

УДК 69.056.7

Г. С. Ратушняк, к. т. н., проф.;

Н. М. Слободян

## АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГНУЧКОГО АДАПТИВНОГО ПРИВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ ВІБРАЦІЙНОГО УЩІЛЬНЕННЯ БЕТОННОЇ СУМІШІ

Запропоновано порівняльний аналіз моделей обчислення прогинів гнучкого адаптивного привантаження, яке використовується під час вібраційного ущільнення бетонної суміші.

### Вступ

Збільшення обсягів індивідуального житлового будівництва в Україні обумовило необхідність створення відповідного обладнання для виготовлення дрібнорозмірних бетонних виробів та дослідження теоретичних основ технологічного процесу їх виготовлення. Різноманітний набір цих виробів дозволяє виконувати монтаж стін будинків з використанням того чи іншого архітектурного оздоблення.

Основою формуальної установки дрібнорозмірних бетонних виробів є пристрій, що забезпечує операцію ущільнення бетонної суміші [1, 2].

Зазвичай використовується динамічний (вібраційний) метод ущільнення. При цьому вільну поверхню блоку привантажують, що сприяє доущільненню поверхневого шару та вирівнюванню поверхні виробу. В процесі формування декоративних стінових бетонних виробів виникає нагальна потреба у визначенні лінії прогинів еластичного привантаження, яка б забезпечувала рівну поверхню декоративного бетонного виробу. Вдосконалення технологічного процесу вібраційного доущільнення вимагає вибору найдостовірнішої математичної моделі цього процесу, що забезпечує рівну поверхню декоративного виробу.

Основна частина

Розглянуто чотири математичні моделі еластичного адаптивного привантаження при вібраційному ущільненні бетонної суміші.

### I модель. Закріплена по контуру тонка прямокутна гнучка пластина під дією розподіленого навантаження

Пластина знаходиться у плоско-напруженому стані і відноситься до двовимірних задач теорії пружності. Прогин пластини описується бігармонічним рівнянням Лапласа (рис. 1)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = F(x, y), \quad (1)$$

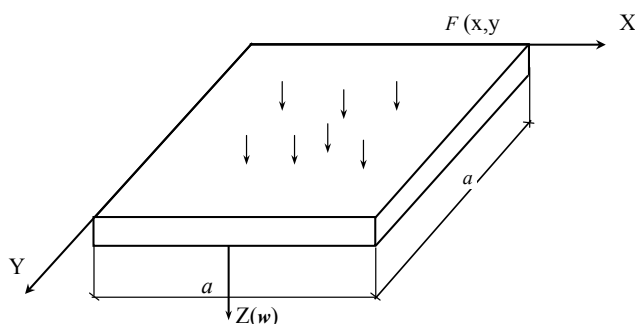


Рис. 1. Схема дії сил на поверхню еластичного привантаження

Граничні умови:

де  $w$  — прогин пластини у напрямку осі  $OZ$ ;  $F(x, y)$  — функція навантаження;  $D$  — циліндрична жорсткість пластини, зазвичай визначається так:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

де  $E$  — модуль пружності пластини;  $\mu$  — коефіцієнт поперечного розширення (коефіцієнт Пуассона);  $h$  — товщина пластини.

$$\begin{cases} w = 0 \text{ (переміщення пластини на контурі відсутні);} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ (кути повертання пластини у місцях закріплення відсутні).} \end{cases} \quad (2)$$

Для числового розв’язання використано метод скінченних різниць з переходом до безрозмірної форми (1). Дискретизація поверхні здійснювалась нанесенням прямокутної сітки, що обумовило необхідність введення допоміжних коефіцієнтів в розрахунковий аналог диференційного рівняння (1). Дані чисельного моделювання наведено в третьому рядку таблиці (в чисельнику —  $W_{\text{теор.}}$ , в знаменнику —  $W_{\text{теор.}}/W_{\text{експ.}}$ ).

Результати чисельного моделювання

1	$q$ , кПа	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35
2	$W_{\text{експ.}}$ , мм	19,0	24,0	26,7	28,08	30,4	34,7	36,8	38,4
3	Модель I	$\frac{8,7}{2,18}$	$\frac{13,0}{1,84}$	$\frac{17,4}{1,53}$	$\frac{21,7}{1,32}$	$\frac{26,09}{1,18}$	$\frac{30,34}{1,14}$	$\frac{34,67}{1,06}$	$\frac{39,01}{0,98}$
4	Модель II	$\frac{23,8}{0,8}$	$\frac{27,3}{0,88}$	$\frac{30,0}{0,84}$	$\frac{32,3}{0,90}$	$\frac{34,4}{0,96}$	$\frac{36,2}{0,90}$	$\frac{37,8}{0,97}$	$\frac{39,3}{0,98}$
5	Модель III	$\frac{24,4}{0,78}$	$\frac{28,2}{0,85}$	$\frac{31,7}{0,84}$	$\frac{33,4}{0,862}$	$\frac{35,6}{0,853}$	$\frac{37,4}{0,927}$	$\frac{39,2}{0,978}$	$\frac{40,1}{0,96}$
6	Модель IV	$\frac{8,54}{2,22}$	$\frac{12,81}{1,879}$	$\frac{17,08}{1,56}$	$\frac{21,3}{1,35}$	$\frac{25,62}{1,20}$	$\frac{29,89}{1,16}$	$\frac{34,16}{1,07}$	$\frac{38,43}{0,999}$

**II модель. Мембранна аналогія Прандтля**

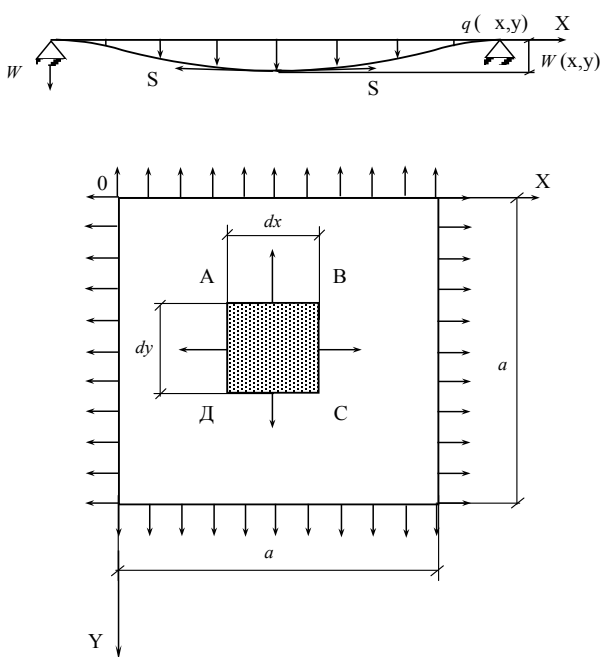


Рис. 2. Розрахункова схема рівняння рівноваги мембрани

Розглянуто двовимірне хвильове рівняння Пуасона, що описує поперечне коливання однорідної мембрани, яка знаходиться під дією рівномірного натягу, прикладеного по контуру, та рівномірно розподіленого навантаження

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (3)$$

З граничними умовами шарнірного опирання (рис. 2)

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Розв’язок знайдено за методом скінченних різниць. Виконані числові розрахунки величини стріли прогину привантаження в залежності від  $q$  наведено в четвертому рядку таблиці (в чисельнику — абсолютні значення  $W_{\text{теор.}}$ , в знаменнику — їх відношення до експериментальної величини  $W_{\text{експ.}}$ ).

**III модель. Мембрана на пружній основі Вінклера**

Формування декоративного виробу із бетонної суміші проходить з опиранням гнучкого привантаження на бічні сторони форми опалубки і на поверхню бетонної суміші. Тоді доцільно до рівняння (3) додати складову, що враховує реакцію основи (бетонної суміші)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} - \frac{K_0 W}{S} \quad (5)$$

де  $K$  — коефіцієнт жорсткості основи.

Граничні умови мають вигляд (4). Дані чисельного моделювання прогинів адаптивного привантаження за III моделлю проведено за методом скінченних різниць і показано в п'ятому рядку таблиці.

#### IV модель. Енергетична математична модель на основі варіаційних принципів

Згин еластичного привантаження визначається для тонкої прямокутної пластини з енергетичним обґрунтуванням її роботи (рис. 1).

Вихідне диференційне рівняння розрахунку пластини отримано під час мінімізації виразу потенційної енергії системи. Згідно з принципом мінімуму потенційної енергії системи із всіх кінематично можливих системних переміщень лише дійсні переміщення надають мінімум потенціальній енергії системи

$$П = U - A = \min, \quad (6)$$

де  $U$  — робота зовнішніх сил;  $A$  — робота внутрішніх сил.

Рівняння (6) — функціонал, варіаційне рівняння Лагранжа, яке було мінімізовано, та отримано шуканий аналітичний вираз для прогинів плити

$$W = \frac{7q}{128 \left( a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right) D} \left( x^2 - a^2 \right)^2 \left( y^2 - b^2 \right), \quad (7)$$

де  $W$  — пружна потенціальна енергія одиниці об'єму,  $a, b$  — розміри сітки дискретизації.

Дані теоретичних досліджень в шостому рядку таблиці.

#### Висновки

— I модель гнучкої пластини дає розбіжності зі значеннями експериментальних прогинів 2 %...18 % для  $q > 0,9$  кПа.

— II модель мембранної аналогії Прандтля та III модель мембрани на пружній основі Вінклера дають розбіжність від 2 %...22 %, що цілком задовольняє вимоги.

— Розходження у значеннях прогинів привантаження обчислених на основі варіаційних принципів і експериментальних (IV модель) знаходяться в межах 0,1 %...20 % для  $q > 0,9$  кПа.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Г. С. Ратушняк, Н. М. Слободян. Дослідження факторів формування декоративних бетонних виробів на віброверстаті // Вісник ВПІ. — 2002. — № 2. — С. 24—26.
2. Патент України UA 3744, B22C15/30, B24B31/06. Пристрій для вібропресування пустотних виробів / Пен-тюк Б. М., Слободян Н. М. та інші // Бюл. № 12. Опубл. 2004.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. — М.: Гостехиздат, 1956. — 420 с.
4. Исаханов Г. В., Чорний С. М. Чисельні методи розв'язування задач будівництва. — К.: Вища школа, 1995. — 374 с.

Рекомендована кафедрою теплогазопостачання

Надійшла до редакції 8.02.05  
Рекомендована до друку 22.02.05

**Ратушняк Георгій Сергійович** — завідувач кафедри, **Слободян Наталія Михайлівна** — старший викладач кафедри.

Кафедра теплогазопостачання, Вінницький національний технічний університет