

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КРИВОЇ НАМАГНІЧУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ПОСЛІДОВНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

Встановлено, що представлення моделі кривої намагнічування сукупністю параболи та прямої дає втричі вищу точність апроксимації універсальної кривої намагнічування електричного двигуна постійного струму з послідовним збудженням (ЕДПЗ) ніж представлення цієї кривої намагнічування математичною моделлю, яка базується на апроксимації кривої намагнічування арктангенсом. Показано, що другу математичну модель, на відміну від першої, недоцільно використовувати для розв'язання задачі мінімізації втрат електроенергії ЕДПЗ.

1. Вихідні передумови та постановка задачі

У роботі [1] зазначається: «Некоторые авторы пытались найти приближенное математическое выражение механической характеристики двигателя последовательного возбуждения с учетом насыщения, представляя кривую намагничивания в виде отрезков прямой или используя степенные, логарифмические, тригонометрические и гиперболические функции. Однако эти попытки не увенчались успехом из-за возникающих затруднений с нахождением коэффициентов уравнений, аппроксимирующих кривую намагничивания, сложности получающихся приближенных выражений и невозможности их использования в практических расчетах».

Зазначеним вище словам вже більше сорока років. Отже, з урахуванням нових здобутків комп'ютерної техніки та відповідно до нових можливостей для обробки інформації, є сенс переглянути категоричність наведеної вище цитати.

В роботі [2] побудована зручна для використання під час розв'язання задачі оптимізації математична модель характеристики намагнічування $\phi(i)$ (рис. 1) у вигляді:

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 i^2 + b_2 i, & i \in [0, i_{\text{сп}}); \\ a_1 + b_1 i, & i \in [i_{\text{сп}}, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

де

$$i_{\text{сп}} = \frac{b_2 - b_1}{2a_2}. \quad (2)$$

В роботі [2] також зазначено, що, як правило, під час розв'язання практичних задач, пов'язаних з функціонуванням ЕДПЗ, в якості математичної моделі $\phi = \phi(i)$ кривої намагнічування використовують одну із двох моделей, перша із яких базується на апроксимації нелінійності $\phi(i)$ відрізками двох прямих (штрихові лінії на рисунку 1), що стикаються в точці $(i_{\text{сп}}^*, \phi_{\text{сп}}^*)$, тобто на моделі —

$$\phi(i) = \begin{cases} k_1 i, & i \in [0, i_{\text{сп}}^*]; \\ a + k_2 i, & i \in (i_{\text{сп}}^*, \infty), \end{cases} \quad (3)$$

а друга — на апроксимації нелінійності $\phi(i)$ степеневим поліномом, тобто на моделі

$$\phi(i) = a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \dots + a_n i^n, \quad (4)$$

яка дає задовільну точність апроксимації, як показують практичні розрахунки, починаючи з $n = 7$.

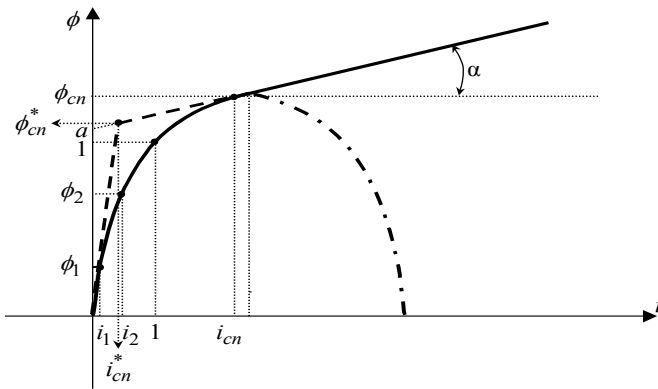


Рис. 1. Графік характеристики намагнічування $\phi(i)$ електричного двигуна при використанні моделі (1)

умов оптимальності, які не мають аналітичних розв’язків, а тому є непридатними для синтезу за їх результатами систем оптимального керування електроприводами.

Але, окрім моделей (3) та (4), на практиці також часто використовується третя модель, яка базується на апроксимації нелінійності $\phi(i)$ функцією арктангенса [4] і яка була залишена поза увагою роботи [2]:

$$\phi_{at}(i) = a_{at} \arctg(b_{at}i), \tag{5}$$

де a_{at} та b_{at} — константи.

Аналізу математичної моделі (5) у розрізі порівняння її з моделлю (1) і присвячена дана робота.

Порівняння будемо здійснювати з використанням універсальної кривої намагнічування для електродвигунів послідовного збудження, наведеної в роботі [5], графік якої має вигляд, показаний на рис. 2.

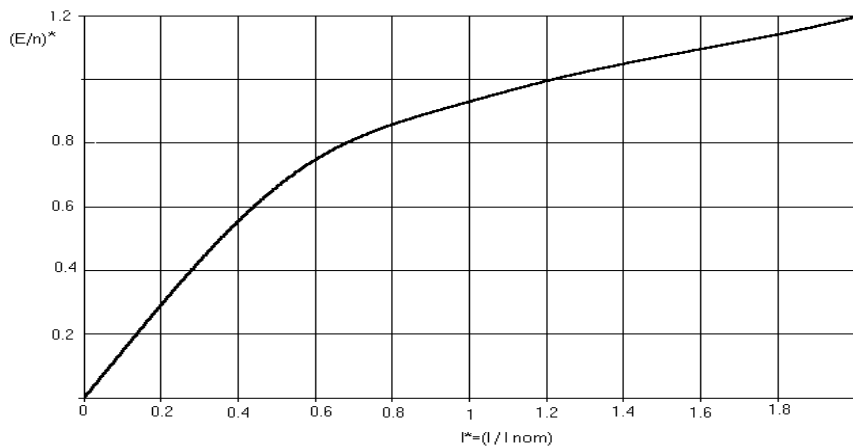


Рис. 2. Універсальна крива намагнічування для двигунів послідовного збудження

2. Особливості ідентифікації параметрів математичної моделі (1)

Перед тим як перейти безпосередньо до порівняння математичних моделей (1) та (5), виведемо деякі співвідношення, які нам знадобляться для ідентифікації параметрів математичної моделі (1).

Нехай нам відомо рівняння параболи

$$\phi(i) = -a_2 i^2 + b_2 i \tag{6}$$

та координати деякої точки $M(i_M, \phi_M)$. Необхідно знайти координати точки дотику (i_{cn}, ϕ_{cn}) дотичної, яка проходить через точку M , до заданої параболи, а також записати вирази для обчислення параметрів рівняння цієї дотичної.

В тій же роботі [2] зауважено, що обидві ці моделі, як (3), так і (4), даючи непогані результати при їх використанні в багатьох прикладних розрахунках, виявляються недієздатними при розв’язанні задач оптимізації електроприводів з ЕДПЗ за критерієм мінімуму втрат електроенергії [3], оскільки використання моделі (2) призводить до стрибкоподібної зміни першої похідної ϕ'

в точці (i_{cn}^*, ϕ_{cn}^*) і розриву другої похідної ϕ'' в цій точці, що унеможливорює розв’язання задачі оптимізації варіаційними методами, а використання моделі (3) призводить до таких високих порядків похідних в Ейлерових рівняннях необхідних

Запишемо рівняння дотичної в координатній формі

$$\frac{i - i_{\text{сп}}}{i_M - i_{\text{сп}}} = \frac{\phi(i) - \phi_{\text{сп}}}{\phi_M - \phi_{\text{сп}}}. \quad (7)$$

Рівняння (7) можна переписати у вигляді —

$$\phi(i) = i \frac{\phi_M - \phi_{\text{сп}}}{i_M - i_{\text{сп}}} + \phi_{\text{сп}} - i_{\text{сп}} \frac{\phi_M - \phi_{\text{сп}}}{i_M - i_{\text{сп}}}. \quad (8)$$

Скористаємось тим, що перші похідні від співвідношень (6) та (8) в точці дотику рівні між собою, тобто

$$-2a_2 i_{\text{сп}} + b_2 = \frac{\phi_M - \phi_{\text{сп}}}{i_M - i_{\text{сп}}}, \quad (9)$$

звідки

$$\phi_{\text{сп}} = -2a_2 i_{\text{сп}}^2 + (b_2 + 2a_2 i_M) i_{\text{сп}} + \phi_M - b_2 i_M. \quad (10)$$

Але нам також відомо, що точка дотику належить як дотичній, так і параболі, тобто

$$\phi_{\text{сп}} = -a_2 i_{\text{сп}}^2 + b_2 i_{\text{сп}}. \quad (11)$$

Ліві частини рівнянь (10) та (11) рівні, а отже рівні і їх праві частини:

$$-a_2 i_{\text{сп}}^2 + b_2 i_{\text{сп}} = -2a_2 i_{\text{сп}}^2 + (b_2 + 2a_2 i_M) i_{\text{сп}} + \phi_M - b_2 i_M, \quad (12)$$

звідки

$$a_2 i_{\text{сп}}^2 + (-2a_2 i_M) i_{\text{сп}} + (-\phi_M + b_2 i_M) = 0. \quad (13)$$

Розв'язуючи рівняння (13), отримаємо два значення $i_{\text{сп}}$, але нам підходить лише одне

$$i_{\text{сп}} = i_M - \sqrt{i_M^2 - \frac{b_2 i_M - \phi_M}{a_2}}. \quad (14)$$

Підставляючи вираз (14) у співвідношення (10) або (11), отримаємо $\phi_{\text{сп}}$. А підставляючи значення $i_{\text{сп}}$ та $\phi_{\text{сп}}$ у співвідношення (8), отримаємо рівняння дотичної.

Для розрахунків використаємо математичний апарат ППП Mathcad.

Нехай нам відома певна кількість точок кривої намагнічування.

Для того, щоб апроксимувати параболою та прямою характеристику намагнічування, необхідно:

1) ввести відомі нам точки кривої намагнічування у ППП Mathcad, отримавши при цьому дискретну функцію залежності магнітного потоку від струму;

2) за допомогою функцій *cspline* та *interp* проінтерполювати дискретну функцію та перетворити її на неперервну;

3) вибрати на характеристиці намагнічування точку M з координатами (i_M, ϕ_M) , яка напевно лежить на ділянці, яку будемо апроксимувати прямою;

4) розділити відрізок неперервної характеристики намагнічування, який обмежений початком координат та точкою M , на певну кількість точок (рекомендовано 1000);

5) вибрати для апроксимації параболою першу (i_1, ϕ_1) і другу (i_2, ϕ_2) точки пункту 4 алгоритму та підставити їх у систему (5), перетворену у такий спосіб:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{i_1 \phi_2 - i_2 \phi_1}{i_1^2 i_2 - i_1 i_2^2}; \\ b_2 &= \frac{\phi_1 + a_2 i_1^2}{i_1}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

б) із виразів (14) та (10) знайти координати точки дотику $(i_{сп}, \phi_{сп})$ та обчислити параметри рівняння дотичної, які можна знайти з виразу (8):

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \phi_{сп} - i_{сп} \frac{\phi_M - \phi_{сп}}{i_M - i_{сп}}; \\ b_1 &= \frac{\phi_M - \phi_{сп}}{i_M - i_{сп}}; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

7) знайти суму квадратів відхилень кривої намагнічування, що складається з параболи та прямої, від характеристики намагнічування, що апроксимується, в усіх точках пункту 4 алгоритму;

8) повторити пункти 5—7 алгоритму для всіх можливих різних пар точок пункту 4;

9) порівняти значення сум квадратів відхилень пункту 7 і знайти найменше — параметри a_1, a_2, b_1, b_2 , які відповідатимуть цьому найменшому значенню суми квадратів відхилень, і будуть шуканими числовими значеннями параметрів математичної моделі (1).

3. Особливості ідентифікації параметрів математичної моделі (5)

Тепер розглянемо алгоритм знаходження параметрів математичної моделі (5). Але перед цим, виведемо декілька співвідношень.

Очевидним є те, що шукана крива, яка описується математичною моделлю (5), повинна хоча б раз перетнути криву намагнічування, яка апроксимується. В іншому випадку, шукана крива буде надто далекою від кривої намагнічування, що апроксимується.

Нехай точка А з координатами (i_A, ϕ_A) — точка перетину кривої, яка описується математичною моделлю (5), з кривою намагнічування, що апроксимується. Тоді параметри математичної моделі (5), щоб вона виконувала наведену вище умову про обов'язковість перетину з кривою намагнічування, що апроксимується, можна зв'язати так:

$$a_{at} = \frac{\phi_A}{\arctg(b_{at}i_A)}, \quad (17)$$

де a_{at} та b_{at} — параметри моделі (5), яку, з урахуванням співвідношення (17), можна переписати так:

$$\phi_{at}(i) = \frac{\phi_A}{\arctg(b_{at}i_A)} \arctg(b_{at}i). \quad (18)$$

Перейдемо безпосередньо до алгоритму апроксимації кривої намагнічування арктангенсом. Для розрахунків знову використаємо математичний апарат ППП Mathcad. Отже, для того, щоб апроксимувати арктангенсом характеристику намагнічування, необхідно:

1) ввести відомі нам точки кривої намагнічування у ППП Mathcad, отримавши при цьому дискретну функцію залежності магнітного потоку від струму;

2) за допомогою функцій *cspline* та *interp* проінтерполювати дискретну функцію та перетворити її на неперервну;

3) розділити відрізок неперервної кривої намагнічування, який обмежений початком координат та останньою напевно відомою точкою кривої намагнічування, на певну кількість точок (рекомендовано 1000);

4) вибрати діапазон значень параметра b_{at} , за межами якого значення параметра b_{at} вочевидь не може бути оптимальним (у випадку застосування апроксимації кривої намагнічування функцією арктангенса, оптимальне значення параметра b_{at} слід шукати в межах від 0 до 2 включно);

5) розділити діапазон пункту 4 на певну кількість значень параметра b_{at} (рекомендовано 1000);

6) вибрати в якості точки А для апроксимації арктангенсом першу точку з координатами (i_1, ϕ_1) пункту 3 цього алгоритму ($i_A = i_1, \phi_A = \phi_1$) та підставити її у систему (18), отримавши:

$$\phi_{at}(i) = \frac{\phi_1}{\arctg(b_{at}i_1)} \arctg(b_{at}i); \quad (19)$$

7) послідовно перебираючи значення параметра b_{at} пункту 4, знайти суми квадратів відхилень кривої (19) від характеристики намагнічування, що апроксимується, для кожного значення параметра b_{at} ;

8) повторити пункти 6 та 7 алгоритму для всіх інших точок пункту 3;

9) порівняти значення сум квадратів відхилень пункту 7 і знайти найменше — параметри a_{at} та b_{at} , які відповідатимуть цьому найменшому значенню суми квадратів відхилень, і будуть шуканими числовими значеннями параметрів математичної моделі (5).

Зрозуміло, що два наведених вище алгоритми легко реалізувати у комп'ютерній програмі, яка автоматично виконає всі обчислення. Вхідними даними програми будуть лише точки кривої намагнічування (пункт 1 алгоритмів). Не зупиняючись на процесі застосування алгоритмів, вкажемо лише на те, що за їх допомогою для кривої намагнічування, показаної на рис. 2, отримано —

$$\phi(i) = \begin{cases} -0,73299i^2 + 1,66977i, & i \in [0, 0,96353), \\ 0,68050 + 0,25725i, & i \in [0,96353, \infty); \end{cases} \quad (20)$$

$$\phi_{at}(i) = 0,89364 \operatorname{arctg}(1,768i). \quad (21)$$

4. Порівняльний аналіз математичних моделей (20) та (21)

Реалізувавши перший алгоритм у комп'ютерній програмі та застосувавши отриману програму до універсальної кривої намагнічування, зображеної на рис. 2, знайдемо, що найменше значення суми квадратів відхилень математичної моделі (20) від універсальної кривої намагнічування становитиме —

$$\Sigma_{\min}^{(20)} = \sum_{j=1}^{481} (\phi_p(j \cdot 0,002) - \phi_1(j \cdot 0,002))^2 + \sum_{j=482}^{1000} (\phi_p(j \cdot 0,002) - \phi_2(j \cdot 0,002))^2 = 0,05544, \quad (22)$$

де $\phi_1(i)$ — парабола, $\phi_2(i)$ — пряма, $\phi_p(i)$ — крива намагнічування, отримана через інтерполяцію відомих точок універсальної кривої намагнічування, а $0,002$ — крок дискретизації $\left(\frac{i_{\max}}{1000} = \frac{2}{1000} = 0,002\right)$, в якому i_{\max} — найбільше напевно відоме значення універсальної кривої намагнічування.

Аналогічно, за допомогою другого алгоритму, знайдемо, що найменше значення суми квадратів відхилень моделі (21) від універсальної кривої намагнічування становитиме —

$$\Sigma_{\min}^{(21)} = \sum_{j=1}^{1000} (\phi_p(j \cdot 0,002) - \phi_{at}(j \cdot 0,002))^2 = 0,17213, \quad (23)$$

де $\phi_{at}(i)$ — крива намагнічування, яка базується на апроксимації арктангенсом.

Отже, можна зробити висновок, що математична модель (20) приблизно в 3,10 рази «ближча» до універсальної кривої намагнічування, ніж модель (21):

$$\frac{\Sigma_{\min}^{(21)}}{\Sigma_{\min}^{(20)}} = \frac{0,17213}{0,05544} \approx 3,10. \quad (24)$$

На рисунку 3 зображені графіки універсальної кривої намагнічування (суцільна лінія), параболічно-лінійної кривої намагнічування (пунктирна лінія) та кривої намагнічування, апроксимованої арктангенсом (штрихова лінія).

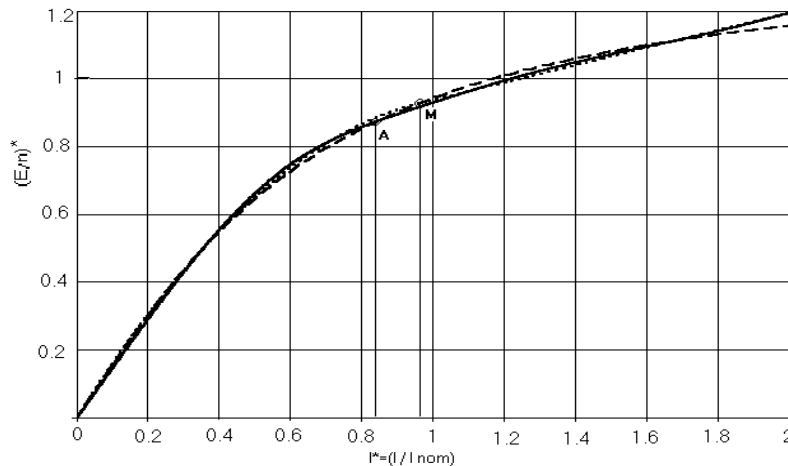


Рис. 3. Графіки універсальної кривої намагнічування (суцільна лінія), параболічно-лінійної кривої намагнічування (пунктирна лінія) та кривої намагнічування, апроксимованої арктангенсом (штрихова лінія)

5. Аналіз можливості застосування математичної моделі (5) у задачі оптимізації втрат електроенергії

Як зазначалось у статті [6], в роботі [3] задача оптимізації за критерієм

$$Q = \int_0^{\tau_k} i^2 d\tau \quad (25)$$

режиму роботи за програмою

$$\beta = \int_0^{\tau_k} v d\tau \quad (26)$$

електропривода з електродвигуном послідовного збудження, динаміка якого описується рівнянням

$$i\dot{\phi} = \dot{v} + \mu_0, \quad (27)$$

доведена до отримання рівняння

$$\frac{2i}{\phi + i \frac{d\phi}{di}} = \lambda_0 \tau + C, \quad (28)$$

для розв'язання якого відносно струму i якоря електродвигуна необхідно задати в аналітичній формі залежність робочого магнітного потоку $\phi(i)$ цього електродвигуна від струму збудження, який для цього класу електродвигунів є одночасно і струмом збудження якоря.

В тій же роботі [6] показано, як отримати оптимальні закони зміни для струму i та швидкості обертання v вала ротора ЕДПЗ, щоб забезпечити мінімум функціоналу (25) за умови виконання програми (26).

Слід зазначити, що особливістю використання моделі (1) у співвідношенні (28) є отримання двох пар оптимальних законів зміни струму та швидкості обертання вала ротора, оскільки спочатку ми підставляємо у співвідношення (28) перше рівняння системи (1) і отримуємо першу пару оптимальних законів, а потім — друге рівняння системи (1) і отримуємо другу пару. Зважаючи на це, можна припустити, що математична модель (5) зручніша для використання, оскільки вона описує всю криву намагнічування одним рівнянням.

Підставивши математичну модель (5) у співвідношення (28), матимемо:

$$\frac{2i}{a_{at}\arctg(b_{at}i) + i\frac{a_{at}b_{at}}{1 + b_{at}^2i^2}} = \lambda_0\tau + C \quad (29)$$

або

$$a_{at}\arctg(b_{at}i)(\lambda_0\tau + C)(1 + b_{at}^2i^2) + ia_{at}b_{at}(\lambda_0\tau + C) - 2i(1 + b_{at}^2i^2) = 0. \quad (30)$$

Оскільки рівняння (30) є трансцендентним, нелінійним рівнянням 3-го порядку, то для нього неможливо знайти аналітичні розв'язки у загальному вигляді. А це означає, що математична модель (5), на відміну від моделі (1), непридатна для пошуку такого розв'язку даної задачі оптимізації, на основі якого можна реалізувати систему оптимального керування електроприводом.

А це, в свою чергу, перекреслює перевагу моделі (5), обумовлену тим, що вона задає зв'язок між магнітним потоком і струмом однією формулою.

6. Висновки

З порівняльного аналізу математичних моделей (1) та (5) випливає, що:

1) представлення моделі кривої намагнічування сукупністю параболи та прямої дає втричі вищу точність апроксимації універсальної кривої намагнічування електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням, ніж представлення цієї кривої намагнічування математичною моделлю (5);

2) математичну модель (5), яка базується на апроксимації кривої намагнічування арктангенсом, недоцільно використовувати для розв'язання задачі мінімізації втрат електроенергії ЕДПЗ, оскільки при її застосуванні на шляху до розв'язку виникає трансцендентне нелінійне рівняння 3-го порядку, для якого неможливо знайти аналітичні розв'язки в загальному вигляді, що унеможливує, в свою чергу, їх використання для синтезу системи оптимального керування електроприводом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев В. П., Сабинин Ю. А. Основы электропривода. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1963. — 772 с.
2. Мокін Б. І., Мокін О. Б. Математична модель кривої намагнічування електричного двигуна постійного струму з послідовним збудженням для задач оптимізації // Вісник ВПІ. — 2004. — № 1. — С. 45—47.
3. Петров Ю. П. Вариационные методы оптимального управления. — Ленинград: Энергия, 1965. — 220 с.
4. Филиппов Е. Нелинейная электромеханика: Пер. с нем. Под ред. А. Б. Тимофеева. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Энергия, 1976. — 496 с.
5. Вешеневский С. Н. Характеристики двигателей в электроприводе. 6-е изд., исправленное. — М.: Энергия, 1977. — 432 с.
6. Мокін Б. І., Мокін О. Б. Математичні моделі в задачі оптимізації електропривода трамвая при його сталому навантаженні // Вісник ВПІ. — 2004. — № 2. — С. 57—61.

Рекомендована кафедрою моделювання і моніторингу складних систем

Надійшла до редакції 27.01.05.
Рекомендована до друку 29.01.05.

Мокін Олександр Борисович — аспірант.

Кафедра моделювання і моніторингу складних систем, Вінницький національний технічний університет