет;

Мізерний Віктор Миколайович — завідувач кафедри інтеграції навчання з виробництвом.

Вінницький державний технічний університет